

§ 2 1 電磁誘導

これまでは時間変動しない静電場・静磁場の議論を行ってきた。これからは時間変動する電場・磁場を考える。その出発点は Michael Faraday が 1831 年に発見した電磁誘導の現象である。磁場が時間変化し、コイルを貫く磁束が変化すると、電磁誘導によりコイルに起電力が生じ電流が流れる。コイルがなくとも磁場が時間変動すると、その場所の電場も変化する。時間変動する磁場は電場と結合している。

1) Faraday の電磁誘導の発見とレンツの法則

Michael Faraday は、一個の環状の Fe の二カ所にコイルを巻き付け (図 21-1)、一方のコイル (C1) に電流を流したり、切ったりすると、もう一方のコイル (C2) に電流が流れることに気付いた。電流値を変化させても別のコイルに電流が生じる。一方のコイルに一定電流を流した状態で、もう一方のコイルの相対位置を変化させても、そのコイルに電流が生じる。

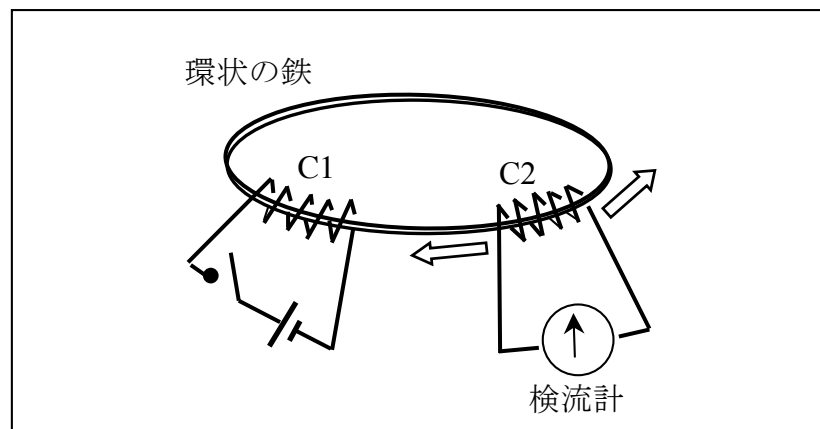


図 21-1. Michael Faraday の実験

鉄芯の電磁石ではなく，永久磁石を一つのコイルに近付けたり遠ざけたりしても，コイルに電流が流れることが判った（図 21-2）.

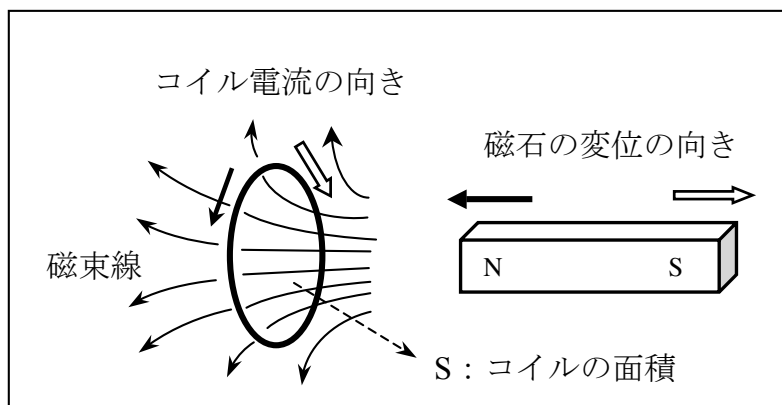


図 21-2. コイルに対する磁石の相対変位とコイルの誘導電流向きの対応関係.

コイルに電流が流れるとは，コイルの回路に電池をつないだことと同じであり，起電力(ϕ_{em})を生じていることになる．電磁誘導 (electromagnetic induction) の現象である．

図 21-2 で，磁石がコイルに近づくと，コイルを貫く磁束線（磁力線）の数は増加し，磁石から見て反時計周りの電流が生じる．一方，磁石がコイル遠ざかると，コイルを貫く磁力線の数は減少する．そして時計回りの電流が生じる．

一般に，図 21-2 のコイルのように，面積 S をもつ平面回路に垂直に磁場が存在する時，その磁束密度 B と平面回路の面積 S を掛けたもの

$$\Phi = B \cdot S \quad (1)$$

を，この回路を貫く**磁束** (magnetic flux) 呼ぶ．磁束の正負は，あらかじめ回路の向きを決めておき，その向に右ネジが回転する時にその右ネジ全体が進む方向を正の Φ ，その逆の向きとなる場合は負の Φ と約束する．

我々は、磁場の議論の始めから、磁束密度 (magnetic flux density) \mathbf{B} を使った。

(1) は磁束密度 \mathbf{B} が回路面 S に垂直な場合であるから、磁束を回路面積で割ったものが磁束密度 \mathbf{B} の大きさになることは納得できるはずである。電束密度 \mathbf{D} が単位面積を貫く「電気力線」の数であるように、磁束密度 \mathbf{B} は単位面積を貫く「磁力線」の数と考えれば良い。だから磁束 Φ の大きさは「その平面回路を貫く磁力線の本数」である。次節に述べる磁束密度 \mathbf{B} と回路面 S の法線が一致しない一般の場合も、電束密度 \mathbf{D} と同様に考えれば良い。

Michael Faraday が「電気力線」を考えたのは、「磁力線」から得たイメージによる。紙の上に Fe の粉末をばらまいておき、その紙の下に磁石を近づけると Fe の粉末は磁場の方向に並び、「磁力線」パターンを描く。目に見える磁場の「磁力線」パターンから、電場の「電気力線」を考えたとされる。これは結果的に、磁場と電場の相似性により、的を射た推論であった。

電磁誘導で生じる起電力(ϕ_{em})は、レンツ (Lenz, H., 1804~1865) により、

1) コイルを貫く磁束の時間変化率 ($d\Phi/dt$) の大きさに比例し、

2) その起電力によって生じる電流は磁束の時間変化を妨げる方向に流れる。

と総括された。レンツの法則と呼ばれている。これは、ノイマン (Neumann, F., 1798~1895) により、次の式で表現された。

$$\phi_{em} = -k \frac{d\Phi}{dt}, \quad (k > 0) \quad (2)$$

(2)は磁束の時間変化率 ($\Delta\Phi/\Delta t$) を問題にしている。図 21-2 のコイルで考えると、 Δt の時間内に磁石がコイルに近づくと (黒の矢印)、コイルを貫く磁束線 (磁力線) は増加する。磁極に近いほど磁束線は集中しているからである。 $\Delta\Phi$

> 0 で、 $\Delta\Phi/\Delta t > 0$ である。この場合、コイルには、N 磁極からコイルを見たとして、反時計周りの電流（黒の矢印）が生じている。一方、磁石がコイルから遠ざかると（白の矢印）、コイルを貫く磁束線は減少する。 $\Delta\Phi < 0$ で、 $\Delta\Phi/\Delta t < 0$ である。電流は時計周り（白の矢印）に生じている。だから、いずれの場合も、図 21-2 のコイルの向きは、「N 磁極側からコイルを見たときの時計回り」を採用すると、(2)式と合致する。この図 21-2 のコイルの向きは、コイル面 S の表裏を、“N 磁極側が裏”であると約束するのと同じである。面 S の裏から表に向かう方向（内部から外部に向かう方向）が「面 S の法線方向」を指定するからである。

2) 一般的な磁束の定義

磁束密度 \mathbf{B} が場所によって一定ではない一般的な場合、磁束 (Φ) はどのように与えられるかを考える。図 21-3 に示すように、まず、問題の閉曲線回路 C に向きを与える。この向きに右ネジを回転させると進む方向を、 C を縁とする面の裏から表に向かう方向とし、その面 S の表裏を決める。

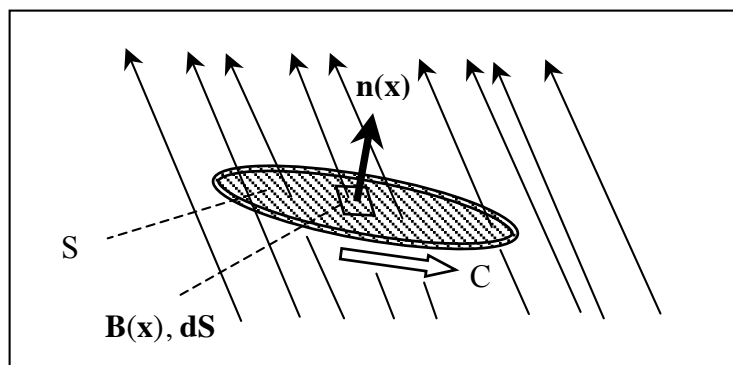


図 21-3. 磁束を決める為の閉曲線回路 C の向き、 C を縁とする面 S 、面 S 上の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ の定義。

表裏が決まった閉局面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ を与え,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (3)$$

を求めることとする. これが閉曲線回路 C を貫く磁束 (Φ) となる. C に \mathbf{B} が垂直で一様な磁場であれば, (3)は(2)に一致する.

しかし, 閉曲線回路 C を縁とする閉局面 S は無数に考えられる. C を貫く磁束は, 閉局面 S が C を縁とするものであれば, どのような閉曲面であっても同じ磁束 (Φ) を与えるのか? これを以下で見てみよう

閉曲線回路 C を縁とする閉局面 S_1, S_2 で(3)式を考える. C の向きで指定される閉局面 S_1, S_2 の裏→表の方向は, それぞれ, $\mathbf{n}_1(\mathbf{x})$ と $\mathbf{n}_2(\mathbf{x})$ の単位法線

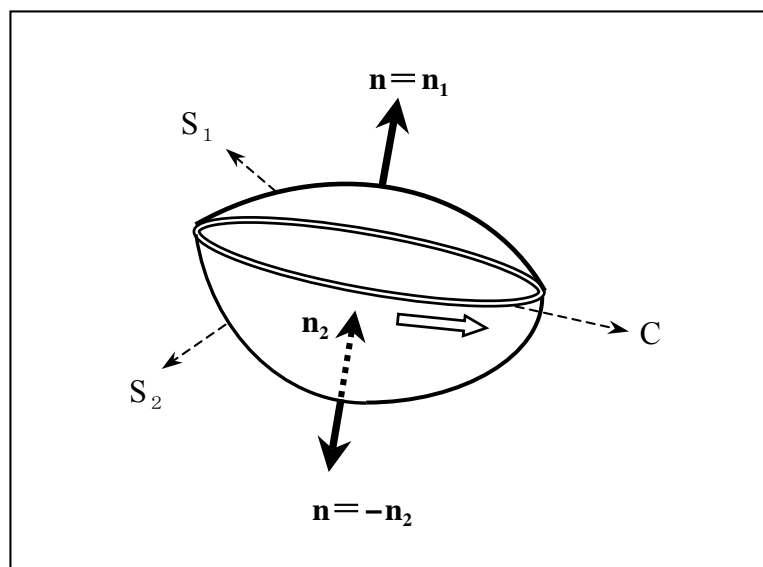


図 21-4. 閉曲線回路 C を縁とする面 S_1 , 面 S_2 上の単位法線ベクトルは \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 である. しかし, $(S_1 + S_2)$ で与えられる一つの閉局面 S を発散定理で考える時の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$ である.

ベクトルであるとする (図 21-4). (3)から, それぞれ,

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS \quad (4)$$

が成立する. 一方, $(S_1 + S_2)$ は一つの閉局面 S となり, これを発散定理で考える時, S 上の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$ の関係になる

(図 21-4). この発散定理の結果は, ”磁荷 “は無いから,

$$\int_V \text{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0 \quad (5)$$

である. $(S_1 + S_2)$ 面積分は(4)を用いて表現できるから,

$$\int_{S_1+S_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_{S_1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS - \int_{S_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS = \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

故に, (4)の二つの磁束の値は等しい.

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (6)$$

閉曲線回路 \mathbf{C} の縁で定義される閉局面を考えれば, (3)で定義される磁束 (Φ) の値はただ一つ定まり, (3)は一般的条件で, 閉曲線回路 \mathbf{C} を貫く磁束を与える.

3) 運動する導線回路の起電力と磁束変化

レンツの法則(2)に付随する比例係数 k の値については何も述べていない。そこで、一様な磁場の中を一定の速度で移動する導線の正方回路を考え、そこに生じる起電力と導線回路を貫く磁束の時間変化率を求め、この k の値を考える。

§ 18-6 で述べたように、電荷 q の粒子が磁場 \mathbf{B} の中を速度 \mathbf{v} で運動する時、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\S 18-25)$$

のローレンツ力がこの荷電粒子に作用する。図 21-4 に示すように、 z 軸方向を向く一様な磁場 \mathbf{B} があるところで、 x 軸方向の直線導線を一定速度 \mathbf{v} で、 y 軸方向に移動させると、導線金属の伝導電子は負電荷を持つから、これらの電子には x 軸の負方向にローレンツ力が働く。

$$\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

図 21-5 の状況では、この力は金属導線の伸びる方向に一致しているので、

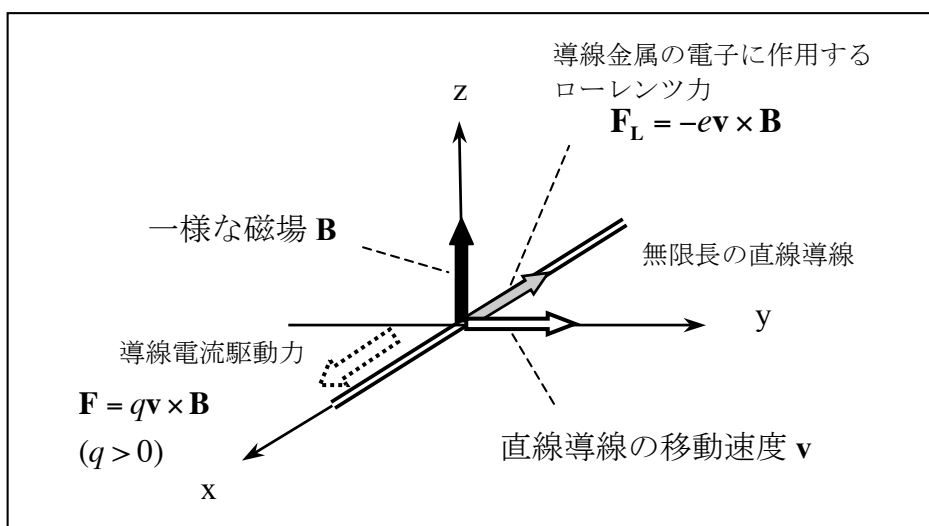


図 21-5. 一様な磁場 \mathbf{B} (z 方向) の中を一定速度 \mathbf{v} (y 方向) で移動する x 方向の直線導線. 導線金属の伝導電子には x 軸の負方向にローレンツ力が働く。

この導線が無限に伸びていれば、伝導電子は x 軸の負方向に移動する。これは、 x 軸の正方向に正電荷を移動させる力（電流の駆動力）が働き、 x 軸の正方向に電流が流れることを意味する。しかし、導線に端があれば、電子はそこに蓄積されその蓄積電荷により反対方向の電流駆動力が生じ、ローレンツ力と釣り合い、電流は流れなくなるであろう。

そこで、直線導線を適当な長さ（ a ）で y 軸方向に折り曲げ、さらに x 方向、 y 方向と折り曲げて、一辺 a の正方回路を作るとする。その回路に環状電流は流れるであろうか？ 磁束密度 B の方向も正方回路全体の移動速度 v も図 21-5 のままとする。図 21-6 はその状況を模式的に示す。各辺で伝導電子に働くローレンツ力の向きは全て同じであるが、 AD 間と BC 間では導線の延びる方向にローレンツ力は一致するが、 AB 間、 CD 間では導線の方角とローレンツ力の方向が直交し、電荷を導線に沿って動かす力は AB 間、 CD 間には存在しない。

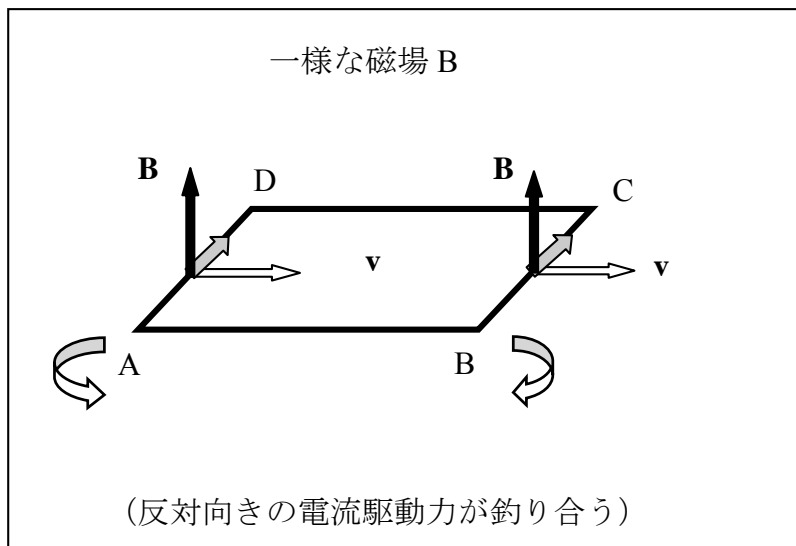


図 21-6. 一様な磁場の中を速度 v で移動する正方回路。
 AD 間で生じる環状電流の駆動力と BC で生じる駆動力
 反対向きで、両者は釣り合い、環状電流は生じない。

AD 間で生じる電流の駆動力は $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の向きで、BC 間で生じる駆動力は $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$ の向きとなり、両者は相互に釣り合う。従って、結局、正方回路には環状電流は生じない。

電流駆動力とは起電力のことである。AD 間の電荷 $q(>0)$ は (§ 18-25) の $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の力を受けるから、単位電荷当たり、 $\mathbf{F}/q = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の力を磁場から受ける。この向きは x 軸の正方向であるから、D から A の向きに ds をとると、磁場が D から A の区間で単位電荷当たりに行う仕事は、

$$\phi(D \rightarrow A) = v \cdot B \int_D^A ds = v \cdot B \cdot a > 0 \quad (8)$$

である。この事情は、BC 間でも同じであり、

$$\phi(C \rightarrow B) = v \cdot B \int_C^B ds = v \cdot B \cdot a > 0 \quad (9)$$

となる。起電力の大きさは両者で等しく、向きが反対である。向きを揃えて考えれば、

$$\phi(D \rightarrow A) - \phi(C \rightarrow B) = 0 \quad (10)$$

となる。起電力の差は 0 で、電流は流れない。

しかし、図 21-7 に示すように、もし、磁場 \mathbf{B} が AD 間と BC 間で同じではなく、AD の磁束密度 $B(1)$ が、BC 間の磁束密度 $B(2)$ より大きいとする。そして磁束密度 \mathbf{B} は、AD, BC 方向 (x 方向) には空間変化しておらず、AB, DC 方向 (y 方向) のみに変化しているとする。AB 間, CD 間ではローレンツ力の向きは x 軸の負方向で、導線はこれに直交する y 方向にあり、これらの区間では環状電流の駆動力が生じないのは図 21-6 と同じである。AD 間での磁束密度 $B(1)$ が BC 間の磁束密度 $B(2)$ より大きいので、環状電流の駆動力の均衡は破れてい

る．正電荷の電流駆動力は $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ の向きに生じる．

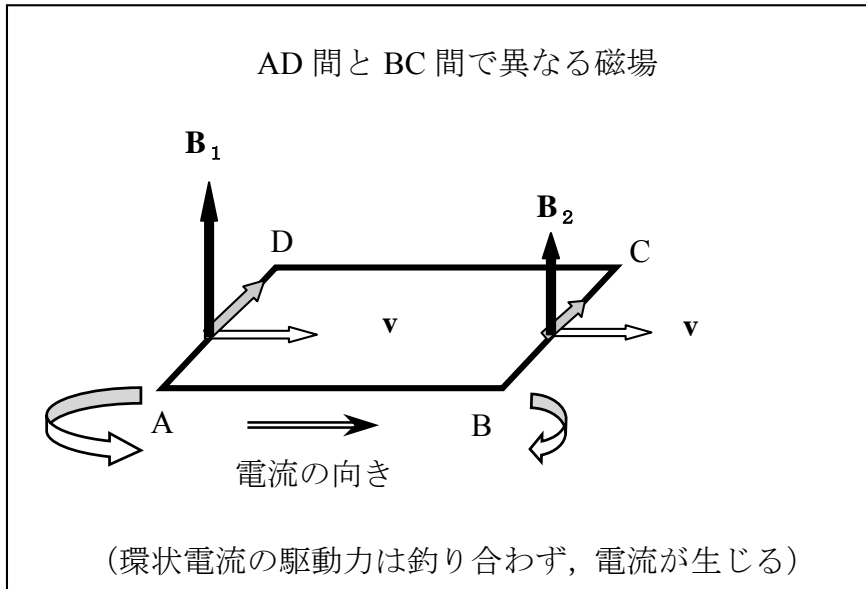


図 21-7. 磁場の中を速度 v で移動する正方回路．AD での磁束密度 $\mathbf{B}(1)$ は BC での $\mathbf{B}(2)$ より大きいとすると，環状電流の駆動力の均衡は破れ， $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ の向きに環状電流が生じる．

図 21-7 の場合も，図 21-6 の場合と同じように起電力を考えればよい．図 21-7 の場合はダッシュを付して記す．磁場が D から A の区間で単位電荷当たりに行う仕事は

$$\phi'(D \rightarrow A) = v \cdot B(1) \int_D^A ds = v \cdot B(1) \cdot a > 0 \quad (12)$$

である．この事情は，磁束密度は異なるが，BC 間でも同じだから，

$$\phi'(C \rightarrow B) = v \cdot B(2) \int_C^B ds = v \cdot B(2) \cdot a > 0 \quad (13)$$

両者で，起電力の大きさは異なり，向きが反対である．向きを揃えて考えると

$$\phi'(D \rightarrow A) - \phi'(C \rightarrow B) = v \cdot a [B(1) - B(2)] > 0$$

である． $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ の向きの起電力が生じる．この起電力を

$$\phi_{em} \equiv \phi'(D \rightarrow A) - \phi'(C \rightarrow B) = v \cdot a[B(1) - B(2)] > 0 \quad (14)$$

と記すことにする.

次に磁束の時間変化率を考えよう. 図 21-8 に示すように, 回路全体は微小時間 Δt の間に $v \Delta t$ の微小距離だけ y 方向に移動する. $AA' = DD' = BB' = CC' = v \Delta t$ である. 正方回路面を貫く磁束は, Δt の微小時間の間に, 面積 $AA'D'D$ を貫く部分が面積 $BB'C'C$ を貫く部分で置き換えられるから, 磁束の変化 $\Delta \Phi$ は,

$$\Delta \Phi = B(2) \cdot a \cdot v \Delta t - B(1) \cdot a \cdot v \Delta t = a \cdot v \cdot [B(2) - B(1)] \Delta t$$

故に, 磁束の時間変化率は,

$$\frac{d\Phi}{dt} = a \cdot v \cdot [B(2) - B(1)] \quad (15)$$

である. この結果と(14)から,

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (16)$$

となり, レンズの法則(2)の比例係数 k は, $k = 1$ であることが判る.

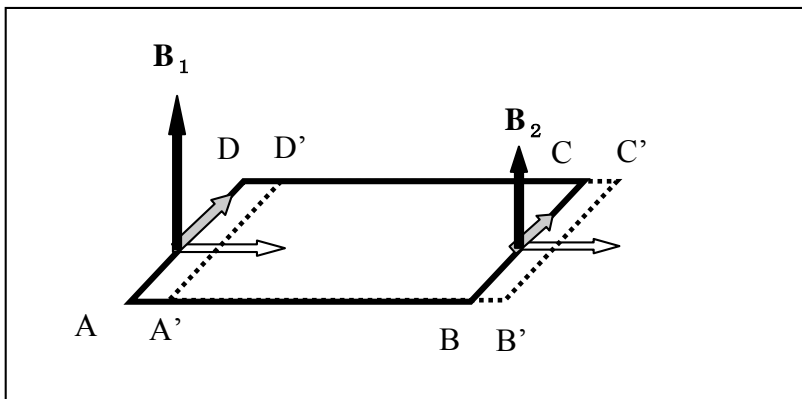


図 21-8. 磁場の中を速度 v で移動する正方回路. $AA' = DD' = BB' = CC' = v \Delta t$ で, Δt の微小時間の間に, 面積 $AA'D'D$ を貫く磁束部分が面積 $BB'C'C$ を貫く部分で置き換えられる.

(16)の結果は特別な条件から得られたが、一般の場合も、 $k=1$ となる。また、以上の議論では、磁束密度 \mathbf{B} の空間分布は時間変化せず、コイルが一定速度で移動する場合であった。しかし、コイルを空間に固定して、磁束密度 \mathbf{B} が時間変化する場合も(16)はあてはまる。

電磁誘導の(16)式から交流発電機の原理が説明できる (図 21-8)。 y 軸の正方向に一樣な磁束密度 \mathbf{B} の中で、断面積 S の正方形の環状コイルを、 x 軸を回転軸として、角速度 ω で回転させるときの、起電力を(16)から求める。

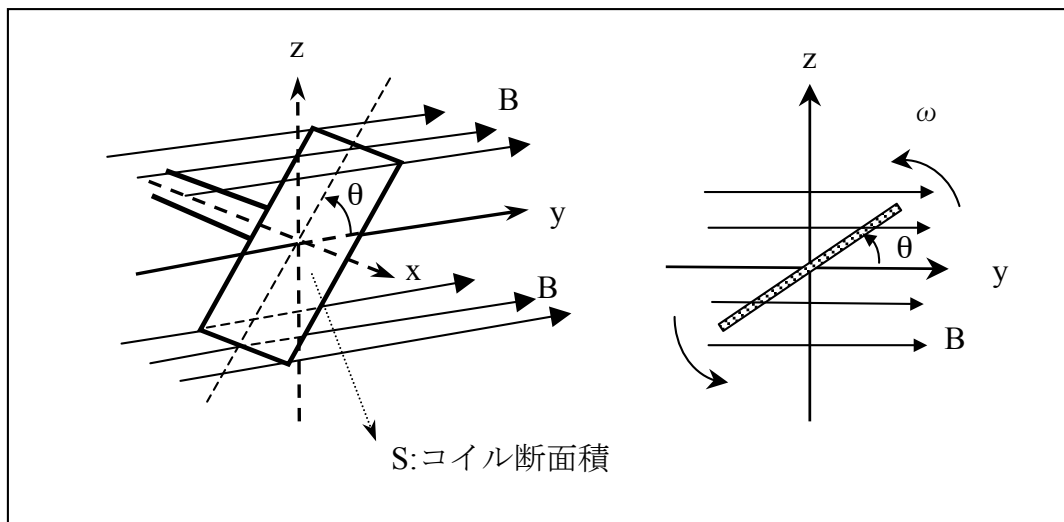


図 21-9. y 軸に平行な一樣磁束密度 \mathbf{B} の中で、断面積 S のコイルを x 軸を回転軸として角速度 ω で回転させる。コイルに交流電流が生じる。

コイルの面と磁束密度 \mathbf{B} 方向とのなす角度を θ とする。 \mathbf{B} に垂直な面に投影されるコイルの面積 S は、 $S \cdot \sin \theta$ であるので、このコイルを貫く磁束は

$$\Phi = BS \sin \theta \quad (17)$$

である。回転の角速度 ω 、初期位相を α とすると、 $\theta = \omega \cdot t + \alpha$ で、

磁束は $\Phi = BS\sin\theta = BS\sin(\omega \cdot t + \alpha)$ となる。(16)の電磁誘導の式から、

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad (18)$$

の起電力となる。水力、火力、内燃機関によりコイルの回転運動を起こせば、交流発電が出来る。

4) 電磁誘導の一般的表現

§ 17-4 で議論した起電力を含む閉回路の定常電流では、閉曲線 C についての電場 E の線積分は、その回路の起電力に等しかった。本章の 3) の議論でも磁場により起電力が生じることが判った。従って、電磁誘導における閉曲線回路 C の起電力 ϕ_{em} は、閉曲線 C に関する電場 E の線積分に等しいとおくことができよう。即ち、

$$\phi_{em} = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (19)$$

一方、磁束密度 B は次のように一般的に定義できることを 2) で確認した。閉曲線 C を縁とする面 S として、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (3)$$

である。ここでは時間変動する磁束密度としている。これを(19)右辺に代入して、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left[\int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \right] \quad (20)$$

である。ここでの閉曲線 C は、もともとは、電流が流れることが出来るコイル導線であった。しかし、(20)の左辺は電場 E になっており、近接作用の考え方からすれば、もはや導線である必要はない。そこで、この C をある一つの閉曲

線経路と考え、 S はこれを縁とする一つの面と考える。具体的な積分の経路に対して、(20)の右辺は、微分と積分と入れ替え、微分を偏微分の表現にすることができる。

$$-\frac{d}{dt} \left[\int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \right] = - \int_S \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (21)$$

故に、これを(19)に戻せば、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (22)$$

である。左辺の閉曲線 C の線積分は、ストークスの定理によって次の面積分に等しいから、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \{ \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

結局、(22)は

$$\int_S \{ \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = - \int_S \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

である。移行して一つにまとめることが出来る。

$$\int_S \{ \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0 \quad (23)$$

これは、閉局面 S は任意の C を考えて、別の S でも同様に成立するはずであるから、

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$

を意味する。即ち、電磁誘導の一般的表現は、

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (24)$$

である。磁場の時間変動が電場を生じ、この機構が電磁誘導であることを表す。