

## § 2 2 変位電流と Maxwell の方程式

Maxwell の方程式に至る道のりで残された最後のステップが、変位電流である。定常電流に関するアンペールの法則は、電流が定常磁場の原因であることを述べている。しかし、アンペールの法則をそのままの形で時間変動する磁場と電流の関係に拡張すると、電荷保存則に矛盾する結果となる。そこで Maxwell は、変位電流（電束電流：電束密度の時間微分）を導入し、時間変動する磁場と電流に対しアンペールの法則を拡張することに成功した。この拡張式はアンペール・マックスウェルの法則と呼ばれる。結果として、電場  $\mathbf{E}$ 、電束密度  $\mathbf{D}$ 、磁場  $\mathbf{H}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、電荷密度  $\rho$ 、電流  $\mathbf{i}$  に関する四つの方程式（Maxwell の方程式）が得られる。これにより、電磁場のもとに於ける点電荷系のエネルギー、運動量の保存則が得られる。

### 1) 電荷保存則と Maxwell の変位電流

電磁誘導の一般式は、電場の原因が磁場の時間変動にあることを示している。一方、定常電流に関するアンペールの法則は、§ 17-7-(35-2)から、

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

であり、電流が定常磁場の原因であることを述べている。もし、このアンペールの法則をそのままの形で時間変動する磁場と電流の関係に拡張すれば、

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

である。これで良いのだろうか？ その為に電荷保存則を考える。二つの理由がある。一つは、どんな場合も電荷の総量は常に保存されねばならない。これは電磁気学の基本的要請である。もう一つの理由は、(2)の右辺は電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$

であるから、これは電荷の流れに関係するからである。もし、(2)が電荷保存則と矛盾するなら、(2)は採用できないことになる。

(2)の右辺である電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$  の任意の閉局面  $S$  に関する面積分は、発散定理を用いて、次のように表現できる。

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_V \text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3)$$

いつのものように、閉曲面  $S$  の  $\mathbf{x}$  の位置で、内側から外側に向かう単位法線ベクトルが  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  であるから、(3)の両辺は体積  $V$  から外側に流失する電流を表す。

従って、体積  $V$  内における電荷密度を  $\rho(\mathbf{x}, t)$  とすると、

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_V \text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) dV = -\frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \right\} \quad (4)$$

が成立しなければならない。流失量であるから負符号が付く、体積  $V$  を固定して考えると、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \right\} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV \quad (5)$$

と表現できるから、(4)は

$$\int_V \text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) dV + \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV = \int_V \left\{ \text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} dV = 0$$

となる。これは任意の  $V$  で成立するから、括弧内が 0 である。即ち、

$$\text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

が成立する。これは微分形で表現した電荷保存則である。この結果は既に、§ 4-3 で示している。

アンペールの法則を得た定常電流の場合は、 $\partial \rho(\mathbf{x}, t) / \partial t = 0$  であり、正味の電流の流出量は 0 である。従って、(6)に相当する結果は

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

であり、(6)の一般的電荷保存則を確かに満足している。アンペールの法則(1)は  $\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x})$  であるが、この両辺の  $\operatorname{div}$  を取って、§ 4-5 で述べた  $\operatorname{rot}$  に関する恒等式を使うと、 $\operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x})] = 0 = \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x})$  となる。故に、アンペールの法則は、(7)の  $\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0$  と合致している。

しかし、定常電流に対するアンペールの法則をそのままの形で時間変動する磁場と電流の関係に拡張すれば、

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

であるが、この両辺の発散と取れば、当然、 $\operatorname{rot}$  に関する恒等式から、

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)] = 0 = \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

となる。これは電荷の一般的保存則(6)

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

と明らかに合致しない。

この不一致を解消するために、Maxwell はアンペールの法則を次のように拡張した。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (9)$$

追加された項が**変位電流**(displacement current)である。電束密度の時間微分であり、電束電流とも呼ばれる。この式が電荷保存則と矛盾しないことは、(9)の両辺の  $\operatorname{div}$  を取れば明らかである。ただし、ガウスの法則を、時間変動がある場合に拡張して

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

として用いる．即ち，

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)] &= 0 = \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)] = \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

このように(9)は電荷保存則と合致する．全ての物理量が時間に依存しない場合，(9)は定常電流に関するアンペールの法則となる．このように，Maxwell によって時間変動する電流，磁場の一般的関係として拡張された(9)式は，**Ampere-Maxwell の法則**と呼ばれる．(9)式右辺の第一項は，通常の導線電流であるが，第二項は電束密度の時間変化率である．電束密度は単位面積を貫く電気力線の本数であるから，この時間変動が磁場の原因となることを意味する．導線はなくとも．このような電気力線の本数が変化すれば，磁場の原因となる．

一方，前章で電磁誘導の一般式は，

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (\S 21-24)$$

であった．磁束密度の時間変化が電場を生じることを意味した．磁束密度は単位面積を貫く磁力線の数であるから，(9)と類似の関係になる．

## 2) コンデンサーの放電電流

Ampere-Maxwell の法則を理解するには，コンデンサーに蓄積された電荷が作る電流を考えれば理解しやすい．一旦，電荷を蓄積したコンデンサーを電源電圧から切り離し，閉回路とすると，当然，正の電荷は閉回路を通過して負電荷側に流れ，回路には電流が生じる．この放電電流により磁場  $\mathbf{H}$  が生じるはずである．しかし，この放電電流は時間とともに減少する非定常電流である．この非

定常電流がコンデンサーの外部閉回路を流れる間、コンデンサーの電荷は減少し、これに対応してコンデンサー内部では変位電流（電束電流）が流れると考えるべきである（図 22-1）。

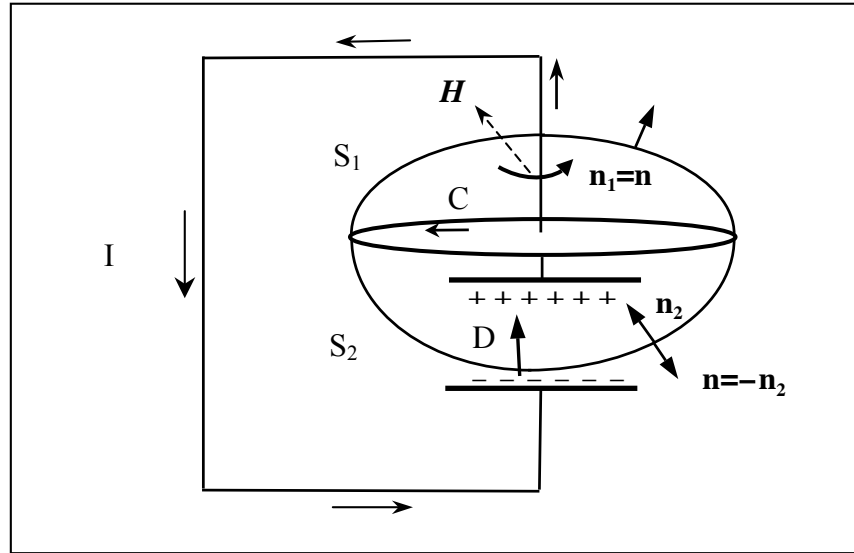


図 22-1. コンデンサーの放電電流が作る磁場  $\mathbf{H}$  とコンデンサー内部に生じる変位電流

磁場は閉曲線  $\mathbf{C}$  を縁とする任意の面に対する面積分によって与えられる。その面を  $\mathbf{S}_1$  とすると、この面では通常の伝導電流密度  $\mathbf{i}$  だけを考えれば良いから、

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS = I \quad (12)$$

である。変位電流は無関係だから、 $\mathbf{S}_1$  に関する面積分は 0 である。

$$\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS = 0 \quad (13)$$

一方、その面を  $\mathbf{S}_2$  にとると、これを貫くのは変位電流のみで、通常の伝導電流密度  $\mathbf{i}$  は考える必要はない。だから

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS \quad (14)$$

である。

磁場  $\mathbf{H}$  は、閉曲線  $\mathbf{C}$  を縁とする任意の面に対する面積分であるためには、 $\mathbf{S}_1$  と  $\mathbf{S}_2$  に関する面積分(12)と(14)が等しいことが必要である。以下で示すように、電荷保存則を用いれば、両者が等しいことがわかる。

$\mathbf{S}_1$  と  $\mathbf{S}_2$  を合わせた閉局面  $\mathbf{S}$  を考える。閉局面  $\mathbf{S}$  に対して通常の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を考えると、面  $\mathbf{S}_1$  と面  $\mathbf{S}$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_1$  と  $\mathbf{n}$  は等しい、しかし、面  $\mathbf{S}_2$  と面  $\mathbf{S}$  の単位法線ベクトルは向きが反対である。(13)を使って

$$\int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS + \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS \quad (15)$$

である。 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$  であるから、(15) 左辺は

$$(15) = - \int_{S_1 + S_2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = - \frac{d}{dt} \int_{S_1 + S_2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

電束密度  $\mathbf{D}$  を電荷密度  $\rho$  に書き換える。 $\mathbf{D}$  についての発散定理とガウスの法則から、

$$- \frac{d}{dt} \int_{S_1 + S_2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = - \frac{d}{dt} \int_V \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) dV = - \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (16)$$

である。(16)は更に、電荷保存則を使うと、

$$\begin{aligned} - \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV &= \int_V \text{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) dV = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS - \int_{S_2} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS = \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) dS = I \end{aligned}$$

である。結局(14)は、

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) dS = I \quad (17)$$

であるから、これは(12)に等しい。即ち、磁場  $\mathbf{H}$  は閉曲線  $\mathbf{C}$  を縁とする任意の面に対する面積分で与えられることが判る。コンデンサーの電荷が放電するとき、コンデンサー内部で生じる電流が変位電流（電束電流）である。

### 3) Maxwell の方程式

ここでようやく、電磁気学の基本法則とされる Maxwell の方程式を書き下すことができる。物質中の電磁場は以下の方程式により与えられる。

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (19)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

以上の四つの方程式の他に、通常は、

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

を仮定する。 $\varepsilon$ はその物質の誘電率、 $\mu$ はその物質の透磁率である。物質の誘電率と透磁率が、それぞれ、スカラーの $\varepsilon$ と $\mu$ の係数で近似できる場合が対象となる。もし、物質ではなく真空の電磁場を問題にする場合は、 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ 、 $\mu \rightarrow \mu_0$ と真空の誘電率、透磁率に置き換えればよい。(18)~(21)は現象論的な Maxwell の方程式と呼ばれる。

(18)式は電場に対するガウスの法則で、電場の源泉は電荷であることを表す。(19)式は磁場に対するガウスの法則で、磁場の源泉となる単磁荷 (magnetic monopole) は存在しないことを表す。(20)はアンペール・マックスウェルの法則である。(21)は Faraday の発見した電磁誘導の法則である。Maxwell の方程式は、電場  $\mathbf{E}$ 、電束密度  $\mathbf{D}$ 、磁場  $\mathbf{H}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、電荷密度  $\rho$ 、電流  $\mathbf{i}$  に関する四つの方程式からなる。これらは Maxwell の方程式と呼ばれるものの、実際は、

Maxwell 自身の表現(1865)を、ヘヴィサイド(1885)とヘルツ(1890)が再整理した結果である。“Maxwell の方程式”と呼ぶのではなく、“Maxwell-Heaviside-Hertz の方程式”と呼ぶべきであるとの意見がある<sup>3)</sup>。もっともな意見であろう。Maxwell 方程式が提唱された 1865 年は、クラウジウスがエントロピーを提唱し、熱力学の第二法則を数式化した年でもある。これは重要な歴史的事実である。この時点で、力学、熱力学、電磁気学の今日で言う古典物理学の骨格が出来上がったと言えるからである。明治元年が 1868 年であることを思うと、科学を志した明治以降の日本の若者が西洋科学の本流に“catch up”することが如何に大変であったかも想像できる。

“Maxwell の方程式”には、(22)と(23)がさらに付け加わって合計 6 式が一セットとなっている。二式が加わる理由は次の通りである。“Maxwell の方程式”での未知数の数と式の数を考えてみよう。電場 **E**、電束密度 **D**、磁場 **H**、磁束密度 **B**、電荷密度  $\rho$ 、電流 **i** の内で、電荷密度  $\rho$  と電流 **i** は与えられた値であると考え、未知パラメーターは **E**、**D**、**H**、**B** の四つとなる。成分の数で言うと、 $3 \times 4 = 12$  である。これに対し方程式の数は、(18)と(19)はスカラーの式であるから、合計で 2、(20)と(21)は成分で考えると  $3 \times 2 = 6$  である。方程式の全合計は 8 となる。明らかに、未知パラメーター数の 12 は、方程式の数 8 より多いので、“Maxwell の方程式”は解けそうもない連立方程式である。

そこで、(22)と(23)を加えて、方程式の数を成分で 6 だけ増やすことにすると、方程式の数は成分で 14 となり、今度は、未知パラメーター数 12 よりも、方程式の数が 2 だけ多くなってしまい、逆の状況になる。或は次のように考えても良い。追加した(22)と(23)を用いて、未知パラメーターを **D** と **B**、又は **E** と **H**



だけに減らす．成分で考えると未知数は 6 である．これに対し，“Maxwell の方程式” の方程式数は 8 であるから，やはり方程式の数の方が 2 だけ多い．これで良いのだろうか？

この原因は，(18)~(21) の “Maxwell の方程式” 自体にある．(20)の両辺の発散を取ると，

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (24)$$

となる．しかし，左辺で， $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0$  が恒等的に成立し，また電荷保存則から， $\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \partial \rho_e(\mathbf{x}, t) / \partial t = 0$  である．故に，(24)は

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \rho_e(\mathbf{x}, t)] = 0$$

となる．この両辺を時間で積分すると，右辺側には時間  $t$  は変数として残らず  $\mathbf{x}$  のみが残る．即ち，

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \rho_e(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x}) \quad (25)$$

である．これを “Maxwell の方程式” の第一式(18)と比べれば， $X(\mathbf{x}) = 0$  であることになる．「自然界(宇宙)の始まり」の時刻を  $t=0$  とした時に， $\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, 0) - \rho_e(\mathbf{x}, 0) = 0$  であれば，以後の任意の時刻  $t$  で常に(18)が成立する．従って，第一式(18)は初期条件を表すだけである．

同様にして，(21)についても両辺の発散を取ると，

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$$

であり，左辺第一項は恒等的に 0 であるから， $\partial [\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] / \partial t = 0$  となる．これを時間で積分して

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = Y(\mathbf{x}) \quad (26)$$

となる． (19)と比べれば $Y(\mathbf{x})=0$ である．「自然界(宇宙)の始まり」の時刻を $t=0$ とした時に， $\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x},0)=0$ であれば，以後の任意の時刻 $t$ で常に(19)が成立する．  
 ので， (18)と同様に(19)も初期条件を表すだけである．

このように，四つの“Maxwell の方程式”のうち，(18)と(19)は $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ の時間発展に直接関わらない初期条件の意味しかない． $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  を未知パラメーターとすると成分で 12 の未知数となるが， (22)と(23)を加えて，方程式の数を成分で 6 だけ増やすと考えると，方程式の数は成分で 14 となる．しかし，方程式の数は実質 2 減ずるので 12 となり，未知パラメーター数 12 と等しい．未知パラメーターを  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}$ ，又は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}$  とした場合でも，“Maxwell の方程式”の方程式数は成分で考えて 6 であり，未知数の 6 と一致している．

以上の議論では，電荷保存則  $\text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \partial \rho_e(\mathbf{x},t)/\partial t = 0$  を用いた．従って，(18)~(21) の“Maxwell の方程式”，誘電率と透磁率に関する(22)と(23)，と同等に電荷保存則も，電磁気学の基本則に加えておく必要がある．

#### 4) 電磁場における点電荷系の運動方程式

19 世紀末からの数年の間に、X 線、放射線、放射性元素、電子の発見と重大な発見が相次いだ。物理学は電子、原子、放射線と物質のミクロな部分を研究対象とするようになる。そして、「全ての物質は原子からなり、原子の中心には重い正イオンがありその周りに電子が存在する」との理解に到達した。現在では、この考え方は古典論的電子論とか古典論的原子論と呼ばれている。オランダの Lorentz, H. A. (1853-1928) がその推進者であった。この古典論的電子論から、Lorentz は強い磁場におけるスペクトル線の分裂も予言し、1895 年、Zeeman, P. (1865~1943) がこれを実験的に確認した (Zeeman 効果)。物質世界に実在するのは電荷と電磁場であり、その基本法則は、電磁場に対する Maxwell 方程式と、点電荷に作用するローレンツ力と万有引力で記述される Newton の運動方程式であるとする古典論物理学の立場である。

$\delta$  関数で点電荷を考えた場合、Maxwell 方程式 (18) ~ (21) は、

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (29)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (30)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (31)$$

$e_i$  は点電荷  $i$  の電荷、 $\mathbf{z}_i(t)$  は点電荷  $i$  の時間  $t$  における位置ベクトルを表す。また、真空中の電荷を考えるから、(22) と (23) は誘電率と透磁率は真空の値を使う。

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (32)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (33)$$

(28)と(30)の右辺は、それぞれ、電荷分布と電流に相当する。

一方、電荷  $i$  の質量を  $m_i$  とすると、この電荷に対する Newton の運動方程式は、ローレンツ力と他の電荷との間の万有引力を考慮して、

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{z}_i(t)}{dt^2} = e_i \mathbf{E}(\mathbf{z}_i(t), t) + e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{z}_i(t), t) - \sum_{j \neq i}^N G \frac{m_i m_j (\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))}{|\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)|^3} \quad (34)$$

となる。  $G$  は万有引力定数である。 (34)の右辺のローレンツ力の中には、電荷  $i$  の自己力、即ち、その電荷がつくる電磁場による力がその電荷に作用すること、も含まれている。電磁場の下で点電荷系として物質系を考え、適当な初期条件と境界条件のもとで、Maxwell 方程式と Newton の運動方程式を連立させて解を求めるこの考え方は、現在でもプラズマ物理学での基本的考え方である。しかし、このような古典論的な立場では、原子中に電子が安定に存在すること説明できない。また、電子や  $\alpha$  粒子が原子核から放出される放射壊変についても (34)は説明できない。原子や原子核における荷電粒子の挙動は量子論で取り扱う他ない。しかしながら、原子や原子核に束縛されない荷電粒子の真空中における挙動が(34)で説明できることは、実験事実として確認されている。従って、(34)は電磁場のエネルギーと運動量を考察する際に重要である。 § 15 で静電場の Maxwell 応力を考えた際に、その最後の節 (§ 15-9) で、『連続体での運動量保存則 (一般的な運動方程式)、

$$\frac{D}{Dt} \left[ \int_{B(t)} (\rho \mathbf{v}) dV \right] = \int_B \rho \mathbf{K} dV + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS \quad (\S 15-14)$$

に対応するものはまだ提示されていない』と述べた。(34)は一般的化された運動

方程式ではないが、荷電粒子の運動方程式であることは間違いない。§ 15 では、ローレンツ力も Maxwell 方程式もまだ議論に使えない段階であったので、上記のような記述となった。ローレンツ力と万有引力を考える Newton の運動方程式と Maxwell 方程式との連立させたものが、荷電粒子の古典論的運動方程式である。このことを念頭に、以下で電磁場のエネルギーと運動量を考えよう。

## 5) 電磁場のエネルギーとポインティング・ベクトル $\mathbf{S}$

真空中の静電場は § 14-1 で見たように、真空中での電束密度  $\mathbf{D}$  と電場  $\mathbf{E}$  の関係、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，を用いると (§ 14-11-1)，

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) dV \quad (35)$$

であり、静電場は空間にエネルギーを蓄えることが出来る。電磁場のエネルギーにも、この静電場のエネルギーが含まれているはずである。更に、§ 19 で議論したように静電場  $\mathbf{E}$  と静磁場  $\mathbf{H}$  の表現式は類似性が著しいので、静磁場に対して類似の式

$$U' = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{H}^2(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV \quad (36)$$

を期待するのは自然であろう。「真空の透磁率  $\mu_0$ 」は、

$$\mu_0 = 2\pi k = 4\pi \times 10^{-7} (N/A^2) \quad (\S 18-4)$$

である。§ 18 で述べたように磁場  $\mathbf{H}$  の次元は  $[A/m]$ であるので、

$$[\mu_0 H^2] = \left[ \frac{N}{A^2} \cdot \frac{A^2}{m^2} \right] = \left[ \frac{N \cdot m}{m^3} \right] = \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

単位体積当たりのエネルギーであり、(36)の  $U'$  は確かに磁場のエネルギーである。これらのことを念頭に、まずは、真空場を前提に、Maxwell 方程式(18)~(23)

に基づき電磁場のエネルギーを考え、(34)からの荷電粒子を含む系の考察は後に行う。

(20)の両辺と  $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$  との内積、(21)の両辺と  $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$  との内積、を作る。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot [\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}] = \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) \quad (37)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) \cdot [\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}] = 0 \quad (38)$$

となる。そして [(37)-(38)] をつくと (以後しばらくは変数  $(\mathbf{x},t)$  を省略する),

$$-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (39)$$

となる。左辺の第一、第二項については、(22), (23)の關係を用いて、

$$-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}] \quad (40)$$

この括弧内は(35)とこれから予想した(36)に対応することが判る。(39)左辺の第三、第四項については、ベクトル解析の次の公式 (§ 4) を使う。

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \quad (41)$$

従って、(39)は、

$$-\frac{\partial}{\partial t} [\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}] - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (39')$$

となる。発散項を移行して、体積  $V$  について積分すると、

$$-\frac{d}{dt} \int_V [\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}] dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dV + \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \quad (42)$$

である。ここで、空間体積  $V$  における電場と磁場のエネルギーの和を

$$U_{e.m.} \equiv \int_V [\frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t)] dV \quad (43)$$

と定義しておく。これは静電場と静磁場のエネルギーを一般化した結果であり、

電磁場のエネルギーである。(42)右辺の第二項は発散定理から面積分に出来るので、(42)は結局以下のように表現できる。

$$-\frac{dU_{e.m.}}{dt} = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) dV + \int_S [\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{x},t)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) dS \quad (44)$$

この左辺は単位時間内の電磁場のエネルギーの減少量である。一方、右辺第一項は、電流密度は  $\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  で、単位時間内に単位面積を通過する電荷であるから、 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot (\Delta \mathbf{s} / \Delta t)$  である。空間  $V$  の単位体積内の電荷に対して電場  $\mathbf{E}$  が行う単位時間内の仕事である。ローレンツ力は電荷の運動方向に常に垂直であるから、磁場が電荷に対してなす仕事は常に 0 である。故に、この項は電磁場が空間  $V$  の電荷に行う仕事、即ち、電荷が電磁場から受け取るエネルギーである。右辺第二項は閉曲面の内部から外部へこの閉局面を通過して流失する電磁エネルギーと考えねばならない。

このように (44)は、単位時間内の電磁場のエネルギーの減少量が、単位時間内に電荷に受け渡されるエネルギーと単位時間内に面  $S$  を通過して外部に持ち出される電磁場のエネルギーの和であることを示している。右辺第二項の面積積分の中に表れたベクトル、

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \quad (45)$$

は、ポインティング・ベクトルと呼ばれる。1884 年に(44)を導いた Poynting, J. (1852~1914)に因む。ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$  は、図 22-2 に示すように、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{H}$  の両方を含む面に垂直な方向に向かう大きさ  $S = E \cdot H \cdot \sin\theta$  のベクトルであり、単位時間内にこの面の単位面積当たり流失する電磁場のエネルギーを表す。

ポインテング・ベクトル  $\mathbf{S}$  を用いて, (44)は

$$-\frac{dU_{e.m.}}{dt} = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) dV + \int_S \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) dS \quad (46)$$

となる.

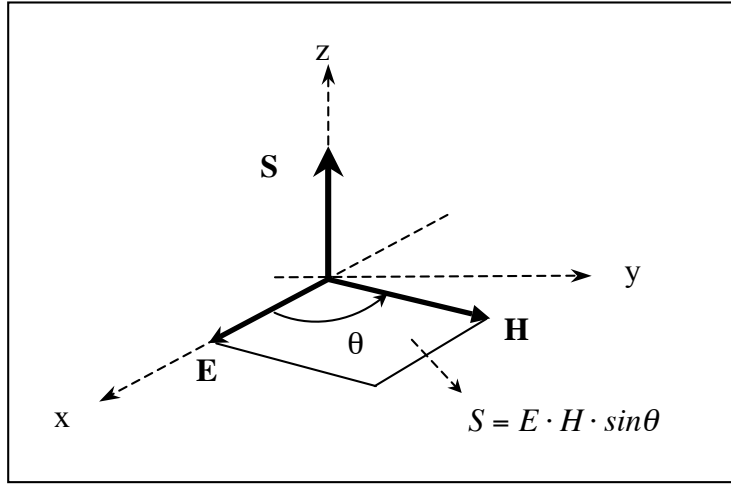


図 22-2. ポインテング・ベクトル  $\mathbf{S}$  は, 電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{H}$  の両方に垂直な方向に向かう大きさ  $S = E \cdot H \cdot \sin\theta$  のベクトル. 単位時間内に単位体積から流失する電磁場のエネルギー.

(44), (46) を微分形の式に直すには, 電磁場のエネルギー(43)  $U_{e.m.} = \int_V u_{e.m.} dV$

を, 単位体積当たりの電磁場のエネルギー  $u_{e.m.}(\mathbf{x},t)$

$$u_{e.m.}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t)] \quad (47)$$

で考えれば良い. 一方, ポインテング・ベクトル  $\mathbf{S}$  についての発散定理は,

$$\int_S \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) dS = \int_V \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t) dV$$

であるから, (46)は

$$\begin{aligned} -\int_V \frac{\partial u_{e.m.}}{\partial t} dV &= \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) dV + \int_V \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t) dV \\ \int_V \left\{ \frac{\partial u_{e.m.}}{\partial t} + \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \right\} dV &= 0 \end{aligned}$$



となる．単位体積当たりの電磁場のエネルギー  $u_{e.m.}(\mathbf{x},t)$  に対する微分形表現として，

$$\frac{\partial u_{e.m.}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) \quad (48)$$

を得る．(46)に対応するように移行して書き直せば，

$$-\frac{\partial u_{e.m.}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \quad (49)$$

である．§ 2 で述べたように電場  $\mathbf{E}$  の次元は[力/電荷] = [N/C]である．一方，§ 18 で述べたように磁場  $\mathbf{H}$  の次元は [A/m]である．ポインテング・ベクトル  $\mathbf{S}$  の次元は，

$$[N/C] \cdot [A/m] = \left[ \frac{N \cdot A}{C \cdot m} \right] = \left[ \frac{N \cdot C}{C \cdot m \cdot s} \right] = \left[ \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot s} \right] = \left[ \frac{J}{m^2 \cdot s} \right] \quad (50)$$

であり，単位時間当たり，単位面積当たりを通過する電磁場のエネルギーである．しかし， $\text{div } \mathbf{S}(\mathbf{x},t)$  の次元は  $\left[ \frac{J}{m^3 \cdot s} \right]$  となるので，単位時間当たり，単位体積から流出する電磁場のエネルギーとなる．

## 6) 電磁場における荷電粒子系のエネルギー保存則

電荷  $i$  の質量を  $m_i$ , 電荷量を  $e_i$  として, (34)では, 電荷に対する Newton の運動方程式を, ローレンツ力と他の電荷との間の万有引力から,

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{z}_i(t)}{dt^2} = e_i \mathbf{E}(\mathbf{z}_i(t), t) + e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{z}_i(t), t) - \sum_{j \neq i}^N G \frac{m_i m_j (\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))}{|\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)|^3} \quad (34)$$

とした. 一方, Maxwell 方程式は点電荷分布で表現した(28)~(33)を用いて, 電磁場における点電荷系のエネルギーを考える. 点電荷分布が関係する Maxwell 方程式は,

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (28)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (30)$$

の二つで,  $\delta$  関数に置き換えられている. 他の Maxwell 方程式の表現は変わらない.  $\delta$  関数は, 電荷  $e_i$  が空間領域  $V$  の中にあるとすれば,

$$e_i \int_V \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) d^3x = e_i, \quad e_i \int_V \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) d^3x = e_i \mathbf{A}(\mathbf{z}_i(t)) \quad (51)$$

である. また, 万有引力のポテンシャルを

$$V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j|} \quad (52)$$

とすると,

$$\text{grad}_i V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) = G \frac{m_i m_j (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j|^3} \quad (53)$$

である. ただし,  $\text{grad}_i V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)$  はベクトル  $\mathbf{z}_i$  の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分による空間微分を意味する.

$$\text{grad}_i V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) = \frac{\partial V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}{\partial(z_i)_x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}{\partial(z_i)_y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial V(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}{\partial(z_i)_z} \cdot \mathbf{k} \quad (54)$$

そこで, (51), (53)を使うと, (34)は次のように表現できる,

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \mathbf{z}_i(t)}{dt^2} &= \int_V e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d^3x \\ &\quad + \int_V e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d^3x \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \end{aligned} \quad (55)$$

この両辺と電荷  $i$  の速度ベクトル  $\mathbf{v}_i(t) = \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt}$  との内積を取り, 全ての電荷につ

いての和を作ると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} &= \int_V \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{v}_i(t) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} d^3x \\ &\quad + \int_V \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{v}_i(t) \cdot (\mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \right] \right\} d^3x \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \cdot \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \end{aligned} \quad (56)$$

となる. 右辺の第二項は, 電荷の速度  $\mathbf{v}_i$  と電荷が磁場から受けるローレンツ力  $(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$  が直交し,  $\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = 0$  であるので消える. 右辺の第三項は次のように書き換えることが出来る.

$$- \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \cdot \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^N \text{grad}_i \left\{ \sum_{i \neq j} V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \right\} \cdot \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \quad (57)$$

ここで,  $N$  個の荷電粒子からなる系全体の万有引力ポテンシャルは, 異なる荷電粒子対のポテンシャルの和であるから,

$$V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) = \sum_{l>}^N \sum_k^N V(\mathbf{z}_k(t) - \mathbf{z}_l(t)) \quad (58)$$

と書ける (§ 14-1 での荷電粒子系静電エネルギーの議論を参照のこと). これを

使うと, (54)から

$$\begin{aligned} \text{grad}_i \left\{ \sum_{i \neq j} (\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \right\} &= \text{grad}_i \left\{ \sum_{l>}^N \sum_k^N V(\mathbf{z}_k(t) - \mathbf{z}_l(t)) \right\} \\ &= \text{grad}_i \{ V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \} \end{aligned} \quad (59)$$

が成立する.  $i$  番目の粒子が無関係である対ポテンシャル  $V(\mathbf{z}_k(t) - \mathbf{z}_l(t))$  は,  $\text{grad}_i$

をとることで 0 となるからである. 故に,

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) \cdot \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} &= - \sum_{i=1}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \cdot \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \end{aligned} \quad (60)$$

最後の等式は, スカラー関数  $\phi(x, y, z)$  の全微分は  $\text{grad } \phi$  と変位の内積であること,

即ち,  $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = (\text{grad } \phi) \cdot (dx, dy, dz)$  であることを使っている.

以上の結果から, (56)は, 右辺の第三項を左辺に移して,

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} + \frac{d}{dt} V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) = \int_V \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{v}_i(t) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} d^3x \quad (61)$$

と表現できる. この左辺側は,

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \right] \quad (62)$$

であり, (61)の左辺は, 荷電粒子系の全運動エネルギーと全万有引力のポテンシャルエネルギーの単位時間当たりの変化量を表している. 一方, (61)の右辺は, (34)右辺の第一, 第二項の電荷に対するローレンツ力に対応している. 磁場による仕事が 0 であることから, 電荷に対する電場  $\mathbf{E}$  の仕事だけが残ったものである. 前節で述べた電荷が電磁場から得たエネルギーである. だから, (61)は荷電粒子系の全エネルギーの単位時間当たりの増分は, 電荷系が電磁場から得たエネルギーであることを述べている.

電荷系が単位時間内に電磁場から得たエネルギーは，(30)の

$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t))$  を使うと，次のように表現できる．

$$\int_V \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{v}_i(t) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} d^3x = \int_V \left\{ \left[ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} d^3x \quad (63)$$

この右辺の被積分項は，(41)の  $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$  を使うと，

$$(\text{rot } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

また，

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right),$$

であるから，

$$\left[ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right)$$

さらに，ファラデーの電磁誘導の法則， $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，を使って．

$$\begin{aligned} \left[ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

従って，(61)は，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \right] \\ = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV - \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \end{aligned}$$

右辺の第一項を移行して，両辺に $-1$ を掛けると，

$$-\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) + \int_V \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV \right] = \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV$$

右辺は、発散定理により、面積分に変わるから、(61)は結局以下の等式となる。

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) + \int_V \left[ \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] dV \right\} \\
 = \int_S (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS
 \end{aligned} \tag{64}$$

この左辺の括弧内は、荷電粒子系全体の運動エネルギーと万有引力ポテンシャルの総和 ( $U_M$ ) :

$$U_M = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$$

に電磁場のエネルギー ( $U_{e.m.}$ ) :

$$U_{e.m.} = \int_V \left[ \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] dV \tag{64-1}$$

を加えたものである。この電磁場のエネルギー ( $U_{e.m.}$ ) を単位体積当たりのエネルギー密度に直せば、

$$u_{e.m.} = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \tag{64-2}$$

となる。従って、(64)全体は

$$-\frac{d}{dt}(U_M + U_{e.m.}) = \int_S \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \tag{65}$$

となる。荷電粒子系全体のエネルギーと電磁場のエネルギーの単位時間当たりの減少量は、ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}$  によって境界面を通して系外に持ち出される電磁場のエネルギーに等しいことを表している。

前節で見たように、ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  は、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{H}$  の両方を含む面に垂直な方向に向かう大きさ  $S = E \cdot H \cdot \sin\theta$  のベクトルであり、単位時間内に単位体積から流失する電磁場のエネルギーを表す。前節では、電磁エネルギーの単位時間あたりの減少は、

$$-\frac{dU_{e.m.}}{dt} = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) dV + \int_S \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) dS \quad (46)$$

であった．(65)と(46)を比べると，

$$\frac{d}{dt}(U_M) = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x},t) dV$$

となるが，これは(61)のことである．

何も存在しないように見える電磁場にも，常に，「ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}$  のエネルギーの流れ」が存在する．(65)は，電磁場における荷電粒子系全体に関するエネルギー保存則であるが，右辺が 0 ではなく，「電磁場のエネルギーの流れ」の面積分であることに注意が必要である．

## 7) 電磁場における荷電粒子系の運動量保存則

前節で示したように(34)の運動方程式は(55)により次のように表現できる．

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{d^2 \mathbf{z}_i(t)}{dt^2} = & \int_V e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d^3x \\
 & + \int_V e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d^3x \\
 & - \sum_{i \neq j} \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))
 \end{aligned} \tag{55}$$

この運動方程式により，系の運動量を考える．この左辺は，

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{z}_i(t)}{dt^2} = m_i \frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i(t)$$

であるから，(55)の荷電粒子  $i$  に関する総和をとると，

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \right] = & \int_V \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d^3x \\
 & + \int_V \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d^3x \\
 & - \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))
 \end{aligned} \tag{66}$$

ここで，右辺の第三項は0である．(53)に従い，万有引力について作用・反作用の法則が成立するからである．具体的には

$$\text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = -\text{grad}_j V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))$$

が一般的に成立することによる．この両辺で以下の  $i, j$  に関する和を取ると，

$$\sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = - \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_j V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))$$

である．この右辺で  $i, j$  に関する和の順序を入れ替えて，さらに，ポテンシャルは距離だけで決まるから， $V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = V(\mathbf{z}_j(t) - \mathbf{z}_i(t))$  であるので，



$$= -\sum_j^N \sum_{j \neq i}^N \text{grad}_j V(\mathbf{z}_j(t) - \mathbf{z}_i(t)) = -\sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))$$

最後の等式では、記号としての  $i, j$  を全て入れ替えている。このようにして、

$$\sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = -\sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t))$$

であり、これは

$$2 \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \text{grad}_i V(\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_j(t)) = 0$$

意味する。

従って、(66)は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \right] &= \int_V \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d^3x \\ &\quad + \int_V \left[ \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d^3x \end{aligned}$$

となる。一方、

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (28)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N e_i \frac{d\mathbf{z}_i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i(t)) \quad (30)$$

を使うと、(66)は

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \right] = \int_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \left[ \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right\} d^3x \quad (67)$$

となる。右辺の括弧内について考える。これは

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \left[ \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \\ = \mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} + (\text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (68)$$

となる。そこで、一般に

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

が成立するが，電磁誘導の法則， $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，を代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}$$

となる．これより，

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}$$

である．これを(68)の右辺に代入する．

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} + (\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} \\ = \mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{B} \times (\text{rot } \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \\ = \mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{B} \times (\text{rot } \mathbf{H}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

(67)に戻すと，

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \right] = \int_V \{ \mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{B} \times (\text{rot } \mathbf{H}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \} d^3 x \quad (69)$$

が得られる．ここで，

$$\mathbf{G}_M(t) \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \quad (70-1)$$

$$\mathbf{G}_{e.m.}(t) = \int_V \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3 x = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d^3 x \quad (70-2)$$

と定義すると，(69)は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{G}_M(t) + \mathbf{G}_{e.m.}(t)] \\ = \int_V \{ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \times (\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \} d^3 x \\ + \int_V \{ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \times (\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) \} d^3 x \end{aligned} \quad (71)$$

となる．ただし，磁束密度  $\mathbf{B}$  に関する Maxwell 方程式， $\text{div}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ，を用いて，右辺に  $\mathbf{H} \text{div}\mathbf{B} = \mathbf{0}$  を加えた．これを加えることで  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  と  $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$  の形式的対称性が明示できる．この右辺の第一，二項は，真空場における

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

の関係を使うと，それぞれ， $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  あるいは， $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  で表現できる．(71)右辺の  $\int_V \{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \times (\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))\} d^3x$  の体積積分における

第一項， $\int_V \{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)\} d^3x$ ，が § 15 で議論した静電場の Maxwell 応力に対応している．静電場では  $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  であるから，第二項の体積積分は表れない．

§ 15 での議論を思い出して，体積積分の被積分関数

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \text{div}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \times (\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))\}$$

の  $x$  成分を調べてみよう．変数の  $(\mathbf{x}, t)$  はしばらく省略する．

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \text{div}\mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}]_x &= \varepsilon_0 [\mathbf{E} \text{div}\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}]_x \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_x \text{div}\mathbf{E} - [E_y \times (\text{rot } \mathbf{E})_z - E_z \times (\text{rot } \mathbf{E})_y] \\ &= \varepsilon_0 E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \varepsilon_0 E_y \cdot \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \varepsilon_0 E_z \cdot \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} E_x^2 - \frac{1}{2} E_y^2 - \frac{1}{2} E_z^2 \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} (E_x \cdot E_y) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (E_x \cdot E_z) \end{aligned} \quad (72)$$

$\text{div}$  の引数に相当する電場成分の関数がえられた．

(71)右辺のもう一つの体積積分の被積分関数

$$\{\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \times (\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))\}$$

についても， $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  の対称性から，(72)と同じ結果が得られる  $x$

成分は,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}]_x &= \mu_0 [\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}]_x \\
&= \mu_0 \mathbf{H}_x \operatorname{div} \mathbf{H} - [H_y \times (\operatorname{rot} \mathbf{H})_z - H_z \times (\operatorname{rot} \mathbf{H})_y] \\
&= \mu_0 H_x \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - \mu_0 H_y \cdot \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \mu_0 H_z \cdot \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
&= \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} H_x^2 - \frac{1}{2} H_y^2 - \frac{1}{2} H_z^2 \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} (H_x \cdot H_y) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial z} (H_x \cdot H_z) \quad (73)
\end{aligned}$$

div の引数部分の括弧内の項のみを取り出して, 静電場における Maxwell の応力テンソル § 15-(38)の形に直してみる. 一般化された電場についての Maxwell の応力テンソルは,

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & \epsilon_0 E_x \cdot E_y & \epsilon_0 E_x \cdot E_z \\ \epsilon_0 E_y \cdot E_x & \frac{\epsilon_0}{2} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & \epsilon_0 E_y \cdot E_z \\ \epsilon_0 E_z \cdot E_x & \epsilon_0 E_z \cdot E_y & \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{pmatrix} \quad (74)$$

となる. 形式的には, § 15-(38)と全く同じであるが, ここでの電場成分の変数は  $(\mathbf{x}, t)$  となっている点が, § 15-(38)の場合と異なっている. 磁場についての Maxwell の応力テンソルは, 磁場強度  $\mathbf{H}$  成分を用いて,

$$\mathbf{T}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{2} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) & \mu_0 H_x \cdot H_y & \mu_0 H_x \cdot H_z \\ \mu_0 H_y \cdot H_x & \frac{\mu_0}{2} (H_y^2 - H_z^2 - H_x^2) & \mu_0 H_y \cdot H_z \\ \mu_0 H_z \cdot H_x & \mu_0 H_z \cdot H_y & \frac{\mu_0}{2} (H_z^2 - H_x^2 - H_y^2) \end{pmatrix} \quad (75)$$

電場成分  $\mathbf{E}$  を用いた(74)に相似な式となる.

§ 15 でも議論したように, Maxwell の応力テンソルは, (71)の二つの体積積分の被積分関数を div を用いて表現した場合の引数である. 一般化された Maxwell

の応力テンソルは、(74)と(75)の和であるから、x 成分については、

$$[\mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot} \mathbf{E}]_x + [\mathbf{H} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{H}]_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(T_{xx}^{(e)} + T_{xx}^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial y}(T_{xy}^{(e)} + T_{xy}^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial z}(T_{xz}^{(e)} + T_{xz}^{(m)}) \quad (76)$$

である．y, z 成分についても同様は表現となる．一般化された Maxwell の応力テンソルの成分は

$$T_{ij} = T_{ij}^{(e)} + T_{ij}^{(m)} \quad (77)$$

である．形式的には、§ 15 で議論した Maxwell の応力テンソル成分  $T_{ij}$  を(77)で置き換えれば良い．従って、 $i=x, y, z$  として、力の成分  $\mathbf{F}_i$  と  $\mathbf{T}_i(\mathbf{n})$  に対応する応力テンソル  $\mathbf{T}$  の  $i$  行成分全体を一つのベクトル  $\mathbf{T}_i$  とすれば、発散定理を使って、

$$\mathbf{F}_i = \int_S \mathbf{T}_i(\mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{T}_i dV \quad (78)$$

が成立する．これは ( § 15-30) が成立したのと全く同じである．§ 15 の議論と違う点は、(71)の  $i$  成分を考えているので、(78)は(71)左辺の  $i$  成分に等置できることである．

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{G}_M(t) + \mathbf{G}_{e.m.}(t)]_i = \mathbf{F}_i \quad (79)$$

従って、 $i=x, y, z$  成分を一つにまとめて、次のように表現できる．

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{G}_M(t) + \mathbf{G}_{e.m.}(t)] = \mathbf{F} \quad (80)$$

これは、系の運動量の時間微分が“加速度”であり、これが“力”に等しいという Newton の運動方程式に対応している．そして、その“力としての  $\mathbf{F}$ ”は(74), (75), (77), (78)を通じて Maxwell テンソルで表現され、“近接力”の意味を

もつ。 Newton の運動方程式の一般的表現，即ち，**運動量の保存則**に対応している。(80)は「電磁場における荷電粒子系についての運動量保存則」である。粒子のみならず「電磁場」に対しても運動量が付随していることがわかる。単位時間当たりの荷電粒子と電磁場の運動量の増加量は，その単位時間内に系と外界との境界面を通して系に流入した運動量（系が獲得した運動量）に等しいことを表す。電磁場の運動量を

$$\mathbf{G}_{e.m.}(t) = \int_V \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3x = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d^3x \quad (70-2)$$

としたが，これを単位体積あたりに直せば，電磁場の運動量密度は，

$$\mathbf{g}_{e.m.}(t) = \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (70-3)$$

となる。前節(64-2)で見たよう，電磁場のエネルギー密度は

$$u_{e.m.} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (64-2)$$

であった。このように電磁場は，物体ではないが，固有のエネルギー密度と運動量密度をもつ実在であると考えねばならない。

## 8) 電磁場の Maxwell 応力テンソル：電気力線と磁力線

電場に関する一般的 Maxwell 応力テンソル(74)は、§ 15 でやったように、二つの(3x3)行列に分割できる。

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x E_x & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \\ \epsilon_0 E_y E_x & \epsilon_0 E_y E_y & \epsilon_0 E_y E_z \\ \epsilon_0 E_z E_x & \epsilon_0 E_z E_y & \epsilon_0 E_z E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \end{pmatrix} \quad (81)$$

第二の行列は対角行列で、成分の値は、真空電場の単位体積当たりのエネルギー  $-u^{(e)} = (\epsilon_0/2)E^2 = (1/2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$  に負符号を付けたものである。  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  であるから、  
 $D_i = \epsilon_0 E_i \quad (i = x, y, z)$  であることも使ってみれば、

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{pmatrix} E_x D_x & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & u^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & u^{(e)} \end{pmatrix} \quad (82)$$

となる。

磁場についての一般的 Maxwell 応力テンソル(75)についても全く同様にして、

$$\mathbf{T}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_0 H_x H_x & \mu_0 H_x H_y & \mu_0 H_x H_z \\ \mu_0 H_y H_x & \mu_0 H_y H_y & \mu_0 H_y H_z \\ \mu_0 H_z H_x & \mu_0 H_z H_y & \mu_0 H_z H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0}{2} H^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{2} H^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{2} H^2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

真空磁場では、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  であり、またの単位体積当たりの磁場エネルギーは、

$u^{(m)} = (\mu_0/2)H^2 = (1/2)\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$  と表現できるから、

$$\mathbf{T}^{(m)} = \begin{pmatrix} H_x B_x & H_x B_y & H_x B_z \\ H_y B_x & H_y B_y & H_y B_z \\ H_z B_x & H_z B_y & H_z B_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(m)} & 0 & 0 \\ 0 & u^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & u^{(m)} \end{pmatrix} \quad (84)$$

である。

(77)より，一般化された電磁場の Maxwell 応力テンソルの成分  $T_{ij}$  は

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ij}^{(e)} + T_{ij}^{(m)} = E_i D_j + H_i B_j - (u^{(e)} + u^{(m)}) \delta_{ij} \\ &= E_i D_j + H_i B_j - u \delta_{ij} \end{aligned} \quad (85)$$

となる．最後の  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタで， $\delta_{ij} = 1 (i = j)$ ， $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$  を表す．

$u$  は電磁場の単位体積当たりのエネルギーで，

$$u = u^{(e)} + u^{(m)} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (86)$$

である．

単位法線ベクトルが  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  である表面力（応力ベクトル） $\mathbf{T}(\mathbf{n})$  の第一成分（x 成分）は， $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = D_n$ ， $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B_n$  の表記を用いて，以下のようになる．

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{n}) &= \sum_{j=1}^3 T_{1j} \cdot n_j = E_x(D_x \cdot n_x + D_y \cdot n_y + D_z \cdot n_z) \\ &\quad + H_x(B_x \cdot n_x + B_y \cdot n_y + B_z \cdot n_z) - u \cdot n_x \\ &= E_x \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} + H_x \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} - u \cdot n_x = D_n E_x + B_n H_x - u \cdot n_x \end{aligned}$$

同様にして， $\mathbf{T}(\mathbf{n})$  の第二成分（y 成分），第三成分（z 成分）は，

$$T_2(\mathbf{n}) = D_n E_y + B_n H_y - u \cdot n_y, \quad T_3(\mathbf{n}) = D_n E_z + B_n H_z - u \cdot n_z$$

となる．従って，表面力（応力ベクトル） $\mathbf{T}(\mathbf{n})$  は次のように表現できる．

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{n}) &= \begin{pmatrix} T_1(\mathbf{n}) \\ T_2(\mathbf{n}) \\ T_3(\mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_n E_x + B_n H_x - u \cdot n_x \\ D_n E_y + B_n H_y - u \cdot n_y \\ D_n E_z + B_n H_z - u \cdot n_z \end{pmatrix} \\ &= D_n \cdot \mathbf{E} + B_n \cdot \mathbf{H} - u \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H} - u \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (87)$$

この右辺は，単位法線ベクトルが  $\mathbf{n}$  である面に作用する表面力（応力ベクトル）

$\mathbf{T}(\mathbf{n})$  と電磁場  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  との関係を与える． $\mathbf{E}$  の係数である  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = D_n$  はスカラ



一で、その面の単位面積当たりを貫く電気力線の本数を表す。同様にして、 $\mathbf{H}$  の係数である  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B_n$  はスカラーであり、その面の単位面積当たりを貫く磁力線の本数を表す。 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = D_n$  については、§ 15 の図 15-10 を用いて詳しく議論したので、ここでは繰り返さない。 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B_n$  についても、図 15-10 に準拠して考えれば良い。

§ 15 で議論した真空の静電場の単位体積当たりのエネルギー

$$u = (\epsilon_0/2)E^2 = (1/2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = (1/2)DE$$

は、ここでは、磁場のエネルギーが加わり、

$$u = u^{(e)} + u^{(m)} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (86)$$

となり、電磁場の単位体積当たりのエネルギーに変わる。これは、前節で

$$u_{e.m.} = \frac{1}{2}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (64-2)$$

と表現した内容と同じである。考え方は静電場の場合と全く同じで、電気力線の他に磁力線を考えれば良い。図 15-11. では、今井<sup>22, 26, 27)</sup>による電気力線の「気体中の糸」モデルは、磁力線についても同様に有効である。

電磁場は、固有のエネルギー密度：

$$u = u_{e.m.} = u^{(e)} + u^{(m)} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (86)$$

固有の運動量密度：

$$\mathbf{g}_{e.m.}(t) = \epsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (70-3)$$

を持つ。さらに、電磁場は「流出するエネルギーの流れ＝ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}(= \mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 」を伴っている。伝導電流が存在しない電磁場においては、ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}$  が単位時間当たりのエネルギー密度の減少量となる（エ

エネルギー保存則). 一方, 電磁場の運動量保存則にも, 流入する電磁運動量 [運動量の流れ] が関与しており, **Maxwell** の応力テンソルと面の法線ベクトルのマトリックス積がその単位面積を通過して単位時間内に流入する運動量の流れを表現している. これは単位時間内での荷電粒子のエネルギー密度増加と電磁場のエネルギー密度の増加の和に等しい.