

## § 2 4 電磁波

Maxwell 方程式から真空中を伝播する電磁波の波動方程式が得られる. その伝播速度が光速  $c$  である. この波動方程式の解について考える.

### 1) Maxwell 方程式と真空中の電磁波

§ 22-3 に示した Maxwell の方程式は,

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

の四つの式であり, これに次の二式が付随する.

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

真空中の電磁場を考える場合は, 真空中の電荷密度は 0 であるから,

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, t) = 0$$

また, 真空中では電流は考える必要は無いので,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = 0$$

となる. (5), (6)の誘電率と透磁率も真空の誘電率と透磁率  $\varepsilon_0, \mu_0$  に変わる. 従

って, 真空中の電磁場を考える際の Maxwell の方程式は以下のようなになる.

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

最後の二式を用いて、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  だけの式に直すと、

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (14)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

ここで、(15)の  $\operatorname{rot}$  を取って、

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\} = 0 \quad (17)$$

となるが、第一項には  $\operatorname{rot}$  に関する次の恒等式、

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を使い、更に(14)の条件を使う。そして、第二項には(16)を使うと、(15)は

$$-\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0$$

となり、結局、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

となる。

(16)の  $\operatorname{rot}$  を取って  $\mathbf{E}$  について同じことを繰り返すと、

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\
-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{19}
\end{aligned}$$

となる。即ち、磁場と電場について次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{19}$$

これは、波動方程式であり、次節で説明するように、右辺の空間微分側の係数は波動の伝播速度の二乗を意味している。故に、電磁波の真空中の伝播速度を  $u$  とすると、

$$u^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} = c^2 \tag{20-1}$$

であり、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 (m/s) \tag{20-2}$$

伝播速度が真空中の光速  $c$  である。波動方程式とその解については次節で詳述する。

Maxwell は 1861 年に、Weber と Kohlrausch(1856)が実験的に決定した  $c_w$  値が彼の電磁波の伝播速度  $c$  と、 $c_w = \sqrt{2} \cdot c$  の関係にあることに気づいた。計算される伝播速度  $c$  は  $3.11 \times 10^8 \text{m/sec}$  となり、Fizeau が 1849 年に大気中で測定した光速度  $(3.153 \pm 0.005) \times 10^8 \text{m/sec}$  に非常に近いことを指摘した<sup>3)</sup>。そして、電磁波が実在することは、1888 年に Hertz により確認された。近接力の考え方が Newton 以

来の遠隔力説にとどめを刺すことになる。ただし、留意すべきは、現代の「真空」の考え方と、19世紀末での「真空」の考え方が違うことである。当時の理解では、「真空とはエーテルと言う媒体で満たされている」との考え方が受け入れられていた。この問題は § 27 で議論しよう。

既に § 22-3 で述べたように、“Maxwell の方程式” と呼ばれるものは、実際は、Maxwell 自身の表現(1865)を、ヘヴィサイド(1885)とヘルツ(1890)が再整理した結果であり、本来は”Maxwell-Heaviside-Hertz の方程式” と呼ぶべきとの意見がある<sup>3)</sup> ことも記しておいた。この“Maxwell の方程式” から真空中の電磁場の波動方程式を導くことは、上記のように、極めてスムーズに進む。その理由の一つはベクトル・ポテンシャルを表に出さない形で導出できるからである。あたかも、「真空中の電磁場の波動方程式を導くように“Maxwell の方程式” が与えられている」とも言えそうである。スカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを用いて、「電磁ポテンシャル」を定義し、この「電磁ポテンシャル」により“Maxwell の方程式” を書き換えて議論することは、 § 25 で行う。

## 2) 波動方程式とその解

### 1. 波動方程式

一次元の波動方程式は、一般に、

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (21)$$

である。  $\psi(x,t)$  は、電磁場の場合は、次節で議論するように電場、磁場の強さの特定方向の成分、水面を伝わる波なら  $\psi(x,t)$  は基準水面からの水面の垂直変位、音波なら密度変化量、などとなる。一般には、何らかの状態変化を指定する物理量を表す。  $u$  はその物理量が空間を伝播する速度である。(21)では、空間座標は  $x$  のみの一次元であるから、  $\psi(x,t)$  はその位置  $x$  での時間  $t$  におけるスカラーの物理量である。伝播速度  $u$  も(21)では一次元の伝播速度となるので、スカラーである。

スカラーの物理量、例えば、媒体の密度、電場の  $x$  成分など、が 3 次元空間を伝播するような場合の波動方程式は、  $\mathbf{r}=(x,y,z)$  を位置ベクトルとして、

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \mathbf{u}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} \right\} \quad (22)$$

となる。これは、

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \mathbf{u}^2 \Delta \psi(\mathbf{r},t) \quad \text{又は} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathbf{u}^2 \Delta \right) \psi(\mathbf{r},t) = 0 \quad (22-1)$$

と表現できる。ラプラス演算子  $\Delta$  はナブラ演算子を用いて  $\nabla^2$  であるから、(22-1)で  $\Delta$  を  $\nabla^2$  に置き換えても良い。伝播速度  $\mathbf{u}$  は、  $u^2 \rightarrow \mathbf{u}^2$  とベクトルとなる。しかし、等方的な媒体伝播速度であるなら、スカラー  $u$  のままでも良い。ここでの  $\psi(\mathbf{r},t)$  は空間位置  $\mathbf{r}=(x,y,z)$  で時間  $t$  でのスカラーの物理量であるから、(22)の解はスカラー波と呼べる。

一方、波動の物理量がスカラーではなく、電場  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  や磁場  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  のようにベクトル量で、そのようなベクトル物理量が3次元空間を伝播する場合の波動方程式はどのようなであろうか？ (22) のスカラー物理量  $\psi(\mathbf{r}, t)$  をベクトル量  $\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\psi_x(\mathbf{r}, t), \psi_y(\mathbf{r}, t), \psi_z(\mathbf{r}, t)]$  に変更したものになる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{u}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right\} \quad (23)$$

従って、

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{u}^2 \Delta \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad \text{又は} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathbf{u}^2 \Delta \right) \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (23-1)$$

である。前節で得た電磁場 ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) の波動方程式がこれに当る。しかし、(23), (23-1) を  $x$ ,  $y$ ,  $z$  の成分毎に考えれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= u_x^2 \Delta \psi_x(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2 \psi_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= u_y^2 \Delta \psi_y(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2 \psi_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= u_z^2 \Delta \psi_z(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (23-2)$$

となるので、ベクトル量の波動であっても、(22), (22-1) でのスカラー波  $\psi(\mathbf{r}, t)$  を各成分に当てはめて考えることと同じである。従って、(21) と (22) の波動方程式の解を考えれば良いことになる。真空中の電磁場の場合は、どのような方向でも伝播速度は  $c$  で等しいので、 $u_x = u_y = u_z = c$  である。

## 2. 一次元の波動方程式の解

一次元の波動方程式(21)の一般解を考えよう。この方程式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) = 0 \quad (24)$$

と演算子部分を因数分解できるので、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t) = 0, \quad (25)$$

となり、それぞれの解は、 $f, g$  を任意の関数として、

$$\psi(x,t) = f(t - x/u), \quad \psi(x,t) = g(t + x/u) \quad (26)$$

を考えることが出来る。(26)が(25), (21)を満たすことは次のように確認できる。

$\theta = t - x/u$  として、 $f(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{df}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{df}{d\theta} = f', & -u\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -u\frac{df}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = -u\frac{df}{d\theta} \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) = f', \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{df}{d\theta}\right) = f'', & u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= u\frac{\partial}{\partial x} \left(u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = u\frac{\partial}{\partial x} (-f') = -u\frac{df'}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = f'', \end{aligned}$$

同様にして、 $\theta = t + x/u$  として、 $\psi = g(\theta)$ を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{dg}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{dg}{d\theta} = g', & u\frac{\partial\psi}{\partial x} &= u\frac{dg}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = u\frac{dg}{d\theta} \cdot \frac{1}{u} = g', \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{dg}{d\theta}\right) = g'', & u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= u\frac{\partial}{\partial x} \left(u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = u\frac{\partial g'}{\partial x} = u\frac{dg'}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = g'', \end{aligned}$$

このようにして、一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (21)$$

の一般解は、(26)の一次結合である。

$$\psi(x,t) = f(t - x/u) + g(t + x/u) \quad (27)$$

一次結合の定数は、関数が任意であるので、その中に含めて考える。関数は任意であるが、その変数  $(x, t)$  の間の関係が決まる。

この変数間の関係を、 $\psi(x,t) = f(t - x/u)$  で見てみよう。時間  $t$  と  $(t + \Delta t)$  で  $\psi$  の値を比べてみる。

$$\psi(x, t + \Delta t) = f(t + \Delta t - x/u) = f\left(t - \frac{[x - u\Delta t]}{u}\right) \quad (28)$$

これは、 $\psi(x, t) = f(t - x/u)$ における  $x$  を  $[x - u\Delta t]$ に置き換えた関数である。時間変数  $t$  をパラメーターと考えて、 $\psi(x, t)$  を  $x$  に対してプロットした時(図 24-1)、 $\psi(x, t + \Delta t)$  は  $\psi(x, t)$  を  $x$  の正方向にだけ移動させたものである。  $u\Delta t$  は時間  $\Delta t$  の間での、波動の  $x$  方向への移動距離である。従って、 $\psi(x, t) = f(t - x/u)$  は  $x$  方向に伝播速度  $u$  で移動する進行波を表す。

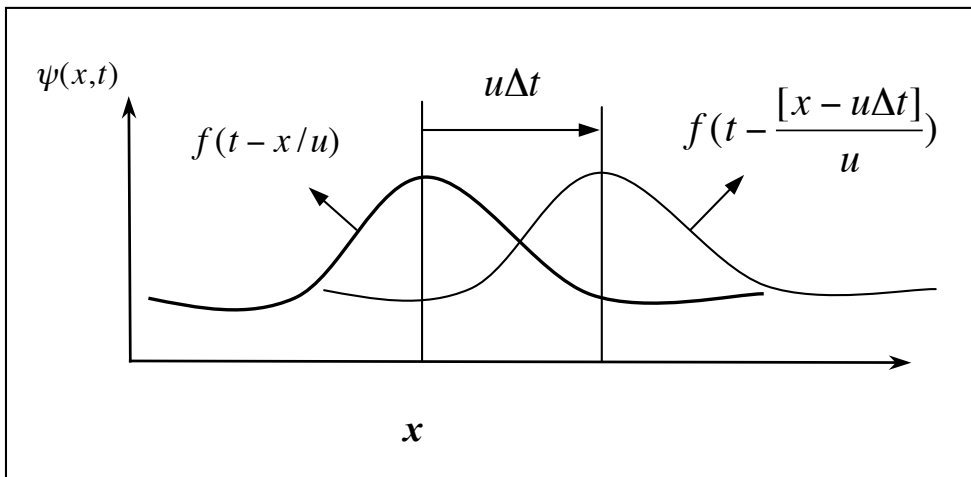


図 24-1.  $\psi(x, t) = f(t - x/u)$  は伝播速度  $u$  で  $x$  方向に移動する進行波である。

$g(t + x/u)$  についても、

$$\psi(x, t + \Delta t) = g\left(t + \frac{[x + u\Delta t]}{u}\right)$$

となるから、 $g(t + x/u)$  は、伝播速度  $u$  で  $x$  の負方向に移動する波動であるので、後退波と呼び、伝播速度  $u$  で  $x$  の正方向に移動する進行波  $f(t - x/u)$  と区別する。一次元の波動方程式の一般解は進行波と後退波の和である。  $f$ 、 $g$  の具体的な関数形（波形関数）は波の作られ方（波動の励起）に依る。波形関数は、図 24-



1のような孤立した一つの“山”が進行波  $f(t-x/u)$  である場合でも良いし、どのような連続関数でも良い。しかし、次のような余弦関数の進行波を考えておくと以後の議論に便利である。

$$\psi(x,t) = a \cos[\omega(t-x/u) + \phi] \quad (29)$$

$a$  は振幅定数である。  $\omega$  は角周波数である。余弦関数の引数値である  $[\omega(t-x/u) + \phi]$  は位相と呼ばれる。  $\phi$  は  $t=0, x=0$  とした時に決まる位相であるから、初期位相と呼ばれる。

(29)の周期関数の変数は  $t$  と  $x$  であるので、波動は時間的にも空間的にも周期性を示す。時間の周期性から、次の条件を満たす時間間隔の定数  $T$  が存在する。

$$\psi(x,t) = \psi(x,t+T) \quad (30)$$

(29)を用いて

$$\cos[\omega(t-x/u) + \phi] = \cos[\omega(t+T-x/u) + \phi] \quad (31)$$

である。これより、  $\omega T = 2\pi$  であり、  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$  となる。  $T$  は同じ状態が繰り返される最小時間間隔、すなわち周期である。円周角  $2\pi$  ラジアンを周期  $T$  で割った  $\omega$  は角周波数である。振動数は  $\nu = 1/T$  で周期の逆数で、時間の逆数の次元を持つ。

空間の周期性の条件から、波動の空間的繰り返しの最小間隔の定数、波長 ( $\lambda$ ) が得られる。

$$\psi(x,t) = \psi(x+\lambda,t) \quad (32)$$

(29)を用いて、

$$\cos[\omega(t-x/u) + \phi] = \cos\{\omega[t-(x+\lambda)/u] + \phi\} \quad (33)$$

である。この条件は  $\omega\lambda/u = 2\pi$  である。故に、波長は

$$\lambda = 2\pi \cdot u/\omega = u \cdot T = u/\nu \quad (34)$$

である。即ち、伝播速度、波長、振動数、波長の関係は、

$$u = \lambda/T = \lambda\nu \quad (35)$$

である。光の場合は、光速度  $c$  として、 $c = \lambda\nu$  である。

<注意>  $x$  方向に伝播速度  $u$  で進む波動  $f(t - x/u)$ ,  $\cos[\omega(t - x/u) + \phi]$  を考えた場合、 $f(x/u - t)$ ,  $\cos[\omega(x/u - t) + \phi]$  も波動方程式を満足し、 $x$  方向に  $u$  で伝播する進行波である。波動方程式に代入し、位相速度を求めれば判る。

$$\cos[\omega(t - x/u) + \phi] = \cos\{-[\omega(x/u - t) - \phi]\} = \cos[\omega(x/u - t) - \phi]$$

であるから、 $\cos[\omega(x/u - t) - \phi]$  でも良い。ここでは  $\cos[\omega(t - x/u) + \phi]$  の方を使っている。しかし、両者は初期位相の符号を反対にしないと同一ではないことに注意。もし、 $\cos[\omega(x/u - t) + \phi]$  を採用すると、これに等しいのは  $\cos[\omega(t - x/u) - \phi]$  である。どちらを採用するかは、教科書の著者によって異なっている。この点については後に再度述べる。

### 3. 三次元の波動方程式の解

3次元空間を伝播するスカラー量  $\psi(\mathbf{r}, t)$  の波動方程式は、上述のように  $\mathbf{r}=(x, y, z)$  を位置ベクトルとして、

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = u^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right\} \quad (22)$$

である。ここでは等方的は伝播速度  $u$  を仮定している。具体的な三次元均質媒体の波動として重要なのは、平面波と球面波である。点源で作られる波動がその点源から均質な媒体を3次元方向に伝播する時、波面は球面となる。これが

球面波である．一方，その点源から発した球面波が，十分に遠い位置に届く時，その波動は平面的な進行波で近似でき，進行方向に垂直な平面で同じ波形になると考えることが出来る．電磁波の場合について § 26 で詳しく議論する．

### <3.1 球面波の解>

水たまりの一点に小石を落とすと，そこを波源にして周囲に円形波の波紋が周囲に伝わる．これを 3 次元的にして，点源が座標原点にある場合の球面波から考えよう（図 24-2）．波動関数  $\psi(r,t)$  は原点からの距離  $r$ ，

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{(1/2)} \quad (36)$$

と時間  $t$  の関数である．球対称とするから，位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は距離  $r$  に置き換わる．

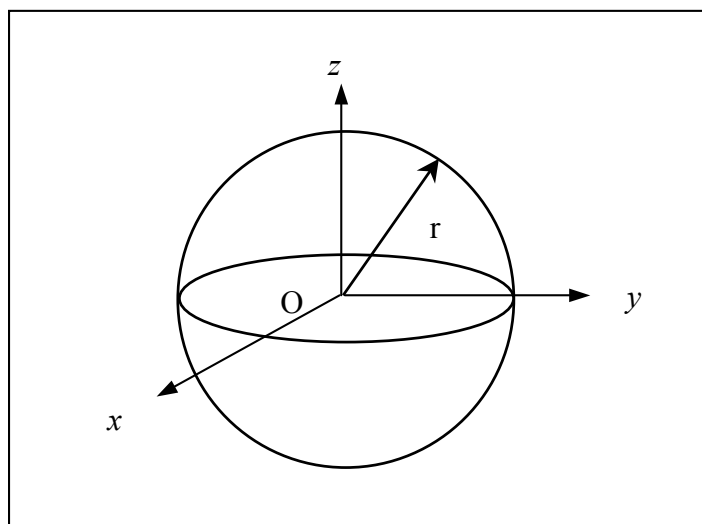


図 24-2. 波源が座標原点にある場合の球面波の波面．

$\psi(r,t)$  について， $x$ ， $y$ ， $z$ ，に関する 2 階の偏微分を求め，(22)の波動方程式に代入する．

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} \right) = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot x \cdot \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cdot x^2 / r^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot x \cdot (-r^{-2}) \cdot \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

故に,  $x, y, z$  に関する 2 階の偏微分は,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{z^2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

これらを加えて,

$$\frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \cdot \psi)}{\partial r^2} \quad (37)$$

(22)の波動方程式は,

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \{r \cdot \psi(r,t)\}}{\partial r^2} \quad (38)$$

となる. これを書き換えて,

$$\frac{\partial^2 \{r \cdot \psi(r,t)\}}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \{r \cdot \psi(r,t)\}}{\partial r^2} \quad (39)$$

が得られる. これは(21)の一次元の波動方程式と同形であるので, その一般解である(27)の  $\psi(x,t) = f(t - x/u) + g(t + x/u)$  を利用できる. (39)の進行波と後退波の解は

$$r \cdot \psi(r,t) = f(t - r/u), \quad r \cdot \psi(r,t) = g(t + r/u)$$

であるから, 球面波の進行波と後退波の一般解は,

$$\psi(r,t) = (1/r) \cdot f(t - r/u), \quad \psi(r,t) = (1/r) \cdot g(t + r/u) \quad (40)$$

である。第一式は座標原点から外側へ発散する進行波で、振幅は距離に反比例して減少する。第二式は、外側から座標原点へ収束する後退波で、振幅は距離に反比例して増大する。

### <3.2 平面波の解：伝播速度が x 軸方向である場合>

一様な 3 次元空間媒質中を、特定の方向の伝播するスカラーの平面波を考える。u は伝播速度ベクトルを意味し、(22)の解でなければならない。

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{u}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right\} \quad (22)$$

もし、伝播方向が x 軸方向に一致している進行波の平面波なら、その解は、

$$\psi(x, t) = a \cos[\omega(t - x/u) + \phi] \quad (29)$$

又は

$$\psi(x, t) = a \cos[\omega(x/u - t) - \phi] \quad (29')$$

で表現できる。

ある時刻 t に、ある平面上の点が、全て等しい  $[\omega(t - x/u) + \phi]$  の値、即ち、位相、を持っているなら、その平面上では物理量  $\psi(x, t)$  は全て等しく、同一の状態となっている。このような平面を等位相面又は波面と呼ぶ。伝播方向が x 軸方向に一致している(29)の場合は、 $x = \text{const.}$  で指定される x 軸に垂直な平面 (y-z 面) が等位相面である。(29)での等位相面の条件は、

$$\omega(t - x/u) + \phi = \text{const.} \quad (41)$$

であるから、 $x = ut - (u/\omega)(\text{const} - \phi)$  である。しかし、 $\omega, \phi, u$  は定数なので、

$$x = u \cdot t + \text{const.} \quad (23)$$

が等位相面の条件である。これは、 $u$  が等位相面の移動速度、即ち、位相速度であることを表している。

(29) の  $\psi(x,t) = a\cos[\omega(t - x/u) + \phi]$  は、振動数と位相速度を使えば、 $\omega = 2\pi\nu$  であるから、

$$\psi(x,t) = a\cos[2\pi\nu(t - x/u) + \phi]$$

波長と位相速度を使えば、 $\omega = (2\pi/\lambda)u$  であるから、

$$\psi(x,t) = a\cos[(2\pi/\lambda)(ut - x) + \phi] \quad \text{となる。} \quad (42)$$

(42)で  $\phi = 0$  として、 $\psi(x,t=0) = a\cos[(2\pi/\lambda)(-x)]$  と  $\psi(x,t) = a\cos[(2\pi/\lambda)(ut - x)]$  の二つの波形を、 $t$  を変数ではなくパラメーターと考えて、図に描くと図 24-3 のようになる。 $\psi(x,t) = a\cos[(2\pi/\lambda)(ut - x)]$  は、

$$\psi(x,t) = a\cos\{(2\pi/\lambda)[-(x - ut)]\}$$

であるから、 $\psi(x,t=0) = a\cos[(2\pi/\lambda)(-x)]$  を  $x$  の正方向に  $ut$  だけ平行移動した

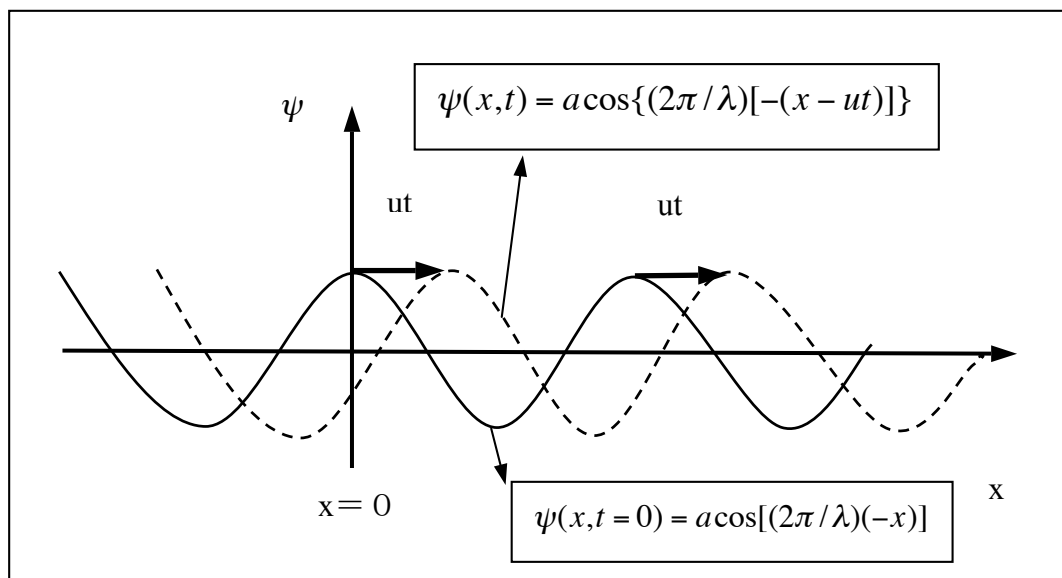


図 24-3. 三次元空間で  $x$  方向に位相速度  $u$  で進む平面波。この波動の等位相面は、進行方向  $x$  に垂直な  $y-z$  面にある。

ものであり，元々の  $x$  に  $(x-ut)$  を代入した式である．  $\psi(x,t) = a \cos[(2\pi/\lambda)(ut - x)]$  は，  $x$  方向に位相速度  $u$  で進む平面波だからである．

### 3.3 平面波の解：伝播速度が任意の方向の場合

特定の軸方向ではなく，一般の方向（ $x'$  軸方向）に伝播する単色平面波を図 24-4 を参照して考える．

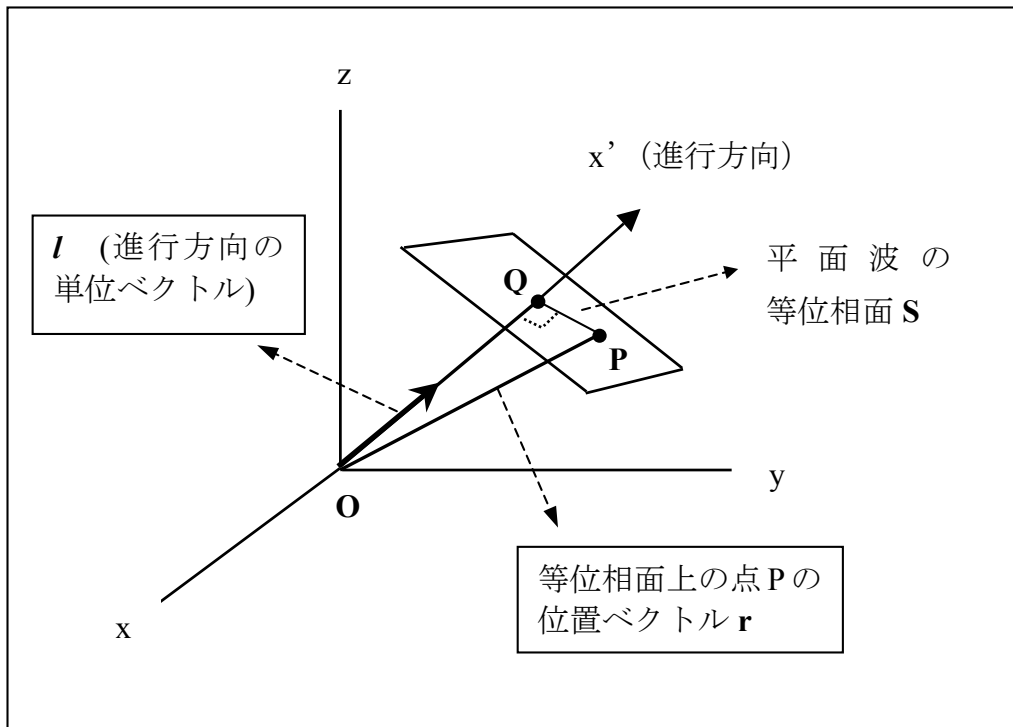


図 24-4. 一般の方向  $x'$  に進む平面波とその等位相面．

$x'$  軸は(29)の  $x$  軸と同等であるので， $x$  を  $x'$  に置き換えて考えれば良い．

$$\psi(x', t) = a \cos[\omega\{t - (x'/u)\} + \phi] \quad (43)$$

$x'$  の値は，伝播方向に沿った ( $O \rightarrow Q$ ) の距離であり，これに垂直な等位相面 ( $S$ ) 上の点は全て同一の値を与えることになる．点  $P$  は等位相面 ( $S$ ) の点を代表している． $O \rightarrow P$  の  $O \rightarrow Q$  -  $x'$  軸への正射影が  $O \rightarrow Q$  であるから，これは，進行方向の単位ベクトル ( $l$ ) と点  $P$  の位置ベクトルとの内積である．従って

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega\{t - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})/u\} + \phi] \quad (44)$$

と表現できる． $\omega \cdot t$  はそのままにして， $\{\omega(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})/u\}$  は，先ほどの  $\lambda = 2\pi \cdot u/\omega$  か



ら、 $\omega/u = 2\pi/\lambda$  となるので、この関係式を使って書き換えると、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})\omega/u + \phi] = a \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})(2\pi/\lambda) + \phi] \quad (45)$$

となる。ここで、

$$(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})(2\pi/\lambda) = ((2\pi/\lambda)\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (46)$$

と書く、即ち、進行方向を表す単位ベクトル  $\mathbf{l}$  を波長  $\lambda$  で割り、 $2\pi$  倍したものを波数ベクトル、

$$\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\mathbf{l} \quad (47)$$

と定義する。その結果、(45)は、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi] \quad (48)$$

となる。

進行方向を表す単位ベクトル  $\mathbf{l}$  の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分は、進行方向と  $x$  軸がなす角度  $\alpha$  の余弦、 $y$  軸となす角度  $\beta$  の余弦、 $z$  軸となす角度  $\gamma$  の余弦である。即ち、進行方向の方向余弦である。

$$\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の大きさは、 $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda = \omega/u$  で、その向きは波動の伝播方向である。波動方程式に現れるのは  $u^2$  であるから、

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 u^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) u^2$$

と表現する。 $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  は、座標原点  $O$  と等位相面との距離 ( $O \rightarrow Q$ ) に、何個の波が収まっているかを表す数を  $2\pi$  倍したものである。波の数を表すので波数ベクトルと呼ぶ。

(48)は、複素数の表現 ( $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$ ) に直して利用されることが多い。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cdot e^{i[\omega t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi]} = a \cdot \exp\{i[\omega t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi]\}$$

となる。しかし、初期位相に関する項を複素数の振幅  $A = ae^{i\phi}$  として組み込めば、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = A \cdot \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \quad (49)$$

となり、簡素な平面波の波動公式が得られる。複素数の表現を用いた場合は、(49)の実数部部分  $\text{Re}\{\psi(\mathbf{r}, t)\}$  が波動の実際の物理量に対応すると解釈する。

複素数振幅  $A = ae^{i\phi}$  の共役複素数を  $A^*$  とすると、 $A^* = ae^{-i\phi}$  である。 $\psi(\mathbf{r}, t)$  の共役複素数を  $\psi^*(\mathbf{r}, t)$  とすると、 $\psi^*(\mathbf{r}, t) = A^* \cdot \exp\{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$  となる。これを使うと、波動の実数部分を  $\text{Re}\{\psi(\mathbf{r}, t)\}$ 、純虚数部分を  $\text{Im}\{\psi(\mathbf{r}, t)\}$  とすると、

$$\text{Re}\{\psi(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2}[\psi(\mathbf{r}, t) + \psi^*(\mathbf{r}, t)]$$

$$\text{Im}\{\psi(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2i}[\psi(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)]$$

である。また、

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi(\mathbf{r}, t) \cdot \psi^*(\mathbf{r}, t)$$

である。これらは電磁場の問題として § 26-5)-2 でも再度議論する。

(48) または (49) の  $\psi(\mathbf{r}, t)$  は、スカラーであるから、波動の物理量がベクトル量である場合は、 $\psi(\mathbf{r}, t)$  はその物理量の個々の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分値に対応している。ベクトル量の  $x$  成分なら、(48) と (49) の  $\psi(\mathbf{r}, t)$  は

$$\psi_x(\mathbf{r}, t) = a_x \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi] \quad (50)$$

$$\psi_x(\mathbf{r}, t) = A_x e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = A_x \cdot \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \quad (51)$$

と表記する。ベクトル量としての波動の物理量は  $(\psi_x(\mathbf{r}, t), \psi_y(\mathbf{r}, t), \psi_z(\mathbf{r}, t))$  となる。以上の点に留意して、次節では平面波としての電磁波について考えよう。

その前に、＜注意＞として述べた点について再度コメントする。ここでは  $\mathbf{r}$

の位置で  $\mathbf{k}$  の方向に進む平面波を

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi] \quad (48)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = A \cdot \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \quad (49)$$

と表現している。複素振幅は  $A = a e^{i\phi}$  で、 $a$  は実数である。〈注意〉で述べたように、(48)は

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = a \cos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega \cdot t - \phi]$$

でも良い。これを用いると、複素数の波動公式は、

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}, t) &= a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi)} = a e^{-i\phi} \cdot \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \\ &= A^* \cdot \exp\{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \end{aligned}$$

となる。 $\psi'(\mathbf{r}, t)$  は(49)の  $\psi(\mathbf{r}, t)$  の複素共役であり、 $\psi^*(\mathbf{r}, t)$  のことである。現実の波動の中身は  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r}, t)]$  であると考えているので、 $\text{Re}[\psi(\mathbf{r}, t)] = \text{Re}[\psi^*(\mathbf{r}, t)]$  であり、複素共役の  $\psi^*(\mathbf{r}, t)$  も解である。また、 $[\psi^*(\mathbf{r}, t)]^* = \psi(\mathbf{r}, t)$  である。だから、一方が解なら他方も解である。

波動公式は  $\mathbf{k}$  の方向に進む平面波を表すから、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  に負符号が付かない方を選択することも多い。その場合、通常は初期位相にも正符号を付けて、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega \cdot t + \phi] \quad (48')$$

とするので、複素数の波動公式は

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (49')$$

となる。

ここでは実数定数とした波数ベクトルの大きさ、 $\omega$  も、一般には、複素数として考えることができる。これらの問題については、例えば今井<sup>26)</sup>などを参照されたい。

### 3) 電磁波の平面波解

電磁波の波動方程式は,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (53)$$

であった。(48)の  $\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi]$  を用いて, 電場  $\mathbf{E}$  から考えると, 平面波の解としての電場  $\mathbf{E}$  は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=x,y,z} \mathbf{e}^{(i)} \cdot (E_0)_i \cos[\omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \phi] \quad (54)$$

となる. 位置ベクトルは,  $x, y, z$  の直交座標系で表現するので,  $\mathbf{x}$  を用いる. 電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  はベクトルであるから,  $\mathbf{e}^{(x)}, \mathbf{e}^{(y)}, \mathbf{e}^{(z)}$  は  $x, y, z$  方向の単位ベクトルを表す. 各成分の振幅は  $(E_0)_x, (E_0)_y, (E_0)_z$  で, (48)の振幅定数  $a$  に相当する. (48)を採用したので,

$$\theta \equiv \omega \cdot t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \phi \quad (55)$$

で位相は成分で等しい. 故に, (54)の平面波解は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{e}^{(x)} \cdot (E_0)_x + \mathbf{e}^{(y)} \cdot (E_0)_y + \mathbf{e}^{(z)} \cdot (E_0)_z\} \cos \theta \quad (56)$$

と表現できる. これを真空電磁場の Maxwell 方程式(13)の  $\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$  に代入してみると,

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= (E_0)_x \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + (E_0)_y \frac{\partial}{\partial y} \cos \theta + (E_0)_z \frac{\partial}{\partial z} \cos \theta \\ &= (E_0)_x \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (E_0)_y \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + (E_0)_z \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ &= -\{(E_0)_x \cdot k_x + (E_0)_y \cdot k_y + (E_0)_z \cdot k_z\} \cdot \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

である。これが恒等的に成立するためには

$$(E_0)_x k_x + (E_0)_y k_y + (E_0)_z k_z = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (58)$$

である。平面波の進行方向を表す波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{E}_0$  は直交している。従って、(58)から、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  は直交し、電場ベクトルは  $\mathbf{k}$  に垂直な平面内にある。即ち、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  は横波であることが判る。同じ議論は  $\mathbf{H}$  についても成立するので、 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  も横波である。

問題は、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  の成分と位相の関係がどのようになっているかである。これを考える為に、(56) の rot を取ると、

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{e}^{(x)} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{e}^{(y)} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{e}^{(z)} \\ &= [\sin\theta(E_0)_z k_y - \sin\theta(E_0)_y k_z] \cdot \mathbf{e}^{(x)} \\ &\quad + [\sin\theta(E_0)_x k_z - \sin\theta(E_0)_z k_x] \cdot \mathbf{e}^{(y)} \\ &\quad + [\sin\theta(E_0)_y k_x - \sin\theta(E_0)_x k_y] \cdot \mathbf{e}^{(z)} \end{aligned} \quad (59)$$

この結果を真空電磁場の Maxwell 方程式(16)の  $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$  に代入すると磁場ベクトルが得られるので、これを考える。

以下では、問題を簡単にする為に、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を  $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$  と x 方向に進む平面波を考える。(59)は

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\sin\theta(E_0)_z k_x \cdot \mathbf{e}^{(y)} + \sin\theta(E_0)_y k_x \cdot \mathbf{e}^{(z)} \quad (60)$$

と簡単になる。 $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$  と x 方向に進む平面波に限定したことから、 $k_x$  のみが残っている。また、 $\mathbf{E}$  が横波であることから  $(E_0)_x = 0$  で  $(E_0)_y$ 、 $(E_0)_z$  のみが残っている。電場ベクトル  $\mathbf{E}$  自体は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}^{(y)} \cdot (E_0)_y \cos\theta + \mathbf{e}^{(z)} \cdot (E_0)_z \cos\theta \quad (61)$$

となっている. (61)を Maxwell 方程式(16)に代入すると,

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E} = \sin \theta (E_0)_z k_x \cdot \mathbf{e}^{(y)} - \sin \theta (E_0)_y k_x \cdot \mathbf{e}^{(z)} \quad (62)$$

である. 成分で考えて,

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= (\sin \theta) (E_0)_z k_x \\ \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -(\sin \theta) (E_0)_y k_x \end{aligned}$$

となるから, これらを時間で積分して,

$$\begin{aligned} \mu_0 H_y &= (E_0)_z k_x \int \sin \theta dt = (E_0)_z k_x \int \sin \theta \left( \frac{1}{\omega} \right) d\theta = -\frac{1}{\omega} (E_0)_z k_x \cos \theta \\ \mu_0 H_z &= -(E_0)_y k_x \int \sin \theta dt = -(E_0)_y k_x \int \sin \theta \left( \frac{1}{\omega} \right) d\theta = \frac{1}{\omega} (E_0)_y k_x \cos \theta \end{aligned}$$

即ち, 磁場  $\mathbf{H}$  の成分は,

$$\begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= -\frac{1}{\omega \mu_0} (E_0)_z k_x \cos \theta \\ H_z &= \frac{1}{\omega \mu_0} (E_0)_y k_x \cos \theta \end{aligned} \quad (63)$$

一方, (61)から, 電場  $\mathbf{E}$  の成分は,

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= (E_0)_y \cdot \cos \theta \\ E_z &= (E_0)_z \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (64)$$

これから, 電場と磁場の内積を作ると,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = -\frac{1}{\omega \mu_0} (E_0)_z (E_0)_y k_x \cos^2 \theta + \frac{1}{\omega \mu_0} (E_0)_z (E_0)_y k_x \cos^2 \theta = 0 \quad (65)$$

となる. 電場と磁場は共に波動の進行方向 (x 方向) に垂直な y-z 面内にあり,

両者はこの面内で直交していることが判る.

(63)と(64)を比べると,  $E_y \leftrightarrow H_z$ ,  $E_z \leftrightarrow H_y$  の間に次の対応関係がある.

$$H_z = \frac{k_x}{\omega\mu_0} E_y = \frac{\omega/c}{\omega\mu_0} E_y = \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\mu_0} E_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_y \quad (66)$$

$$H_y = -\frac{k_x}{\omega\mu_0} E_z = -\frac{\omega/c}{\omega\mu_0} E_z = -\frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\mu_0} E_z = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_z \quad (67)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}^{(y)} \cdot (E_0)_y \cos\theta + \mathbf{e}^{(z)} \cdot (E_0)_z \cos\theta$  (61)ではあるが, (66)は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}^{(y)} \cdot (\mathbf{E}_0)_y \cos[\omega \cdot t - (k_x \cdot x) + \phi] = \mathbf{e}^{(y)} \cdot (\mathbf{E}_0)_y \cos\theta \quad (68)$$

と, 電場が  $y$  成分しか持たない場合に相当する. この場合, (66)から判るように, 磁場は  $z$  成分のみとなる. 図 24-4 は, この電場と磁場が一体となって伝播するこの状況を示す. 電磁場の進行方向, 電場  $\mathbf{E}$  の振動方向, 磁場  $\mathbf{H}$  の振動方向の三つは, 右手系の  $x, y, z$  方向にそれぞれ対応している.

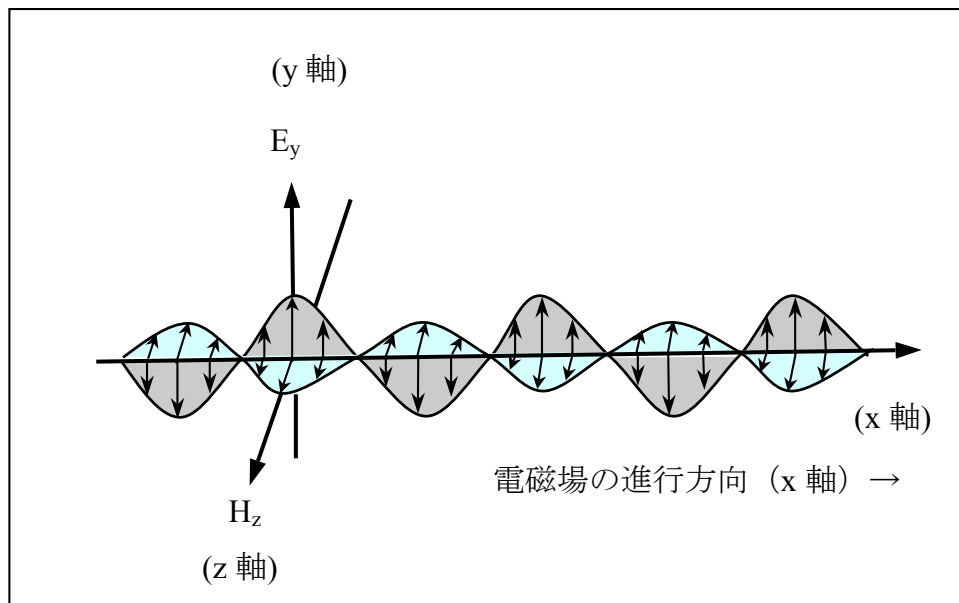


図 24-4. 電場が  $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}^{(y)} \cdot (\mathbf{E}_0)_y \cos\theta$  であるとき, 磁場は  $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}^{(z)} \cdot \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \cdot (E_0)_y \cdot \cos\theta$  である. ただし,  $\theta = \omega \cdot t - (k_x \cdot x) + \phi$ .

電磁場の進行方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_k$  (この場合は  $x$  軸方向) とすると,

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H}, \quad Z_0 = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (68')$$

$Z_0$ は電波インピーダンスと呼ばれる。

一方、(67)は、(61)で、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}^{(z)} \cdot (\mathbf{E}_0)_z \cos[\omega \cdot t - (k_x \cdot x) + \phi] = \mathbf{e}^{(z)} \cdot (\mathbf{E}_0)_z \cos \theta \quad (69)$$

と、電場は  $z$  成分のみとした場合で、この時、磁場は(67)のように  $y$  成分のみとなる。図 24-4 で、 $x$  軸の周りに  $y$  軸  $\rightarrow$   $z$  軸と  $90^\circ$  時計回りに回転すれば、 $z$  軸  $\rightarrow$   $-y$  軸となる。この状況が(67)の場合になる。

(66)と(67)は独立に成立するが、実際の電場と磁場ベクトル  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  は、 $y$ - $z$  面内にあり、相互に直交しているので、(66)と(67)を成分として合成した結果が電場と磁場ベクトル  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  である。電場  $\mathbf{E}$  で考えよう。電場  $\mathbf{E}$  の成分は、

$$E_x = 0, \quad E_y = (E_0)_y \cdot \cos \theta, \quad E_z = (E_0)_z \cdot \cos \theta \quad (61)$$

であるから、電場の  $y$  成分と  $z$  成分の関係は位相因子を消去して、

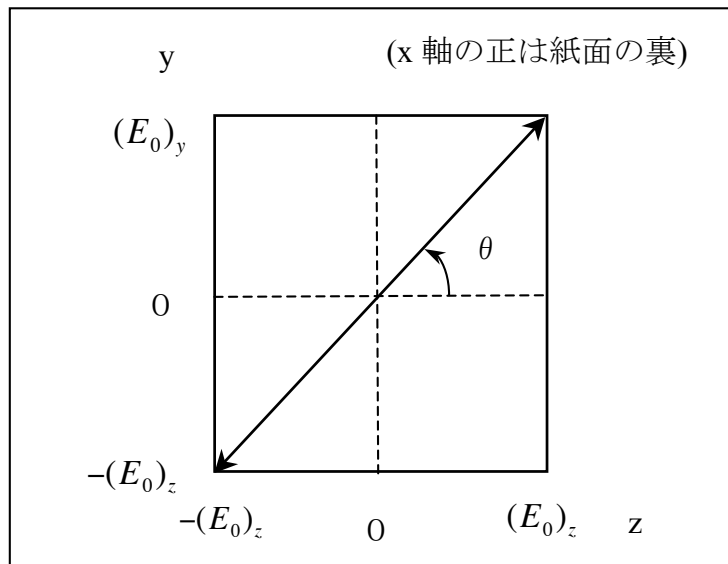


図 24-5. 電場ベクトルの偏り (直線偏光).  $\tan \theta = (E_0)_y / (E_0)_z$  の方向のみに電場ベクトルは振動する。



$$E_y = \frac{(E_0)_y}{(E_0)_z} E_z \quad (70)$$

となる。電場の振動方向は、y-z 面内で  $\tan\theta = (E_0)_y / (E_0)_z$  の特別な方向にある。このように、電磁波の進行方向に垂直な面内で、電場ベクトルの振動方向が特定方向に限られている場合を、**直線偏光**と言う（図 24-5）。振動面の偏り方向は、 $\tan\theta = (E_0)_y / (E_0)_z$  の振幅比だけで決まっている。図 24-5 のように、電場ベクトルの波面を y-z 面内にプロットすると、波面の軌跡は直線となり、時間が経過するに従い、その軌跡はこの直線上を移動する。進行方向の x 軸も含めて、3 次的に電場ベクトルの波面を考えると、波面は、図 24-5 の振動面の偏り方向と進行方向の x 軸のつくる平面内を単振動しながら x 方向に進む。その意味で、このような振動面の偏り状態を**平面偏光**とも呼ぶ。光の偏光については、次節で補足する。

## 4) 横波と縦波, 自然光と偏光

### 4.1 横波と縦波

真空中の電磁波 ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) は横波であり, (58) と (59) で述べたように

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

である. しかし, これらの回転は(60)から判るように0ではない. 一方, 固体を伝播する弾性波 (音波) には, 横波の他に, 進行方向に振動する縦波も存在する. 固体の密度  $\rho$ , 剛性率  $\mu$ , 体積弾性率  $\kappa$  とする時, 横波の伝播速度は  $V_s = \sqrt{\mu/\rho}$ , 縦波の伝播速度は  $V_p = \sqrt{[\kappa + (3/4)\mu]/\rho}$ , である.  $V_p/V_s \approx \sqrt{3} > 1$  となる<sup>36)</sup>. 従って, 地震波の縦波は先に到着し primary 波, 横波は縦波の後に届くので secondary 波と呼び, それぞれの伝播速度に P と S の添字を使う. 2007年10月から実用化された「緊急地震速報」は,  $V_p/V_s \approx \sqrt{3} > 1$  で振幅の小さな P 波が早く到着することに基づき, 振幅の大きな  $V_s$  の到着時間を予測している. 何れも一次元の波動方程式の解である. 一方, 液体では, 剛性率  $\mu = 0$  であり, ずり変形を元に戻す弾性的な力が作用しないので, 横波は存在しない. しかし, 進行方向の密度変化が縦波として伝播できる. 液体中を伝播する縦波の伝播速度は, 固体の  $V_p$  で剛性率を0とした  $u = \sqrt{\kappa/\rho}$  である.

固体や液体中を  $x$  方向に伝播する縦波を, 平面波解を用いて波動をベクトルで表せば,  $\vec{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z) = (\psi_x, 0, 0)$  であるので,

$$\operatorname{div}\vec{\psi} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \neq 0$$

である. しかし,  $\operatorname{rot}\vec{\psi}$  をつくと,

$$\operatorname{rot}\vec{\psi} = \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z}\right) \vec{j} + \left(-\frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right) \vec{k} = 0$$

$\psi_x \neq 0$ ではあるが、平面波であるから y-z 面は等位相面で、波動の物理量は y-z 面内で同一で勾配は 0 である。このように縦波波動の回転は 0 で、発散は 0 ではない。しかし、横波波動では、発散は 0 で回転は 0 ではない。丁度反対の状況になっている。

縦波と異なり、横波では進行方向に垂直な面内に振動方向がある。その面内には直交する二つの方向が考えられるので、横波では振動方向の偏りが問題となる。これは弾性波の横波でも、電磁波（光）でも同じである。図 24-5 は光の直線偏光を説明しているが、以下の節では、偏光現象についてももう少し一般的な立場から議論する。

#### 4.2 直線偏光，円偏光，楕円偏光

ある光源から発せられた単色平面波の電場  $\mathbf{E}$  は、(59)，(60)から、一般的に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (71-1)$$

$$\mathbf{E}_0 = (a_x \exp i\phi_x, a_y \exp i\phi_y, a_z \exp i\phi_z) \quad (71-2)$$

と表現できる。 $\mathbf{E}_0$ は複素振幅で位相も含めた振幅ベクトルで、これは光源での発光に規定される。今、問題を簡単にする為に、x 方向の平面進行波とすると、

$$E_x(x, y, z, t) = 0$$

$$E_y(x, y, z, t) = a_y \cdot \exp i\phi_y \cdot \exp i(\omega t - k \cdot x) \quad (72)$$

$$E_z(x, y, z, t) = a_z \cdot \exp i\phi_z \cdot \exp i(\omega t - k \cdot x)$$

$E_y$ と  $E_z$ には、振幅定数  $a_y$ と  $a_z$ と位相定数  $\phi_y$ と  $\phi_z$ の実数の四つのパラメーターが

含まれている。これらは光源での発光で決まる定数である。この場合、電場  $\mathbf{E}$  は  $E_y$  と  $E_z$  から合成されるので、電場  $\mathbf{E}$  の振動状態の偏り、即ち、光の偏光状態は、一般に、振幅定数  $a_y$  と  $a_z$  と位相定数  $\phi_y$  と  $\phi_z$  の四つのパラメーターで記述される。

自然光（太陽光）は、有限の面積上の多数の点光源がそれぞれ独立に光を放出した結果であるので、同一波長の光であっても、発せられる光の偏光状態はランダムである。これらの集まりである自然光は偏光していない。人工光源の場合も、類似の状況から、偏光単色光が直接得られる訳ではない。しかし、自然光や人工光源からの光を反射させたり、複屈折性をもつ透明鉱物（方解石など）や偏光板を透過させると、光は偏りを持つようになる。この理由は光学のテキスト<sup>14, 37)</sup>を参照してもらうことにして、ここでは、光の偏光状態が、 $a_y$ ,  $a_z$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$  の四つのパラメーターで記述されることのみを述べる。

(72)を実数で表現すれば、

$$E_y(x,y,z,t) = a_y \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_y), \quad E_z(x,y,z,t) = a_z \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_z)$$

であるが、初期位相の違いを次のように、 $z$  成分を基準にして表現する。

$$\phi_y = \phi_z + \phi \quad (73)$$

これを使うと、

$$E_y(x,y,z,t) = a_y \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_y) = a_y \cdot \cos(\tau + \phi) \quad (74-1)$$

$$E_z(x,y,z,t) = a_z \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_z) = a_z \cdot \cos(\tau) \quad (74-2)$$

$(\omega t - k \cdot x + \phi_z) = \tau$  として  $\tau$  を消去すれば、 $E_y$  と  $E_z$  の関係が求まり、偏光状態の記述ができる。 $\tau$  を消去した結果は

$$(E_y/a_y)^2 + (E_z/a_z)^2 - 2(E_y/a_y) \cdot (E_z/a_z) \cdot \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (75)$$

となる。これは  $E_y$  と  $E_z$  に関する二次式で  $0 \leq \sin^2 \phi \leq 1$  であるから、図 24-5 のような波面先端の軌跡を考えると、一般には、楕円となる。波面の先端はこの楕円上を移動する。即ち、楕円上を“回転”し、その“回転”の向きは2方向あることになる。図 24-5 のように、 $(E_z, E_y)$  の波面先端の軌跡を表す点と  $z$  軸のなす角度を  $\theta$  とすると、

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_z} = \frac{a_y \cos(\tau + \phi)}{a_z \cos(\tau)} \quad (76)$$

であるから、

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{a_y \cos(\tau + \phi)}{a_z \cos(\tau)} \right] \quad (76')$$

これを時間で微分すると、 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$  に注意して、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\omega \cdot a_y a_z \cdot \sin \phi}{(a_y \cos \tau)^2 + (a_z \cos(\tau + \phi))^2} \quad (77)$$

となる。故に楕円上の“回転”方向は  $\sin \phi$  の値の正・負によって決まる。

以上の(75), (76), (76'), (77)から、次のような偏光状態が区別できる。

(1) 一般的条件 ( $a_y, a_z, \phi_y, \phi_z$  の四つのパラメーターに特別の条件が無い) :

楕円上を、 $d\theta/dt$  が正又は負の方向に回転する偏光状態で、楕円偏光と呼ばれる。

(2)  $\phi=0$  で位相差がない場合 :

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_z}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

図 24-5 に示した直線偏光の状態に相当する。

(3)  $\phi=\pi$  の時 :

$$\tan \theta = -\frac{a_y}{a_z}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

この場合も直線偏光の状態であるが、振動方向は  $\phi=0$  の場合とは異なる。

(4)  $\phi = \pm \pi/2$  の時 :

$$E_y = a_y \cdot \cos(\tau + \phi) = \mp a_y \cdot \sin(\tau), \quad E_z = a_z \cdot \cos(\tau)$$

$$(E_y/a_y)^2 + (E_z/a_z)^2 = 1$$

と楕円は標準形となり、その主軸は y, z 軸に一致する。  $d\theta/dt \neq 0$  なので

“回転” の向きは二通りある。

(5)  $\phi = \pm \pi/2$  で  $a_y = a_z = a$  の時 :

$$E_y = a \cdot \cos(\tau + \phi) = \mp a \cdot \sin(\tau), \quad E_z = a \cdot \cos(\tau)$$

$$(E_y)^2 + (E_z)^2 = a^2, \quad \tan\theta = \frac{E_y}{E_z} = \mp \left( \frac{\sin\tau}{\cos\tau} \right) = \mp \tan(\tau), \quad \frac{d\theta}{dt} = \mp \omega$$

軌跡は円となる。  $d\theta/dt = \mp \omega$  なので、回転速度は同じであるが向きだけが異なる二つの偏光状態がある。円偏光と呼ばれる。右回りと左回りの円偏光の二つの状態を図 24-6 に示す。

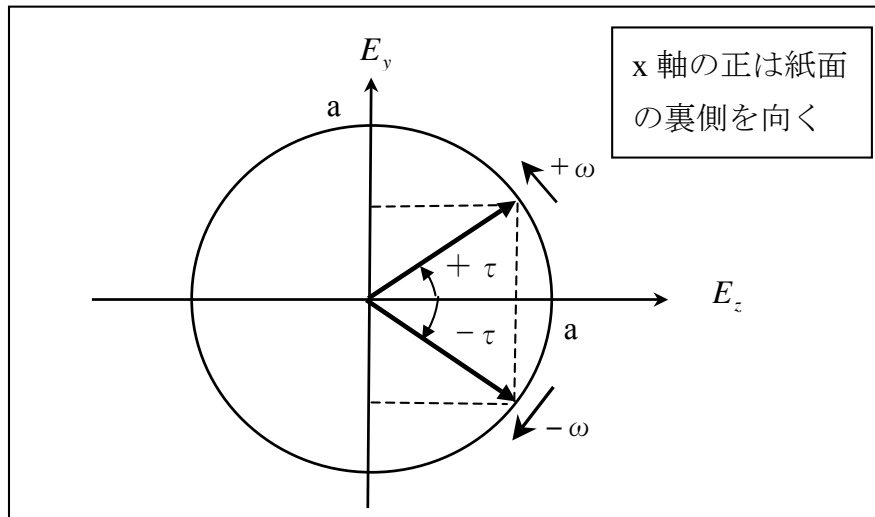


図 24-6. 回転方向が反対の二つの円偏光の状態。

この二つの円偏光を係数 1/2 を掛けて加えると、位相 ( $\tau$ ) は時間とともに変化しても、 $E_y$ 成分は常に 0 で、 $E_z$ 成分のみの直線偏光となる。

$$E_y = (1/2)a \cdot \sin(\tau) - (1/2)a \cdot \sin(\tau) = 0, \quad (78-1)$$

$$E_z = (1/2)a \cdot \cos(\tau) + (1/2)a \cdot \cos(\tau) = a \cdot \cos(\tau) \quad (78-2)$$

円偏光の二つの状態を合成すると直線偏光が得られる点が重要である。

一方、(78-2)と直交する方向の直線偏光 ( $E_z$ 成分は 0 で、 $E_y$ 成分のみの直線偏光) も、以下のように、二つの円偏光の状態から合成される。

位相を  $E_y$  を基準にして考え、

$$\phi_z = \phi_y + \phi \quad (79)$$

に変更して、 $(\omega t - k \cdot x + \phi_y) = \tau$  とすると、

$$E_y(x, y, z, t) = a_y \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_y) = a_y \cdot \cos(\tau) \quad (80-1)$$

$$E_z(x, y, z, t) = a_z \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \phi_z) = a_z \cdot \cos(\tau + \phi) \quad (80-2)$$

となる。  $\phi = \pm\pi/2$ ,  $a_y = a_x = a$  を使うと、

$$E_y = a \cdot \cos(\tau), \quad E_z = \mp a \cdot \sin(\tau) \quad (81)$$

となる。  $(\omega t - k \cdot x + \phi_y) = \tau$  は、 $y$  軸からの回転角として考える。この状態は図 24-7 に鎖線で示した。結局、これらは図 24-6 の偏光状態を  $\pi/2$  だけ回転したものに对应する。

(81)の二つの円偏光に係数 1/2 を掛けて加えると、 $E_z$ 成分は 0 で、 $E_y$ 成分はのみの直線偏光となる。

$$E_y = (1/2)a \cdot \cos(\tau) + (1/2)a \cdot \cos(\tau) = a \cdot \cos(\tau) \quad (82-1)$$

$$E_z = (1/2)a \cdot \sin(\tau) - (1/2)a \cdot \sin(\tau) = 0 \quad (82-2)$$

このように、対になっている右回りと左周りの円偏光から直線偏光が得られる

ことは、逆に、直線偏光は円偏光に分解できることも意味する。

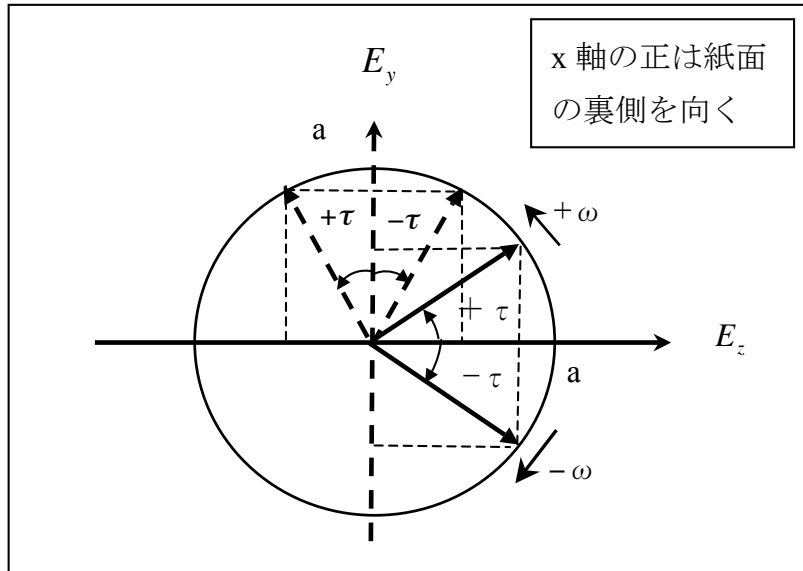


図 24-7. 回転方向が反対の二つの円偏光の状態(実線)を. 重ねると x 軸方向の直線偏光となり(図 24-6), これを  $\pi/2$  回転させれば(鎖線) y 軸方向の直線偏光が得られる.