§２５　電磁ポテンシャルとゲージ変換

Maxwell 方程式から真空中の電磁波の波動方程式を導いたが, そこにはベクトル・ポテンシャル **A** は現れない．Maxwell 方程式自体がベクトル・ポテンシャル **A** を含んでいないからである．しかし，§19−1，-2 で見たように，ベクトル・ポテンシャル **A** は磁場の議論を単純化するので，電場に対するスカラー・ポテンシャル(φ)と併用し，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$を定義し，これを用いて Maxwell 方程式を書き改める．電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$を用いると，四つの Maxwell 方程式のうちの二つは常に満たされており, 残り二つの方程式も簡単な形に変換できる.

１）**Maxwell 方程式と電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$

Maxwell 方程式の $div\,\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=0$ は，磁束密度 **B** の発散は０で，磁場は源を持たないこと（単磁荷はないこと）に対応する．これと自明の恒等式 $div\,rot\,\mathbf{A}=\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=0$ とを比べると，**A** を任意のベクトルとして，

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \qquad (1)$$

であることが判る. 磁束密度ベクトル **B** がベクトル **A** の回転に等しい訳だから, **A** は任意ではあるが，磁束密度 **B** の**ベクトル・ポテンシャル**である．これは§19−1，-2 で考えた静磁場でのベクトル・ポテンシャルを時間変動する磁場に拡張したものである.

一方，電磁場に関する Maxwell 方程式の Faraday の電磁誘導の法則は,

$$rot\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0$$

である． $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ をここに代入すると，

$$rot\,\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(rot\mathbf{A}) = rot(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \tag{2}$$

ナブラを使うと，

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times\ \mathbf{A}) = \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \tag{2'}$$

となる． φを任意のスカラー関数として，次の自明の恒等式

$rot\,grad\,\varphi = \nabla \times (\nabla\,\varphi) = 0$ が成り立つので，負符号をつけて

$$rot(-\,grad\,\varphi) = \nabla \times (-\nabla\,\varphi) = 0 \tag{3}$$

が成立する．負符号を付けることは，**スカラー・ポテンシャルの定義**に対応させるためである． (3)と (2) あるいは(2')を比べれば，

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -grad\,\varphi\text{，または}\quad \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\,\varphi \tag{4}$$

であることがわかる．このように，電場の強さ $\mathbf{E}$ には，**スカラー・ポテンシャル**φとこの**ベクトル・ポテンシャル** $\mathbf{A}$ の両方が関与しており，

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -grad\varphi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{5}$$

である．このように，

磁束密度： $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$，

電場の強さ： $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -grad\varphi(\mathbf{x},t) - \dfrac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$

を与えるスカラー・ポテンシャル$\varphi(\mathbf{x},t)$と**ベクトル・ポテンシャル** $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$を合わせて**電磁ポテンシャル**と言う．

電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$の導入の意味は次の通りである．第一は，電磁場での電荷に対する Newton の運動方程式（§22−4−34）に現れる $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は，この電

磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$を用いて表現できる．即ち，電荷に働くローレンツ力を表現する **E** と **B** に対してこの電磁ポテンシャルを使うことが出来る．そして，次に述べる電磁場のゲージ変換不変性の議論が展開できて, Maxwell 方程式は更に簡単な形になる．　第二は, Maxwell 方程式は四つの方程式から成るが，$(\varphi,\mathbf{A})$を導入することで， $div\,\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=0$と($rot\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)/\partial t=0$ は常に自動的に満足される式なってしまう．直接的に解くべき方程式は残りの二式に絞られることで，実質的変数として残るものを少なくできる．（**E**，**B**）では，変数は 3+3=6 だが，右辺側の**電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$では変数は 1+3=4 である．(2)と(4)の Maxwell 方程式を満足していることは同じであるものの，$(\varphi,\mathbf{A})$の導入で確かに実質的変数が減少している．

　残り二つの Maxwell の方程式は,

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\rho_e(\mathbf{x},t)$$

$$rot\,\mathbf{H}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

である．これらを **E** と **B** で表現すると

$$div\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{\rho_e(\mathbf{x},t)}{\varepsilon} \qquad (1')$$

$$rot\,\mathbf{B}(\mathbf{x},t)-\varepsilon\mu\cdot\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \qquad (3')$$

となる．電荷の動きが電流であるから，電荷密度ρ_eと電流密度 **i** には**電荷保存則**,

$$\frac{\partial\rho_e(\mathbf{x},t)}{\partial t}+div\,\mathbf{i}(\mathbf{x},t)=0 \qquad (6)$$

が成立していなければならない．電荷保存則の重要性は Maxwell が導入した**変**

位電流に関連して議論した（§22−1）．これら残り二つの Maxwell 方程式は電荷保存則と結合され，$(\varphi, \mathbf{A})$が求められ，$(\mathbf{E}, \mathbf{B})$が決まる．

２）ベクトル・ポテンシャル A の任意性とゲージ変換

電磁ポテンシャルによって変数が減ることは了解するとしても，スカラー・ポテンシャルφもベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ も任意であり一意的には決まらない．これは困ったことではないのか？　確かにその通りである．しかし，この時点で重要なことは，***任意であることを根拠に，最も一般的な表現法を確保したこと***である．後の議論の中で，必要な条件を（$\varphi, \mathbf{A}$）に課し，$\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を具体的なものとするのである．

この立場から，f を任意のスカラー関数として，再度，次の恒等式 $rot\, grad\, f = \nabla \times (\nabla f) = 0$ を使う．これを(1) $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\, \mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ に加えても何も変化しないから，

$$\mathbf{B} = rot\, \mathbf{A} + rot\, grad\, f = rot\, (\mathbf{A} + grad\, f) \qquad (7)$$

が成立する．これは，電磁場を与える(1)のベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ を以下のように変更することに当る．

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\, f\,,\quad \mathbf{B}' = rot\, \mathbf{A}'$$

この**変更**は，ベクトル・ポテンシャルの**変換**と見なすことが出来る．そこで，このベクトル・ポテンシャルの変換に対応させて，スカラー・ポテンシャルも，

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

と変更する．何故これで良いかは後で議論するとして，この変換された電場，

$$\mathbf{E}' = -grad\varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -grad(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}) - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

を使って，電磁誘導の Maxwell 方程式左辺 $rot\,\mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}$ を求めてみる．

$$rot(\mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}) = rot\{-grad(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t})\} = -rot\,grad(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$$

となる．確かに電磁誘導の式は，変更後も成立している．

$$div\,\mathbf{B}' = 0，かつ，\quad rot\,\mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = rot(\mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}) = 0$$

であり，上記の変換後も，二つの Maxwell 方程式は満足されている．即ち，$\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$ がどんなスカラー関数であっても，$rot\,grad\,(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$ が成立するから，$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,f$，$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$ と電磁ポテンシャルが変換されても，Maxwell 方程式(2)，(4)は成立し，電磁場 **E**, **B** (5), (1)もこの変換に不変である．この様に変換すると Maxwell 方程式も電磁場 **E**, **B** も不変になることが，上記スカラー・ポテンシャルの変換式を採用した理由である．

$$\mathbf{A} \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,f, \qquad \varphi \;\to\; \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{8}$$

この**電磁ポテンシャルの変換**を**ゲージ変換**と言う．「ゲージ」とは「物差しの尺度」の意味で，尺度を変えても電磁場の記述は不変である．電磁場のこのような性質は，「電磁場の(φ,**A**)は**ゲージ場**である」とも表現する．**電磁場 E, B がゲージ変換で不変であるから，ローレンツ力もゲージ変換に不変**である．**従って，荷電粒子に対する　Newton の方程式もゲージ変換に不変**である．

ゲージ変換不変性の意義については，Lederman. R. A. & C, T. Hill（小林　重樹訳）「対称性：レーダーマンが語る量子から宇宙まで」（白揚社， 2008）[58]

の 11 章にその解説がある．興味を覚えた方は参照されたい．

電磁場の$(\varphi,\mathbf{A})$の方から考えると，(8)の変換ではスカラー・ポテンシャルfだけの任意性があることになる．しかしながら，このスカラー・ポテンシャル f の任意性を積極的に使うことで，残りの Maxwell 方程式(1’)と(3’)が単純化出来る．その過程で，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$に**具体的条件を課する（ゲージを固定する）**．議論はそのような道筋を進む．

電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$で与えられる電磁場 **E**, **B** (5), (1)を，残りの Maxwell 方程式(1’), (3’)に代入する．

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-grad\varphi(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{5}$$

$$div\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{\rho_e(\mathbf{x},t)}{\varepsilon} \tag{1'}$$

(5)を(1’)に代入して **E** を消去すると，

$$div(grad\varphi+\frac{\partial A}{\partial t})=-\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

となるが，　$div\ grad\, f=\nabla\bullet(\nabla f)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})f=\nabla^2 f$　であるから，

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A})=-\frac{\rho_e}{\varepsilon} \tag{9}$$

となる．一方，(1)と(3’)は，

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=rot\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

$$rot\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)-\varepsilon\mu\cdot\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \tag{3'}$$

であるから，(3’)の左辺に(1)と(5)を代入して，**B** と **E** を消去すると，

$$rot\ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\varepsilon\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi(\mathbf{x},t)+\varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

となる．ここで，恒等式　$rot\,rot\mathbf{A} = grad\,div\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$，$\Delta = \nabla^2$　を使うと，

$$grad\,div\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} + \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi(\mathbf{x},t) + \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = \mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

となる．これを整理して，

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - grad\,\{div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x},t)\} = -\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \qquad (10)$$

である．

結局，電磁ポテンシャルを用いると，残り二つの Maxwell 方程式は，(9)，(10)の方程式に姿を変えることが判る．

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A}) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \qquad (9)$$

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - grad\,\{div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x},t)\} = -\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \qquad (10)$$

しかし，(9), (10)の左辺を見ると，φはφだけが，$\mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ だけが関与するような変数が分離された方程式の形にはなっていない．だから，スカラー・ポテンシャルfの任意性を使って，そのような簡素な形に変えることを考える．

３）ローレンツ条件（ローレンツ・ゲージ）

電磁ポテンシャルについての(8)の変換，

$$\mathbf{A} \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f, \qquad \varphi \ \to \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (8)$$

でfをうまく選んで，

$$div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

が実現するように出来る．この条件は**ローレンツ条件**と呼ばれる．真空の電磁場なら，ローレンツ条件は，

$$div\mathbf{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=div\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad (11')$$

となる．ローレンツ条件が常に満足されることを以下で確認しよう．

(11)はスカラーであるが，はじめに選んだ電磁ポテンシャル$(\varphi',\mathbf{A}')$が(11)を満足せず，

$$div\mathbf{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=g\neq 0 \qquad (12)$$

であっても，(8)のゲージ変換で$(\varphi,\mathbf{A})$に変わるとすると，(12)の$(\varphi',\mathbf{A}')$を(8)の$(\varphi,\mathbf{A})$で表現して，

$$div\mathbf{A}+div\ grad f+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=g$$

となる． ローレンツ条件左辺に相当する項とこれ以外の項を左右に分けてみると，

$$div\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=g-(\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}) \qquad (13)$$

となる．右辺のfは任意であるから，(13)の右辺が0となるようにfを選ぶことが出来るはずである．即ち，

$$(\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})=g, \quad 又は，(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})f=g \qquad (14)$$

を満足するfが存在する．だから，(11)の条件が満足される．しかし，スカラー・ポテンシャルfは，方程式(14)を満足するものに限定される．

このようにして，任意のfを特定の条件(14)を満足するfに決めることを，**ゲージの固定**とか**ゲージの選択**と呼ぶ．(11)の**ローレンツ条件**は，**ローレンツ・ゲージ**が選択されていると表現される．

(11)のローレンツ条件，$div\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，を残った二つの Maxwell 方程式(9),

(10)に代入すると，

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\varphi(\mathbf{x},t) = -\frac{\rho_e(\mathbf{x},t)}{\varepsilon} \tag{15}$$

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \tag{16}$$

となる． (15), (16)の左辺は，φだけ，$\mathbf{A}$ だけの方程式であり，望んだ形になっている．しかも波動方程式の形になっている． Maxwell 方程式も随分単純な方程式になった． (15), (16)左辺に現れる波動方程式の演算子$(\nabla^2 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})$は，ダランベール演算子と呼ばれる．(15)と(16)の右辺には，電荷密度$\rho_e(\mathbf{x},t)$と電流密度$\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$があるが，両者は**電荷保存則**を通じて繋がっているはずである．

電荷保存則は，電荷密度と電流密度に関する連続の式である．改めて書くと

$$\frac{\partial\rho_e(\mathbf{x},t)}{\partial t} + div\ \mathbf{i}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{6}$$

である．(15)の電荷密度$\rho_e(\mathbf{x},t)$を時間で偏微分し，(16)の電流密度$\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$の発散を取り，これらを電荷保存の式(6)に代入し，整理すると，

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}(div\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial t}) = 0 \tag{17}$$

が得られる．スカラー量$(div\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial t})$が波動方程式を満足していることが判る．しかし，これは (11)の**ローレンツ条件**$(div\ \mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0)$として前提にしたものであるから，恒等的に成立するのは当然である．**ローレンツ条件が電荷保存則に対応すること**を意味している．即ち，ローレンツ条件 $div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ が常に成立していれば，電荷保存則も常に満足されていることになる．Maxwell 方程式 (15)，(16)を解けば，それが，**ローレンツ・ゲージ**が

選択された場合の電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$である．

以上の**ローレンツ・ゲージ**についての議論をまとめると，

$$div\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0 \tag{11}$$

$$\{\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\varphi(\mathbf{x},t)=-\frac{\rho_e(\mathbf{x},t)}{\varepsilon} \tag{15}$$

$$\{\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=-\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \tag{16}$$

を解くことで，

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=rot\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-grad\varphi(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{5}$$

電磁場が決まることになる．これは，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$を用いて，Maxwell方程式を書き換えた結果である．

４）クーロン条件（クーロン・ゲージ）

ローレンツ・ゲージ（条件），$div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$，を選択した結果, 残りの Maxwell 方程式は(15), (16)となり，源を持つ波動方程式になった．電荷保存則も満足している．ところで，我々は，電荷から無限遠にある位置でスカラー・ポテンシャルをφ＝０と定義してこれを取扱っている．しかし，もともと，ベクトル・ポテンシャル **A** だけではなく，スカラー・ポテンシャルφも一意的には決まらないものであった．一方，一般の波動ベクトルは，進行方向に平行な縦波成分とこの方向に垂直な面内にある横波成分に分解できる．$div\mathbf{A} = 0$である波動ベクトル A は，縦波成分は０で，横波成分のみを持つ．もし$rot\,\mathbf{A} = 0$であるなら，波動ベクトル **A** は横波成分は０で，縦波成分しか持たない（§24−4）．この観点からすると，ローレンツ条件の意味は，変位電流に由来する$\varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$を加えることで，縦波成分 $div\mathbf{A}$ を強制的に０にしているとも解釈できる．そうであるなら，はじめから

$$div\mathbf{A} = 0 \tag{18}$$

としてみることはどうであろうか．これは**クーロン条件，クーロンゲージ**と呼ばれる．

クーロンゲージを選んだ時，たとえ

$$div\mathbf{A}' = g \neq 0 \tag{19}$$

であっても，(8)のゲージ変換をして，

$$\mathbf{A} \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,f, \qquad \varphi \;\rightarrow\quad \varphi' = \varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial f}{\partial t} \tag{8}$$

の第一式を(19)に代入すれば，$div\mathbf{A} + div\;grad\,f = g$　であるから，

$$divA = g - \nabla^2 f \tag{20}$$

となる．fが任意であることから$\nabla^2 f = g$ となるようなfにより，$div\mathbf{A} = 0$と出来るはずである．

このクーロン条件を，電磁ポテンシャルを導入して残ったMaxwell方程式(9)と(10)，

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A}) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \tag{9}$$

$$\{\nabla^2 - \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - grad\ \{div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x},t)\} = -\mu\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) \tag{10}$$

に改めて代入してみる．$div\mathbf{A} = 0$と恒等式，$rot\ rot\ \mathbf{A} = grad\ div\ \mathbf{A} - \Delta\ \mathbf{A}$，も併用すると　$rot\ rot\ \mathbf{A} = -\Delta\ \mathbf{A}$であるから．$\Delta = \nabla^2$，$grad = \nabla$ を用いて，

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \tag{21}$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\mu\cdot\mathbf{i}_t(\mathbf{x},t) \tag{22}$$

が得られる．ただし，(22)の右辺は以下の内容を意味する．

$$\mathbf{i}_t(\mathbf{x},t) = \mathbf{i}(\mathbf{x},t) - \varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{23}$$

この$\mathbf{i}_t(\mathbf{x},t)$は横波成分だけを持つ．何故なら，$div\ \mathbf{i}_t(\mathbf{x},t) = \nabla\bullet\mathbf{i}_t(\mathbf{x},t)$を作ると，

$$div\ \mathbf{i}_t = div\ \mathbf{i} - div\ (\varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}) = div\ \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\nabla^2\varphi) = div\ \mathbf{i} + \frac{\partial\rho_e}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

となるからである．最後から２番目の等号は(21)を用いている．また，最後の等号は電荷保存則である．クーロン条件も電荷保存則を満足している．

クーロン条件（$div\mathbf{A} = 0$）と**ローレンツ条件**（$div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$）を比べれば，両者の違いは，$\partial\varphi/\partial t = 0$ とするか，それとも$\partial\varphi/\partial t \neq 0$とするかにある．電磁ポ

テンシャルに戻って考えてみれば，

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{25}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -grad\varphi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{26}$$

であるから，**電場が時間変動しない**こと（**静電場**であること）は，$\partial\varphi/\partial t = 0$であり，かつ，$\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$であること，即ち，(26)が

$$\mathbf{E} = -grad\varphi(x,y,z) \tag{26-1}$$

となることである．静電場であることは，$\partial\varphi/\partial t = 0$だけではなく，$\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$の条件も付随するから，磁束密度 **B**(磁場 **H**)に関しても時間変動はなく，静磁場を意味する．静電場の問題は，(26-1)から判るように，静的な磁場の問題と分離して考えることができる．

もう一つ，**クーロン条件**（$div\mathbf{A} = 0$，$\partial\varphi/\partial t = 0$）を満足する重要な場合がある．それは，$\varphi$＝０である**真空の自由空間**のことである．**電荷のない空間**は，電荷から無限遠の位置にあるとすることができるので，スカラー・ポテンシャルはφ＝０として良い．電荷のない空間では当然電流も無い．(26)は，

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{26-2}$$

となる．これは，ベクトル・ポテンシャルの時間変動に由来する電場が存在することを意味する．(25)の$\mathbf{B} = rot\ \mathbf{A}$もそのまま残るので，静電場の場合とは異なり，**磁場と電場は時間変動し，**ベクトル・ポテンシャルを通じて**相互に結びついている**．真空中に実在する電磁場のことである．

クーロン条件（$div\mathbf{A} = 0$）は**ローレンツ条件**（$div\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0(\partial\varphi/\partial t) = 0$）の特殊ケースであるが，これを用いて，$\varphi$＝０である**真空の自由空間の電磁場**につ

いて以下で考える．

５）電磁ポテンシャルから考える真空中の電磁場

電荷も電流もない真空中の電磁場**(E, B)**問題は，$div\mathbf{A}=0$のクーロン条件で，$\rho_e=0$, $\mathbf{i}=0$の問題として解けば良い．

$$\varphi=0,\quad div\mathbf{A}=0 \tag{27}$$

$$\mathbf{B}=rot\,\mathbf{A} \tag{28}$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{29}$$

$$(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=0 \tag{30}$$

の連立方程式となる．

(28)の div を取ってみると，何度も使った自明の恒等式から

$$div\,\mathbf{B}=div\,rot\mathbf{A}=0$$

である．また，(29)の div を取ってみると，**A** は横波で，$div\mathbf{A}=0$であるから $div\,\mathbf{E}=-div\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A})=0$．従って，

$$div\,\mathbf{B}=0,\qquad div\,\mathbf{E}=0 \tag{31}$$

である．**B** も **E** も横波である．さらに，(29)の rot を取って，(28)を代入すると，

$$rot\,\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

となる． また，$rot\,rot\,\mathbf{A}=-\Delta\,\mathbf{A}$から，$rot\,\mathbf{B}=-\Delta\,\mathbf{A}=-\nabla^2\mathbf{A}$． (29)を時間で微分して，$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$， これを (30)に代入して，

$$rot\,\mathbf{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

となる．要するに，

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{32}$$

$$rot\,\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{33}$$

である．(32)の rot を取ると，

$$rot\,rot\,\mathbf{E} = -rot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(rot\,\mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{34}$$

最後二つの等式は，(33)を代入した結果である．

一方，　恒等式　$rot\,rot\,\mathbf{E} = grad\,div\,\mathbf{E} - \Delta\,\mathbf{E}$　と　(31)の　$div\,\mathbf{E} = 0$　から，$rot\,rot\,\mathbf{E} = -\Delta\,\mathbf{E} = -\nabla^2\,\mathbf{E}$　である．これを(34)の左辺に入れれば，

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta\,\mathbf{E} = \nabla^2\,\mathbf{E} = (\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}) \tag{35}$$

E に関する波動方程式が得られる．(33)の rot を取って同じことをやれば，**B** について同様の波動方程式が得られる．B のままでも良いが，$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ として磁束密度を磁場強度に変えれば，

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \Delta\,\mathbf{H} = \nabla^2\,\mathbf{H} = (\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}) \tag{36}$$

である．この平面波の解については，既に，§24 で議論した．

§24 では，Maxwell 方程式から直接，真空電磁場の波動方程式を導いた．しかし，ここでは，Maxwell 方程式から，まず，電磁ポテンシャルを定義し，クーロン・ゲージを用いて真空電磁場の波動方程式を導いた．波動方程式を導くだけなら§24 の方が簡単で良い．しかし，電磁ポテンシャルとゲージ変換の議論はより一般的な意味で重要である．次に述べる電磁場における荷電粒子の運動の Lagrangian, Hamiltonian や電磁波の放出を考える際にも重要となる．

６） 荷電粒子の運動に対する Lagrangian と Hamiltonian

真空中の荷電粒子の運動方程式は§22−4−(34)で考えたが，ここでは問題を簡略化して，質量 m，電荷 e の荷電粒子一個に対する Newton の運動方程式として考える．右辺はローレンツ力である．

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{37}$$

この右辺側の **B**, **E** は (1), (5)の電磁ポテンシャル

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}\,, \qquad \mathbf{E} = -grad\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

で与えられるので，(37)はゲージ変換に不変である．電磁ポテンシャルを(37)右辺に代入してみると，

$$e\mathbf{E} + e\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -grad\,(e\cdot\varphi) - e\cdot(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) + e\cdot\mathbf{v}\times(rot\,\mathbf{A}) \tag{38}$$

となる．次の関係を使って(38)右辺を更に書き換える．

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}(x,y,z,t)}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\ &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}_x\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{v}_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{v}_z\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A}\end{aligned}$$

これより，

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A} \tag{39}$$

また，ベクトル三重積の公式 $A\times(B\times C) = B(A\bullet C) - C(A\bullet B)$ を使い，$A\to\mathbf{v}, B\to\nabla, C\to\mathbf{A}$ と置き換えて，$\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}\bullet\nabla)$だから，

$$\mathbf{v}\times(rot\,\mathbf{A}) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\ \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A} \tag{40}$$

である．故に，

$$e\mathbf{E}+e\mathbf{v}\times\mathbf{B}=-grad\ \varphi e-e\{(\frac{d\mathbf{A}}{dt})-(\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A}-\nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})+(\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A}\}$$

$$=-\nabla\ \varphi e-e(\frac{d\mathbf{A}}{dt})+e\nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})$$

となる．Newton の方程式は，

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\nabla\{\ \varphi e-e(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})\}-e(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) \tag{41}$$

であり，右辺は電磁ポテンシャルによる表現になっている．特に注目すべきは $\{\ \varphi e-e(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})\}$のスカラー量は，通常のポテンシャル（U）に対応するものであるが，速度が関与しており，座標だけの関数ではないことである．

$$\mathbf{r}=(x,y,z)=(q_1,q_2,q_3),\quad \mathbf{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3) \tag{42}$$

として，(41)を書き直してみる．

$$m\frac{d\dot{q}_i}{dt}=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\ \varphi e-e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}-e(\frac{dA_i}{dt})$$

最後の項は，$A_i=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)$ と書くことが出来るから

$$\frac{dA_i}{dt}=\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}$$

である． 従って，Newton の運動方程式(41)右辺は，次のようになる．

$$m\frac{d\dot{q}_i}{dt}=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\ \varphi e-e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}-e\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\ \varphi e-e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}+\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\varphi e-e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k))\} \tag{43}$$

最後の等式で，φはスカラー・ポテンシャルであり，$\partial(\varphi e)/\partial\dot{q}_i=0$ であることを使った．そこで，

$$U=\varphi e-e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k) \tag{44}$$

とすると，Newton の運動方程式(43)は，次のような簡素な式になる．

$$m\frac{d\dot{q}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}) \tag{45}$$

従って，Lagrangian, L を

$$L = T - U = (1/2)m\{(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_2)^2\} - U \tag{46}$$

と置けば,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}) = m\frac{d\dot{q}}{dt} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}) = -(\frac{\partial U}{\partial q_i}) = (\frac{\partial L}{\partial q_i}) \tag{47}$$

の Lagrange 運動方程式となることが判る．最後から二番目の等号は Newton の運動方程式(45)が成立することに依る．即ち，Newton の運動方程式 (45)が成立することは，(46)の Lagrangian に対して，(47)の Lagrange 運動方程式が成立することである．

以上の様に，電磁場の荷電粒子の運動に対する Lagrangian は，(44), (46)から

$$L = T - e\varphi + e(\mathbf{v} \bullet \mathbf{A}) \tag{48}$$

であることがわかる．q_iに共役な運動量は，$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$の関係から得られ，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + eA_i \tag{49}$$

となる．運動量ベクトルの形で書けば,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A} \tag{50}$$

である．ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ が付随し，**通常の粒子運動量**$m\dot{\mathbf{q}}_i$**とは異なる**．荷電粒子が質量 m の単なる質点ではなく，電荷 e を持つことによる．$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}$ の**正準運動量**を，粒子の運動量$m\dot{\mathbf{q}}_i$と区別する為に，特に**力学的運動量**と呼ぶことがある．

(49)から，力学変数は$(q_i, \dot{q}_i) \to (q_i, p_i)$と変換されて，(49)から

$\dot{q}_i = (1/m)(p_i - eA_i)$であるので，L の Legendre 変換から Hamiltonian(H)を求める際に注意が必要である．

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L$$
$$= \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + U = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + \varphi e - e(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_k A_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)\dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + \varphi e$$

ここでの$\dot{q}_i$は旧変数であるから，$\dot{q}_i = (1/m)(p_i - eA_i)$　を代入して，

$$= \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{m})(p_i - eA_i)^2 - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{m})^2(p_i - eA_i)^2 + \varphi e$$

となる．従って，電磁場における質量 m，電荷 e の荷電粒子の運動の H は,

$$H = \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2m})(p_i - eA_i)^2 + \varphi e = (\frac{1}{2m})(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \varphi e \qquad (51)$$

となる．

一方, 電磁場と無関係な質量 m の粒子が, ポテンシャル V の下で運動する時, その H は,

$$H = \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2m})(p_i)^2 + V = (\frac{1}{2m})(\mathbf{p})^2 + V \qquad (52)$$

であるから，通常のこの運動量とポテンシャル V を,

$$\mathbf{p} \;\rightarrow\; (\mathbf{p} - e\mathbf{A}), \qquad V \;\rightarrow\; V + \varphi e \qquad (53)$$

と**形式的に置き換える**ことで，質量 m，電荷 e の荷電粒子の真空電磁場での運動の Hamiltonian, H が得られる. この場合の V は非電磁的なポテンシャルである. 即ち,質量 m，電荷 e の荷電粒子が，非電磁的なポテンシャル V も存在する真空の電磁場で運動する時，その Hamiltonian, H は

$$H = (\frac{1}{2m})(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V + \varphi e \qquad (54)$$

となる．これは，**力学的運動量** $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}$ を陽に書いたものである．荷電粒子の運動では，**力学的運動量** $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}$ が**正準運動量**であるので，量子論に移行する時には，この力学的運動量による H を使わねばならない．

一方，$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = m\dot{\mathbf{q}}$ として．**通常の運動量(** $m\dot{\mathbf{q}} = m\dot{\mathbf{r}}$ **)に戻して表現**すると，

$$H = (\frac{1}{2})(m\dot{\mathbf{q}})^2 + V + \varphi e = (\frac{1}{2})(m\dot{\mathbf{r}})^2 + V + \varphi e \qquad (55)$$

となる，運動の全エネルギ−としての Hamiltonian である． 通常の力学的エネルギ−[$(1/2)(m\dot{\mathbf{r}})^2 + V$]に，電場が関わるエネルギー（φe）が加わったものである．**磁場が関わるエネルギ−項は含まれない**．荷電粒子の運動における磁場による仕事は常に０だからである．(55)は古典論的全エネルギ−を表す Hamiltonian としては正しい．しかし，荷電粒子の場合，$m\dot{\mathbf{q}} = m\dot{\mathbf{r}}$ はもはや正準運動量ではないので，量子論に移行する際は，(55)ではなく，(54)を使う必要があり，そこにはベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ が現れることに注意.

古典的電磁気学の Maxwell 方程式は電場と磁場を用いて表現されるが，以上で見たように電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$を用いて書き換えることも出来る．量子論の出現以前では，電場と磁場が測定される物理量であるのに対し，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$は不定性を持つことから，$(\varphi,\mathbf{A})$による Maxwell 方程式は単なる数学的技巧に依る表現と見なされるのが普通であった．しかし，量子論の出現以後では，ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ が量子論のシュレディンガー方程式に直接現れるので，$\mathbf{A}$ なしには議論が出来ないことになった．この状況を端的に示すが，アハラノフ・ボーム効果 (Aharonov-Bohm effect) の存否をめぐる議論であ

る．益川による「いま，もう一つの素粒子論入門」[62] の第 8 章，外村 (とのむら) の「目で見る美しい量子力学」[63] の第 8, 9, 10 章は，この問題を取り上げているので，参照されたい．また，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$のゲージ変換の不定性の意味についても，益川の著書[62] に述べられている．

7）ベクトル・ポテンシャルの平面波展開による自由電磁場

§25-5 で述べたように，自由電磁場の問題，即ち，電荷も電流もない真空中の電磁場(**E**, **B**)問題は，$div\mathbf{A}=0$のクーロン条件で，$\rho_e=0$, $\mathbf{i}=0$の問題として考えれば良い．

$$\varphi=0,\quad div\mathbf{A}=0 \tag{27}$$

$$\mathbf{B}=rot\,\mathbf{A} \tag{28}$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{29}$$

$$(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=0 \tag{30}$$

の連立方程式である． これらから，ベクトル・ポテンシャル（**A**）を消去する形で，真空電磁場の問題を(**E**, **B**)の波動方程式を導き，§25-5 に記したようにその解を得ることも出来る(§24).

しかし，ベクトル・ポテンシャル（**A**）に関する波動方程式(30)の解を，周期的境界条件を課して，直接定めることもできる．この立場からは，ベクトル・ポテンシャル（**A**）の平面波展開した結果（フーリエ展開）を用い自由電磁場を記述出来るとの結論になる．即ち，ベクトル・ポテンシャル（**A**）は，色々に異なる無数の波数ベクトル($\mathbf{k}$)の平面進行波の重ね合わせで表現出来る．各平面進行波は波動方程式を満足しており，力学的には「調和振動子」とみなすことができるので，真空電磁場は無数の「力学的調和振動子の集合」と等価であると言える（Jeans の定理）[44, 57]．真空電磁場の全エネルギー（H）は力学的調和振動子と同じ形式で表現され, 真空電磁場の正準量子化が可能となる[14, 53]．その結果，古典的な波動（光，電磁波）は，「粒子」として理解できる．同時

に，Planck の空洞輻射（黒体輻射）の式を導くこともできる．ここではベクトル・ポテンシャル（**A**）の平面波展開について簡単に記す.

＜立方体の周期的境界条件と **A** に関する波動方程式の解＞

一辺の長さが L である立方体内の電磁場を考える．境界に依存しない状況を考える為に，立方体の形状に対応した **A** についての周期的境界条件を考える．この条件は,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x,y,z,t) &= \mathbf{A}(x+L,y,z,t)\\ &= \mathbf{A}(x,y+L,z,t)\\ &= \mathbf{A}(x,y,z+L,t)\end{aligned} \tag{56}$$

である. 上述の **A** に関する波動方程式は, $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c = 2.998\times10^8 (m/s)$ として,

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = c^2\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{57}$$

である． (58)右辺は，$\mathbf{a_k}$ を振幅ベクトルとする波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x,k_y,k_z)$ の平面波進行波（$\mathbf{a_k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)}$）であるが，これは(56)の周期的境界条件を満たし，かつ，(57)の波動方程式を満たしている．このことは,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{a_k}e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\text{-}i\omega_k t}, \tag{58}$$

として，(58)右辺を(56)と(57)に代入して確認出来る．ただし，この平面進行波の波数ベクトルの成分には以下の条件が付いている：

$$\mathbf{k} = (k_x,k_y,k_z), \tag{58-1}$$

$$k_x = \frac{2\pi\cdot n_x}{L},\quad k_y = \frac{2\pi\cdot n_y}{L},\quad k_z = \frac{2\pi\cdot n_z}{L}, \tag{58-2}$$

$$n_x,n_y,n_z = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \tag{58-3}$$

さらに，この平面進行波の角周波数は,

$$\omega_{\mathbf{k}} = c \cdot |\mathbf{k}| = ck, \tag{58-4}$$

でなければならない．以下，これらの条件が付く理由を確認しよう．

(56)の $\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x+L,y,z,t)$ に，(58)右辺の平面進行波を代入する．

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x+L,y,z,t) \\ &\mathbf{a_k} e^{-i\omega_k t} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \mathbf{a_k} e^{-i\omega_k t} e^{i[k_x(x+L) + k_y y + k_z z]} \\ &e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} \rightarrow 1 = e^{ik_x L} \end{aligned} \tag{59}$$

最後の等式より，

$$k_x = \frac{2\pi \cdot n_x}{L}, \quad n_x = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

であれば　$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x+L,y,z,t)$　の境界条件は満足される．同様にして，y, z に関する境界条件から，(58-2)と(58-3)の条件が得られる．

(58)右辺の平面進行波を(57)の波動方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}) = c^2 \nabla^2 (\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}) \\ &(-i\omega_k)^2 (\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}) = c^2 \mathbf{a_k} e^{-i\omega_k t} \nabla^2 (e^{i(k_x x + k_y x + k_z x)}) \end{aligned} \tag{60}$$

となる．左辺での時間微分は $e^{-i\omega_k t}$ のみに作用する．右辺側のラプラス演算子 $\nabla^2 = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は，位置変数のスカラー関数に作用するので，関係するのは $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{i(k_x x + k_y x + k_z x)}$ だけである．振幅を表す定ベクトル $\mathbf{a_k}$ と $e^{-i\omega_k t}$ には作用しない．ラプラス演算子が関与する部分は，

$$\begin{aligned} \nabla^2 (e^{i(k_x x + k_y x + k_z x)}) &= [(ik_x)^2 + (ik_y)^2 + (ik_z)^2](e^{i(k_x x + k_y x + k_z x)}) \\ &= -[(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2](e^{i(k_x x + k_y x + k_z x)}) \end{aligned}$$

となる．従って，元に戻すと

$$-(\omega_k)^2 (\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}) = -[(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2] c^2 \mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t} \tag{61}$$

となるので，結局，

$$(\omega_k)^2 = [(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2]c^2 = \boldsymbol{k}^2 c^2$$

となり， (58-4)の条件に帰着する.

以上のように， (58)右辺に示す$\mathbf{a_k}$を振幅ベクトルとする波数ベクトル$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$の平面波進行波（$\mathbf{a_k} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)}$）が(A-3-1)~(A-3-4)の条件を備えていれば，その平面進行波は，(56) の周期的境界条件を満たし，かつ， (57)の波動方程式も満足する. $\mathbf{a_k} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)}$は (58-1)~(58-4)の条件を満たす一つの平面進行波である．従って，このような平面進行波の重ね合わせ（一次結合）も全く同様な性質を持つので，一般解としては，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{a_k}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c.c.\}$$

$$= \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t) \exp[i \cdot \frac{2\pi}{L}(n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z)] + c.c.\} \quad (62)$$

とできる．ただし,

$$\mathbf{a_k} e^{-i\omega_k t} \to \mathbf{a_k}(t) = \mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t) \quad (63)$$

と表記している. また, c. c. は, 初めの項に対する複素共役項(complex conjugate)を意味する. a, b を実数とする時, 複素数 z=a+bi の複素共役は, z*=a-bi であり, 初めの項で i→(-i) としたものに当る．初めの項が解ならその複素共役項も自動的に解となっている（これは各自確認されたい)．しかし，問題にしている物理量は，常に実ベクトルであるから，最終的には，初めの項に対する複素共役との和を作ることで（z+ z*=2a)，虚数部分を消去し，実数部分を残したものを解としなければならない．(z+ z*)/2=a だから，和を 2 で割って解とするともっと良い．しかし，解の振幅が任意なので，1/2 は任意振幅に含めるとすれば，解は和だけでも良い．これは平面進行波を複素形式で表現したことに対する必要な

対応である．

(62)は，ベクトル・ポネンシャル$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(x,y,z,t)$が周期的境界条件を用いてフーリエ級数に展開出来ることを表す．即ち，周期的境界条件の下での$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(x,y,z,t)$の波動方程式の一般解は, **平面進行波の重ね合わせ**で表現できる．

＜$div\mathbf{A}=0$の**クーロン条件との関連**＞

以上の議論では，真空電磁場の**クーロン条件**($div\mathbf{A}=0$)との関連を考えていない．そこで，(A-7)の「平面進行波の重ね合わせ」解を$div\mathbf{A}=0$に代入してみる． (62)右辺の「平面進行波の重ね合わせ」解を以下のように略記する．

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_{n_x=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_y=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_z=-\infty}^{+\infty}\{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+c.c.\}\to\sum_{\boldsymbol{k}}\{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+c.c.\}. \tag{64}$$

$div\mathbf{A}=0$ は，$\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}=0$の意味である．(62)右辺を代入する場合，x 成分について考えると，$[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]_x=[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ だから，

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x\frac{\partial}{\partial x}(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})=[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x\cdot(ik_x)\cdot(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})$$

である．y，z 成分についても同様な結果になるので,

$$div[\sum_{\boldsymbol{k}}\{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+c.c.\}]$$

$$=\sum_{\mathbf{k}}\{i(\mathbf{a}_{\mathbf{k}x}\cdot k_x+\mathbf{a}_{\mathbf{k}y}\cdot k_y+\mathbf{a}_{\mathbf{k}z}\cdot k_z)(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})+c.c.\}$$

$$=\sum_{\mathbf{k}}\{i\boldsymbol{k}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})+c.c.\}=0 \tag{65}$$

これが常に成立する為には,

$$\boldsymbol{k}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}}=0 \tag{66}$$

でなければならない．即ち，ベクトル・ポテンシャルの振幅ベクトル$\mathbf{a_k}$は，波数ベクトル$\boldsymbol{k}$と直交している．波数ベクトル$\boldsymbol{k}$に垂直な面内に，ベクトル・ポテンシャルの振幅ベクトル$\mathbf{a_k}$があれば良い． $\mathbf{a_k}$は横波である．この波数ベクトル$\boldsymbol{k}$に垂直な面内には，直交する二つの方向があるので，その方向の単位ベクトルを$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とすると，

$$\mathbf{a_k} = (\mathbf{a_k})_1\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a_k})_2\mathbf{e}_2 = \sum_{\sigma=1,2}(\mathbf{a_k})_\sigma \mathbf{e}_\sigma \tag{67}$$

と表現できる．これを(64)に代入すれば，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\{[\sum_{\sigma=1,2}\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\sigma] + c.c.\} \tag{68}$$

である．波数ベクトル$\boldsymbol{k}$に垂直な面内での$\mathbf{a_k}$の偏り(偏光)を考慮した表現になる．

(A-68)で， $\mathbf{a_k}(t) = \mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t) \rightarrow \mathbf{a_k}e^{-i\omega_k t}$ と元の形に戻せば，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\{[\sum_{\sigma=1,2}\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}\mathbf{e}_\sigma] + c.c.\}$$

$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$を波数ベクトルが$\boldsymbol{k}$である時の σ の偏り方向の単位ベクトルとすれば，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}\{|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}] + c.c.\} \tag{69}$$

と表現できる．また再度，

$$|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{70}$$

と表現すれば，(69)の複素表現は，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \tag{71}$$

とも表現出来る．最終的には(69)も(71)も実ベクトルとして考えるので，実表現としては，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})\qquad(72)$$

と書いても良い.

(72)は，様々に異なる波数ベクトル$\boldsymbol{k}$と σ の偏り方向（$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$の方向）の振幅の大きさ$\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|$，対応する初期位相$\phi_{\mathbf{k}\sigma}$を与えれば，平面進行波の重ね合わせ（単振動の重ね合わせ）としてベクトル・ポテンシャル（**A**）は表現出来ることを示している.

＜ベクトル・ポテンシャル（**A**）から求める **E**，**B**＞

ベクトル・ポテンシャル（**A**）を用いて，(29)と(28)から（**E**，**B**）が与えられる．(72)の実ベクトル表現を使うと，

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\{\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})\}$$

$$=-\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

$$=\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot(-\omega_k)\cdot sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

$\cos(\alpha+\varphi)=\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi$ → $\varphi=\pi/2$ で $\cos(\alpha+\pi/2)=-\sin\alpha$ より

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot(\omega_k)\cdot\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma}+\pi/2)\qquad(73)$$

である．**E** は，**A** と同じ単位ベクトル$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$で記述される．**E** と **A** は振幅の違い，位相の違い（π/2）はあるが，偏光特性も含めて同じような「波動ベクトル」と考えれば良い.

ベクトル・ポテンシャル（**A**）(71)の複素表現を使えば，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t}\{\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\} \\
&= -\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)}{\partial t}\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t)}{\partial t}\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \\
&= i\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}\omega_{\mathbf{k}}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \qquad (72)
\end{aligned}
$$

となる.

一方，磁場の方は，(72)の実表現を使うと，

$$\mathbf{B} = rot\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = rot\{\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})\}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1,2} rot[\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})] \tag{73}$$

rot と和のΣは順序を変更できる．rot は，

$$rot\ \mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial C_z}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial z})\cdot\mathbf{i} - (\frac{\partial C_z}{\partial x}-\frac{\partial C_x}{\partial z})\cdot\mathbf{j} + (\frac{\partial C_y}{\partial x}-\frac{\partial C_x}{\partial y})\cdot\mathbf{k} \tag{74}$$

であるから， $\mathbf{C} = \left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}\cdot\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$ と置いてみる．各成分は

$$C_x = [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_x\cdot\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$
$$C_y = [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y\cdot\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$
$$C_z = [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z\cdot\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

だから， $\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma}) = \cos[(\mathrm{k}_x\cdot x+\mathrm{k}_y\cdot y+\mathrm{k}_z\cdot z)-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})]$ に注意して，

その x 成分を考えると，

$$(\frac{\partial C_z}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial z}) = [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

$$-[\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

$$= [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z\cdot(-k_y)sin(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

$$-[\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y\cdot(-k_z)sin(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

演算子は定ベクトル成分には作用しない．また，cos(α +π/2) = − sin αより

$$(\frac{\partial C_z}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial z}) = [\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z\cdot(k_y)\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma}+\pi/2)$$

$$-[\left|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\right|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y\cdot(k_z)\cos(\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\phi_{\mathbf{k}\sigma}+\pi/2) \tag{75}$$

となる．C の y，z 成分も同様に考えれば良いから，

$$\mathbf{C} = |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \bullet \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma}) \tag{76}$$

とすると，

$$rot\,\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_x & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z \end{vmatrix} \cos(\mathbf{k} \bullet \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2)$$

$$= \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{C}' \tag{77}$$

ただし，**C'**と **C** は位相差（π/2）のみ異なり，

$$\mathbf{C}' = |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \bullet \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{78}$$

である．故に，ベクトル・ポテンシャルの実表現(72)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

を使うと，

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=1,2} \boldsymbol{k} \times |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \bullet \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{79}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot (\omega_k) \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{73}$$

である．

(79)と(73)を比べれば，各進行波の波数ベクトル$\boldsymbol{k}$と偏光成分σが指定するベクトル・ポテンシャル成分（$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$）が与えられた時，これに対応する電場と磁場成分の間には位相差はない．波数ベクトル$\boldsymbol{k}$とベクトル・ポテンシャル成分の方向$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$の外積（$\boldsymbol{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$）が，**B**の各成分の方向を指定する(図 25-1)．両者は，図

25-1 に示すように，$\boldsymbol{k}$は「右手系 z 軸」，$\mathbf{B}$の各成分は「右手系 y 軸」に対応し，両者は相互に直交している．A，E の各成分の方向$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$は「右手系 x 軸」の方向にあるので，三者は相互に直交している．

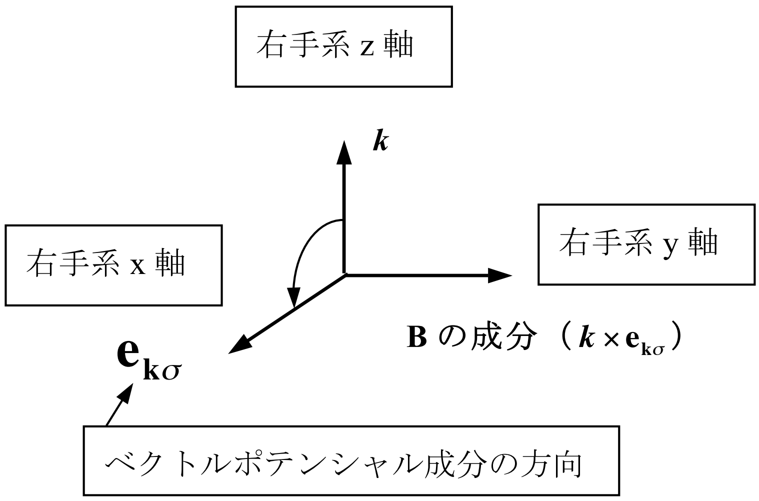

図 25-1.　波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向とベクトルポテンシャル成分，
磁場成分の方向の関係

ベクトル・ポテンシャルの複素表現(71),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+\mathbf{a}^{*}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

を使う場合は,

$$\mathbf{B}=rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=rot\{\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+\mathbf{a}^{*}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\} \tag{80}$$

である．各成分について，実数表現の場合と同じように考えれば良い．演算子は$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$と$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$の項のみに作用する．

$$rot[\,\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ i\cdot k_x & i\cdot k_y & i\cdot k_z\\ [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_x & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z\end{vmatrix}\cdot e^{ik\bullet\mathbf{x}}$$

$$rot[\,\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -i\cdot k_x & -i\cdot k_y & -i\cdot k_z \\ [|\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_x & [|\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y & [|\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)|\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z \end{vmatrix}\cdot e^{-ik\bullet\mathbf{x}}$$

である．これより，

$$rot\,[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

$$= i\,[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

となる．従って，(80)は，

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = i\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\} \qquad (81)$$

である．**B** のこの複素表現は，**E**の複素表現

$$\mathbf{E} = i\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=1,2}\omega_{\mathbf{k}}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \qquad (72)$$

と共に，電磁場のエネルギーを表現する為に以下で利用できる．もちろん，(73),(79)の**E,B**の実表現を使っても良い．

＜電磁場のエネルギー＞

体積 V(＝L^3)の電磁場の全エネルギーを H とすると，§22 で議論したように，

$$H = \int_V u_{e.m.}dV \qquad (82)$$

である． $u_{e.m.}$は単位の体積当たりの電磁場のエネルギーである：

$$u_{e.m.}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\bullet\mathbf{D}(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\bullet\mathbf{B}(\mathbf{x},t)] \qquad (§22\text{-}47)$$

$$u_{e.m.}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0[\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t) + c^2\mathbf{B}^2(\mathbf{x},t)].$$

であるので，

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V [\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t) + c^2\mathbf{B}^2(\mathbf{x},t)] dV \,. \tag{83}$$

である．

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\} \tag{81}$$

$$\mathbf{E} = i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\omega_{\mathbf{k}}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \tag{72}$$

を, (83)　$H = (1/2)\varepsilon_0 \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2) dV$ に代入する．

$\mathbf{E}^2$から考えよう

$$\mathbf{E}^2 = [i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]\bullet[i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]$$

(以後は,　$\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}(t) \to \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}$　,　$\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2} \to \sum_{k.\,\sigma}$　と表記する)

$$= [i\sum_{k,\,\sigma}\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]\bullet[i\sum_{k,\,\sigma}\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]$$

（この積は４種類の和になるから）

$$= -\sum_{k,\sigma}\sum_{k',\sigma'}\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}[(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}'\sigma'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - (\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}'\sigma'})e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$$

$$-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}*_{\mathbf{k}'\sigma'})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + (\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}*_{\mathbf{k}'\sigma'})e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}] \tag{84}$$

である．$\mathbf{E}^2$の各項を体積積分するが，関係するのは，$e^{\pm i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$だけであり，$\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \mathbf{a}*_{\mathbf{k}'\sigma'}$の定ベクトルは無関係である．$e^{\pm i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$のうちの$e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$の積分を考える．

$$I(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = \int_V e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_{\mathrm{x}}\cdot x + (\mathbf{k}+\mathbf{k}')_{\mathrm{y}}\cdot y + (\mathbf{k}+\mathbf{k}')_{\cdot z}\cdot z]} dxdydz$$

$$= \int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_z\cdot z}\int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_{\mathrm{y}}\cdot y}\{\int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_{\mathrm{x}}\cdot x}dx\}dydy \tag{85}$$

{　　}内の x についての積分を考えると

$$(k_x + k'_x) = 0 \to \int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_x\cdot x}dx = L; \qquad (k_x + k'_x) \neq 0 \to \int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_x\cdot x}dx = 0 \tag{86}$$

$(k_x + k'_x) = 0$ の場合は説明を要しない．しかし，$(k_x + k'_x) \neq 0$ の場合は，

$k_x = 2\pi \cdot n_x / L,\ \ k'_x = 2\pi \cdot n'_x / L \quad (n_x, n'_x = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ の条件により

$$\int_0^L e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')_x \cdot x} dx = \frac{-1}{(k_x + k'_x)} \left| sin(k_x + k'_x)x \right|_0^L + i \cdot \frac{1}{(k_x + k'_x)} \left| \cos(k_x + k'_x)x \right|_0^L = 0$$

となる． (85)の y での積分，z での積分に於いても(86)と同じような結果となるので，(85)の積分全体は，

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = L^3 = V \qquad (87\text{-}1)$$

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \qquad (87\text{-}2)$$

となる．

(84)の四項のうち，残りの二つの $e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$，一つの $e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$ の体積積分についても，(87-1)と(87-2)と同様の結果が得られる．

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = V\ L^3 = V \qquad (88\text{-}1)$$

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \qquad (88\text{-}2)$$

$e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$ については，(87-1)と(87-2)を次のように改めればよい，

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = L^3 = V \qquad (89\text{-}1)$$

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \ \ \rightarrow \ \ I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \qquad (89\text{-}2)$$

以上の体積積分では，(88-2)と(88-2)では $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{0}$ の場合，即ち，$\mathbf{k}' = \mathbf{k}$，$\omega_{k'} = \omega_k$ の場合のみが残る．(89-1)と(89-2)では $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ の場合が残るので，この場合も $\omega_{k'} = \omega_{-k} = \omega_k$ であることに注意．従って，(84)の積分全体は

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V \sum_{k,\sigma} \sum_{k,\sigma'} (\omega_\mathbf{k})^2 [-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \bullet \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'}) + 2(\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma} \bullet \mathbf{a}_{\mathbf{k}\,\sigma'}) - (\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma} \bullet \mathbf{a}*_{\mathbf{-k}\sigma'})] \qquad (90)$$

である．右辺側の和（$\sum_{k,\sigma}\sum_{k,\sigma'}$ ）は， $\mathbf{k'=k}$ と $\mathbf{k'=-k}$ だけが残ることことになったので，このように記している．元々は$\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\to\sum_{k,\sigma}$ との表記による．$\mathbf{k'=k}$ と $\mathbf{k'=-k}$ だけが残ることも考慮すると，

$$\sum_{k,\sigma}\sum_{k',\sigma'}\to\sum_{k,\sigma}\sum_{k,\sigma'}=\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}\sum_{k}\sum_{\sigma'=1,2}\to\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}$$

と，$\mathbf{k'}$ を落とした和となる：

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}(\omega_{\mathbf{k}})^2[-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'})+2(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})-(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}\sigma'})]. \tag{91}$$

である．

磁場のエネルギーも同様に表現出来る．

$$\mathbf{B}=rot\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\} \tag{81}$$

を用いて，$\int_V \mathbf{B^2}d\mathbf{x}^3$ を求めれば良い．

$$\mathbf{B}^2=\{i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\}\bullet$$

$$\{i\sum_{k}\sum_{\sigma=1,2}[\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]\}$$

（再度　$\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t),\ \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\to\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma},\ \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}$　と t を省略する）

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^2=(-1)\sum_{k,\sigma}\sum_{k',\sigma'}[&(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}'\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}'\sigma'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}\\&-(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}'\times\mathbf{a}^*)_{\mathbf{k}'\sigma'}\cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}\\&-(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}'\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}'\sigma'})\cdot e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}\\&+(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}'\times\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}'\sigma'})\cdot e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}]\end{aligned} \tag{92}$$

これを体積積分すれば，(88-1)，(88-2), (89-1), (89-2) のように，第一と第四項は $(\mathbf{k}+\mathbf{k}'=\mathbf{0})$ のみが残り，第二項と第三項は $(\mathbf{k}-\mathbf{k}'=\mathbf{0})$ のみが残る．何れの項も体

積積分は V となる．即ち，

$$\int_V \mathbf{B}^2 d\mathbf{x}^3 = (-1)V\sum_{k,\sigma}\sum_{k,\sigma'}[(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(-\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{-k}\sigma'}) - (\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a*})_{\mathbf{k}\,\sigma'}$$

$$-(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) + (\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(-\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma'})]$$

$$= V\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}[(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{-k}\sigma'}) + 2(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})$$

$$+(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma'})] \qquad (93)$$

ここには$(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{-k}\sigma'})$のような「ベクトル外積の内積」が現れるが，これらはベクトル解析の公式,

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})\cdot(\mathbf{B}\bullet\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\bullet\mathbf{D})\cdot(\mathbf{B}\bullet\mathbf{C}) \qquad (94)$$

を使って（この公式が成立することは，外積と内積の定義の戻り，成分 x，y，z に付いて考えれば確認出来る），

$$(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) = (\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k})\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) - (\boldsymbol{k}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\boldsymbol{k})$$

となる．しかし，第二の項は，波数ベクトルとベクトル・ポテンシャルの各偏光成分が直交していることから，消えるので,

$$(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})\bullet(\boldsymbol{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) = (\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k})\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) = \boldsymbol{k}^2\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) \qquad (95)$$

となる．他の場合の同様な結果となる．従って，(93)は

$$\int_V \mathbf{B}^2 d\mathbf{x}^3 = V\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}(\boldsymbol{k}^2)[(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\ \mathbf{a}_{\mathbf{-k}\sigma'}) + 2(\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) + (\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}*_{\mathbf{k}\sigma'})] \qquad (96)$$

である．

電磁場の全エネルギーは,

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V[\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t) + c^2\mathbf{B}^2(\mathbf{x},t)]dV\,. \qquad (83)$$

であるから,

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}(\omega_{\mathbf{k}})^2[-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'})+2(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})-(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}\sigma'})]. \qquad (91)$$

と(96)を使えば良いが,

$$(\omega_k)^2 = c^2k^2 = \frac{k^2}{\varepsilon_0\cdot\mu_0} \qquad (97)$$

の関係があったことにも留意すると,

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V[\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t)+c^2\mathbf{B}^2(\mathbf{x},t)]dV$$

$$= \frac{1}{2}V\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}(\varepsilon_0)(\omega_{\mathrm{k}})^2[-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\ \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'})+2(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})-(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma'})$$

$$(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\ \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'})+2(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})+(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma'})]$$

となり，一行目と二行目の中央の項のみが残り結果は簡単になる.

$$H = 2V\cdot\varepsilon_0\sum_{k,\sigma}\sum_{\sigma'}(\omega_{\mathrm{k}})^2[(\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\bullet\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'})$$

$$= 2V\cdot\varepsilon_0\sum_{k,\sigma}\ \sum_{\sigma'}(\omega_{\mathrm{k}})^2(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})^2\cdot\delta_{\sigma,\sigma'} = 2V\cdot\varepsilon_0\sum_{k}\ \sum_{\sigma=1,2}(\omega_{\mathrm{k}})^2(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})^2 \qquad (98)$$

$\delta_{\sigma,\sigma'}$は，偏光成分が同じならば１，異なれば両者は直交するよう選んであるから０である．これは偏光成分の振幅の二乗和と同じことになる．電磁場の全エネルギーは大変簡単な表現で与えられる．この(98)は，調和振動子のエネルギーと同じ形式になっている．これを次ぎに確認しよう．

＜電磁場の全エネルギーと調和振動子のエネルギーの対応＞

$\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma} \to \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ と表記を元に戻す．以下のように，実表現に対応する新変数を以下のように定義する．

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \equiv (V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)+\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] \qquad (99\text{-}1)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \equiv \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}}(V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)-\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] \qquad (99\text{-}2)$$

これらは「一般化座標」と「一般化運動量」に当るが，これらを使って，以下の量を求めると，

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\sigma}[\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)+(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)]=2V\varepsilon_0\sum_{\mathbf{k}\,\sigma}(\omega_{\mathbf{k}})^2\cdot\mathbf{a}^2{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)=H \tag{100}$$

となり，電磁場の全エネルギーに等しい． (99-2)から，(100)は，

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\sigma}[\dot{\mathbf{Q}}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)+(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)]=2V\varepsilon_0\sum_{\mathbf{k}\,\sigma}(\omega_{\mathbf{k}})^2\cdot\mathbf{a}^2{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)=H$$

とも表現できる．

次に，$\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$と$\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$は，ハミルトンの正準方程式を満たすことを確認しよう． (99-1)と(99-2)より，両者の時間微分は，

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t)=(V\varepsilon_0)^{1/2}[\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}(t)+\dot{\mathbf{a}}^*{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)]=-i\omega_{\mathbf{k}}(V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)-\mathbf{a}^*{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)]$$

$$=\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \tag{101}$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},\sigma}(t)\equiv\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t)=-i\omega_{\mathbf{k}}(V\varepsilon_0)^{1/2}[\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}(t)-\dot{\mathbf{a}}^*{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)]$$

$$=-(\omega_{\mathbf{k}})^2(V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)+\mathbf{a}^*{}_{\mathbf{k}\sigma}(t)]\ =-(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \tag{102}$$

である．さらに， H（電磁場の全エネルギー：Hamiltonian）は，

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\sigma}[\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)+(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}^2{}_{\mathbf{k},\sigma}(t)] \tag{100}$$

だから，以下のハミルトンの正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial P_{k\sigma}}=\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t),\qquad -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{k\sigma}}=\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \tag{103}$$

が成立することを確認できる．(100)の H を$\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$と$\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$でそれぞれ偏微分すると，

$$\frac{\partial H}{\partial P_{k\sigma}}=\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)=\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t),\qquad -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{k\sigma}}=-(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)=\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$$

と，それぞれの第一の等式となる．しかし， (101) の$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t)=\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$と(102)の

$\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \equiv \ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) = -(\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$を使うと，それぞれの第二の等式が成立する．これは(103)のハミルトンの正準方程式である．

このように，$\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$と$\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$は，ハミルトンの正準方程式を満たす正準共役な「座標」と「運動量」である．真空電磁場（輻射場）を正準量子化する際に必要なステップでもある．

一方，良く知られているように，質量 m，バネ定数 K の調和振動子の運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx = -m\omega^2 x, \qquad \omega = \sqrt{\mathrm{K/m}}$$

である．この方程式に，$x = q\cdot\cos(\omega t + \alpha)$を代入すると，これが解であることが判る．この調和振動子の全エネルギー（Hamiltonian）を H_0とすると，

$$H_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}K^2x^2 \quad = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot x^2 \tag{104}$$

である．(104)で，

$$Q \equiv \sqrt{m}x, \qquad P \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}p \tag{105}$$

の変換を行う．

$$P \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}p = \frac{1}{\sqrt{m}}(m\dot{x}) = \sqrt{m}\dot{x} \ = \dot{Q} \tag{106}$$

を意味している．従って，(104)は次のように表現出来る：

$$H_0 = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2\cdot Q^2 \tag{107}$$

故に，調和振動子の(Q, P)は

$$\frac{\partial H_0}{\partial P} = \dot{Q}, \qquad -\frac{\partial H_0}{\partial Q} = \dot{P} \tag{108}$$

のハミルトンの正準方程式を満たす．調和振動子の(Q, P)は

$$Q \;\leftrightarrow\; \mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)\,, \qquad \mathrm{P} \;\leftrightarrow\; \mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \tag{109}$$

と電磁場の（$\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$，$\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t)$）に対応する．

真空電磁場ベクトル・ポテンシャルの平面進行波偏光成分に対する$(\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma},\mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma})$は，調和振動子の$(Q, P)$と同じように，ハミルトンの正準方程式を満たす正準共役な「座標」と「運動量」である．ハミルトンの正準方程式のレベルで，ベクトル・ポテンシャル波動成分と力学的調和振動子は相互に対応している．

このようにして，真空電磁場のベクトル・ポテンシャルの平面波展開から，真空電磁場は「無数の調和振動子の集合」と等価であるとの結論になる．これは Jeans の定理と呼ばれる．この定理とエネルギー等分配を結合した結果は，Rayleigh-Jeans の式として，空洞輻射（黒体輻射）を説明する式と考えられた．しかし，輻射密度が無限大に発散してしまう困難が伴う．エネルギー量子論と Planck 分布が提案される一つの契機になった．