

## § 6 ストークスの定理と静電ポテンシャル

ストークスの定理は、線積分と面積分を結びつける数学の定理である。発散定理（ガウスの定理）と同様に、電磁気学との関わりでも重要であり、静電ポテンシャルなどとの関連をのべる。

### 1) 静電場内で電荷を準静的変位させるに必要な仕事

静電場内で、電荷 ( $q$ ) を静的に無限大の時間をかけて移動させることを考える。このような電荷の準静的変位に必要な仕事を考える。

図 6-1 に示すように、電荷 ( $q$ ) を、静電場 ( $\mathbf{E}$ ) 内の経路 ( $C$ ) に沿って準静的に移動させる。電場内で電荷は  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  の力を受けるが、準静的変位を考えているので、限りなく静的釣り合い状態に近い状態を実現させねばならない。その為には、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  を常に打ち消すように、外的な力  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$  を作用させねばならない。さらに、経路 ( $C$ ) に沿って準静的に移動させるのであるから、この経路に沿う方向（接線方向）の微小な変位 ( $\Delta\mathbf{s}$ ) を考える。外力による変位  $\Delta\mathbf{s}$  に伴う仕事は、外力  $\mathbf{F}'$  とこの変位  $\Delta\mathbf{s}$  の内積である。

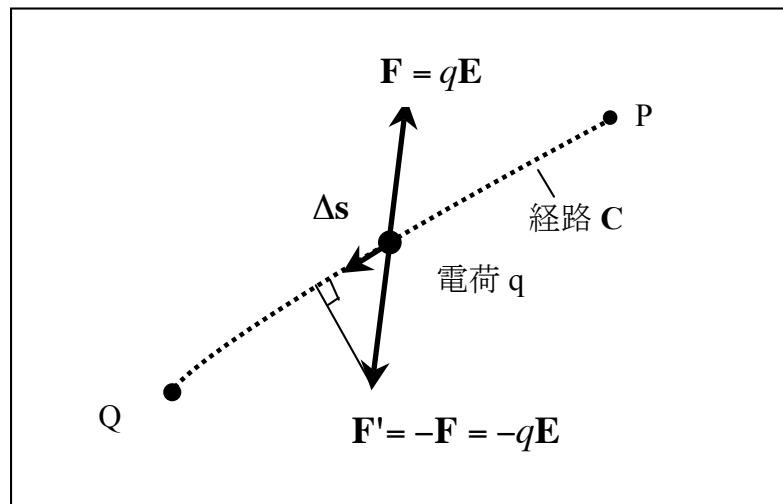


図 6-1.  $\Delta\mathbf{s}$  は静電場内に指定された経路  $C$  に沿うベクトルで、この始点にある電荷  $q$  が準静的変位  $\Delta\mathbf{s}$  を行うとすると、これに必要な外力がなす仕事は、 $\Delta\mathbf{s}$  と  $\mathbf{F}'$  の内積、 $\mathbf{F}' \cdot \Delta\mathbf{s} = -q\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$ 、である。

経路  $C$  の始点と終点は  $P$  と  $Q$  であるなら、途中の経路を  $\Delta\mathbf{s}_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) に分割

して、 $\mathbf{F}' \cdot \Delta \mathbf{s}_k = -q \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{s}_k$  を全て足し合わせた結果は、電荷  $q$  を経路  $C$  に沿って準静的に移動させるに必要な仕事  $W$  になる。

$$W = \sum_{k=1}^n (-q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_k) \rightarrow (-q) \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

$\Delta \mathbf{s}_k \rightarrow 0$  の極限を考えて、ベクトル場における任意ベクトル ( $\mathbf{A}$ ) と経路  $C$  に沿う線要素  $d\mathbf{s}$  との積分 (内積の和の極限) は、ベクトル  $\mathbf{A}$  の線積分とよばれ、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds \quad (2)$$

と記す。経路  $C$  に沿う線要素  $d\mathbf{s}$  はベクトルであるので、経路の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t}$  として、線要素  $d\mathbf{s}$  の大きさ  $|d\mathbf{s}| = ds$  を用いて、 $d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds$  として表現する場合もある。(2)の右側の表記がこれに当たる。以下では、(2)の左側の表記を用いる。

(1)の「電荷  $q$  を経路  $C$  に沿って準静的に移動させるに必要な仕事  $W$ 」は、電場ベクトルの線積分に  $(-q)$  を掛けたものである。これに関する議論は後にさらに行うが、その前に、ベクトルの線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  や  $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  について重要な事項を述べる。

## 2) ベクトルの線積分が経路に依存しない条件

図 6-1 の例では、経路  $C$  の始点と終点は  $P$  と  $Q$  であるから、電場ベクトル  $\mathbf{E}$  の線積分は、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3)$$

と表現される。しかし、ベクトル  $\mathbf{E}$  は経路  $C$  上の点の値に限られているから、(3)右辺の表現のように、始点  $P$  と終点  $Q$  だけを示す表記では問題が起こる可能性がある。始点  $P$  から終点  $Q$  に至る経路は、指定された経路  $C$  以外にも無数にあり、途中の経路が異なれば線積分も異なる可能性がある。

しかし、ある特別の条件があると、ベクトルの線積分は、始点と終点だけ値で決まってしまう、途中の経路には依存しない。そのような場合は、(3)右辺の表現のように、始点  $P$  と終点  $Q$  だけの表記で十分なのである。このその特別な条件とは、

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4)$$

である。静電場ではこれが成立している。しかし、時間変動する電場では、磁場が絡むのでこれは成立しない。この問題は後に議論するとして、静電場での  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  が、何故、ベクトルの線積分が経路に依存しない条件となるのかを考えよう。その理由は任意のベクトル場でストークスの定理が成立するからである。

### 3) ストークスの定理

発散定理（ガウスの定理）は面積分を体積積分に変換するものであったが、ストークスの定理は、線積分が面積分に代わることを保証する定理である。即ち、空間の位置  $\mathbf{x}$  に対して与えられるベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  について、

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (5)$$

が成立する。ただし、 $C$  は任意の閉曲線で、 $S$  は閉曲線  $C$  が取り囲む任意の曲面で、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  は面  $S$  の表面要素に立てた単位法線ベクトルである（図 18）。

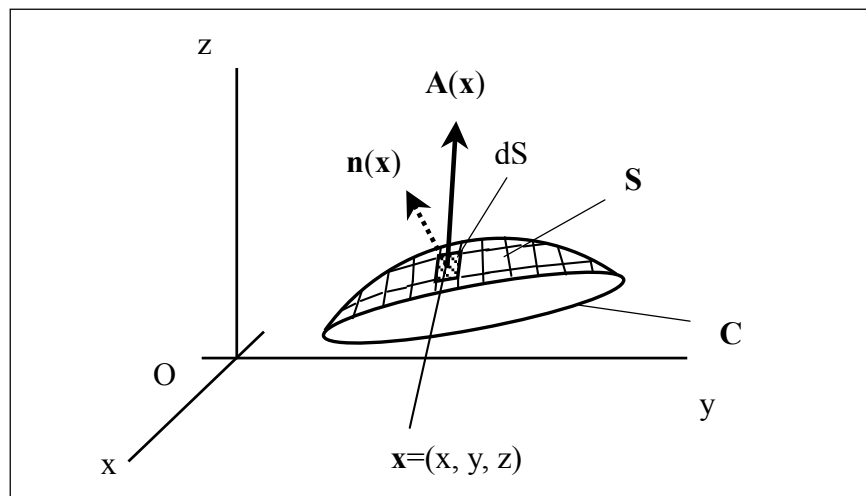


図 6-2. 3次元空間の任意の閉曲線  $C$  が取り囲む任意の閉曲面を  $S$  とし、この面上の点  $\mathbf{x}=(x, y, z)$  でベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  は与えられている。 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  は  $S$  の表面要素に立てた単位法線ベクトルである。

(§ 4-1)で述べたように、ベクトルの回転  $\text{rot } \mathbf{A} (= \text{curl } \mathbf{A})$  は、

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

であるから、(5) の右辺を成分で書くと、

$$\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad (6)$$

である。

### <二次元平面での ストークスの定理>

初めに、二次元平面でストークスの定理を証明する。

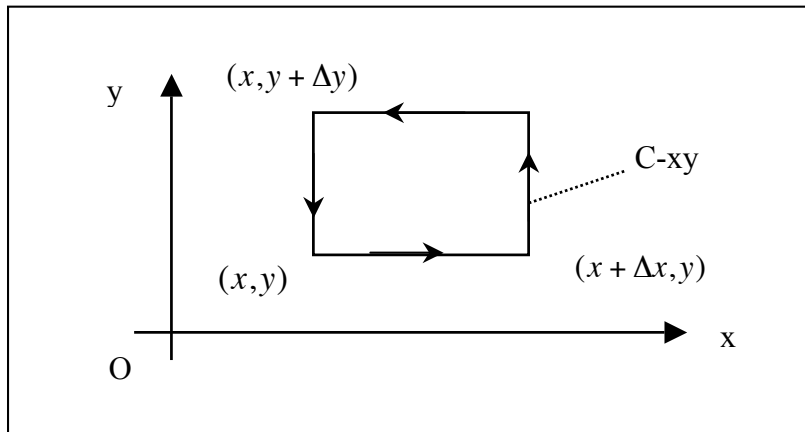


図 6-3. 閉曲線 C-xy についてのベクトル  $\mathbf{A}(x,y)$  の線積分

図 6-3 の閉曲線 C-xy についてのベクトル  $\mathbf{A}(x,y)$  の線積分は、

$$\begin{aligned} \int_{C-xy} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= A_x(x,y)\Delta x + A_y(x+\Delta x,y)\Delta y + A_x(x,y+\Delta y)(-\Delta x) + A_y(x,y)(-\Delta y) \\ &= \frac{-[A_x(x,y+\Delta y) - A_x(x,y)]}{\Delta y} \Delta x \Delta y + \frac{A_y(x+\Delta x,y) - A_y(x,y)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y = [\text{rot}\mathbf{A}(x,y)]_z \Delta x \Delta y \quad (7) \end{aligned}$$

(7)の最後の二項では、 $A_x(x+\Delta x,y+\Delta y)$ ではなく $A_x(x,y+\Delta y)$ が、 $A_y(x,y+\Delta y)$ の代わりに $A_y(x,y)$ が使われていることに注意。

一方、図 6-4 に示す面積要素 $\Delta S(xy)_k$ と、これを囲む長方形を反時計廻りで

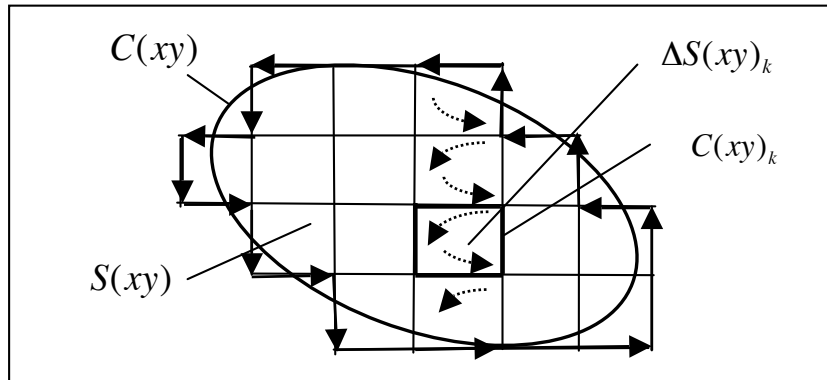


図 6-4. 閉曲線  $C(xy)$  が取り囲む平面  $S(xy)$  をグリッドで分割し，その面積要素を  $\Delta S(xy)_k$  として，これを囲む長方形を反時計回りで一周する閉曲線を  $C(xy)_k$  とする．

一周する閉曲線要素  $C(xy)_k$  を，(7) に当てはめる．その結果，閉曲線  $C(xy)$  の線積分は，グリッド分割した面積素片  $\Delta S(xy)_k$  を囲む長方形を反時計廻りに一周する閉曲線  $C(xy)_k$  についての線積分の総和に等しい．この総和では，内部の領域は隣り合う辺でその線積分が相殺し，端の線積分のみが残るので，閉曲線  $C(xy)$  の線積分自体に等しくなる．グリッド近似は，長方形要素を小さくして行けば改善されるので，そのような極限を考える．即ち，

$$\int_{C(xy)} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_k \int_{C(xy)_k} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (8)$$

である．この右辺の和の各項は (7) の右辺に等しいので，

$$\int_{C(xy)} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_k [\text{rot} \mathbf{A}(x,y)]_z \Delta S(xy)_k = \int_{S(xy)} [\text{rot} \mathbf{A}(x,y)]_z dS(xy) \quad (9)$$

である．(9)の右辺は，「ベクトル  $\mathbf{A}$  の回転」としてのベクトルの  $z$  成分の値を， $z$  軸に垂直な  $xy$  面の面積素片に掛けて，これらの総和をとったのも，即ち，面積分したものである．(9)は，閉曲線が  $xy$  面内に限定されている場合のストークスの定理，即ち，二次元平面におけるストークスの定理である．

二次元平面におけるストークスの定理は， $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  を  $xy$  平面内の二次元ベクトルとして， $P(x,y)$  と  $Q(x,y)$  をその  $x, y$  成分とすると，(9)の左辺は，内積でスカラーであるから，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (10)$$

となる。右辺の括弧内は,  $\text{rot } \mathbf{A}$  の  $z$  成分であるので, (9) 右辺と同じく,  $x, y$  成分で表現できる。結局, 二次元平面におけるストークスの定理(9) は,

$$\int_{C(xy)} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_{S(xy)} \left[ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dx dy \quad (11)$$

とも表現できる。

(11)は, 数学のテキストでは”グリーンの定理”と呼ばれることがある。しかし, 通常物理学のテキストでは, ”グリーンの定理”は §7 で述べる別の定理を指す。この状況は困ったことであるが, ここでは, 通常物理学のテキストの用語法に従い, (11)は「二次元平面におけるストークスの定理」とし, ”グリーンの定理”とは呼ばないことにする。

< 3次元でのストークスの定理 >

二次元平面におけるストークスの定理 (9), (11)を用いて, 3次元でのストークスの定理を証明する.

図 6-5 に示すように, (9)は, 3次元空間における閉曲線  $C$ , 閉曲面  $S$ ,  $A(\mathbf{x})$ ,  $dS$  を, 二次元の  $xy$  平面に投影した結果である.

$$\int_{C(xy)} A(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}' = \int_{S(xy)} [\text{rot}A(\mathbf{x})]_z dS' \quad (9)$$

また(11)は, この投影結果をベクトルではなく, 成分で表現したものである. ベクトル  $A(\mathbf{x})$  の  $x, y$  成分をそれぞれ  $P(x,y)$  と  $Q(x,y)$  として,

$$\int_{C(xy)} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_{S(xy)} \left[ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dx dy \quad (11)$$

である. ここでは, 図 6-5 を参照して, 投影結果を元に戻すことを考える.

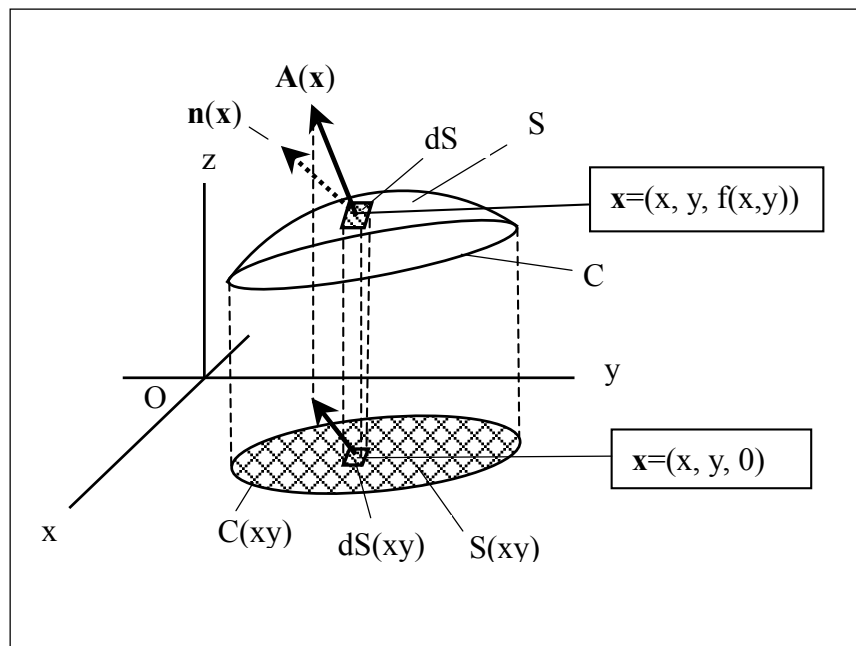


図 6-5. 3次元の閉曲線  $C$  と閉曲面  $S$  の  $xy$  平面への投影.

(9), (11)の2次元のストークスの定理に依拠して, 3次元のストークスの定理

$$\int_C A(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \text{rot}A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (5)$$

を証明するのだが, その前に, (5)を成分で表現しておこう.

$$\int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

$$= \int_S [(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})n_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})n_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})n_z] dS$$

となる。3次元ベクトル  $\mathbf{A}$  の各成分について、以下の等式が成立することを示せば良い。

$$\int_C A_x dx = \iint_S (\frac{\partial A_x}{\partial z} n_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} n_z) dS \quad (5-1)$$

$$\int_C A_y dy = \iint_S (\frac{\partial A_y}{\partial x} n_z - \frac{\partial A_y}{\partial z} n_x) dS \quad (5-2)$$

$$\int_C A_z dz = \iint_S (\frac{\partial A_z}{\partial y} n_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} n_y) dS \quad (5-3)$$

(5-1), (5-2), (5-3)の両辺を加えれば、(5)となるからである。

まず、(5-1)が成立することを示す。(5-2), (5-3)は同様にして確認できる。

図 6-5 に示したように、閉曲面  $S$  上の点  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  は、 $xy$  面に投影されると、 $\mathbf{x} \equiv (x, y, 0)$  に移る。この点  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  の  $z$  成分を  $z = f(x, y)$  と置くと。

$$\mathbf{x} \equiv (x, y, z) = (x, y, f(x, y)) \quad (12)$$

であり、この閉曲面  $S$  上の点は、 $(x, y)$  の組を与えれば、 $z$  の値も決まる。

そこで、閉曲面  $S$  上の点  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  で定義される任意のベクトル  $\mathbf{A}$  の  $x$  成分を考えると、

$$A_x(x, y, z) = A_x(x, y, f(x, y)) = B_x(x, y) \quad (13)$$

と書ける。 $A_x$  と  $B_x$  は値としては同一であるが、関数形は一般に  $A_x$  と  $B_x$  では異なるはずなので記号を変えた。そこで、両辺を  $y$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial B_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad (14)$$

である。これに注意して、二次元平面におけるストークスの定理(11)で、

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial B_x(x, y)}{\partial y}, \text{ 即ち, } P(x, y) \rightarrow B_x(x, y) \text{ と対応させ, } Q(x, y) = 0 \text{ とすること}$$

により、 $Q(x, y)$ に関する項は消える。その結果、

$$\int_{C(xy)} B_x(x, y) dx = \iint_{S(xy)} [-\frac{\partial B_x(x, y)}{\partial y}] dx dy \quad (15)$$



となる。二次元平面におけるストークスの定理(11)は xy 平面での結果であるから、図 6-5 での閉曲線 C(xy), 閉曲面 S(xy)に対応して(15) が成立している。しかし、(13)の関係があるので、(15) 左辺の線積分は、元の閉曲線 C についての x 成分の線積分と全く同等である。

$$\int_{C(xy)} B_x(x,y)dx = \int_C A_x(x,y,z)dx = \iint_{S(xy)} \left[-\frac{\partial B_x(x,y)}{\partial y}\right]dxdy$$

一方、(15)右辺の積分を、閉曲面 S の面積素片による積分で表現するには、括弧内は(14)で置き換えねばならない。(15) の  $dxdy$  は xy 平面  $S(xy)$  ので面積素片であるから、これは元の閉曲面 S の素片  $dS$  に単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  の z 成分を掛けたもの、 $n_z(\mathbf{x})dS = \cos\theta dS$  である。従って、(15)は、

$$\int_C A_x(x,y,z)dx = - \iint_S \left[\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right]n_z(\mathbf{x})dS \quad (16)$$

となる。閉曲線 C に関する線積分と、閉曲面 S についての面積分との関係式となった。しかし、(16) は、まだ、(5-1)右辺の形になってはいない。

(16)が(5-1)右辺に等しいことを示すには、次に述べる「面の方程式とその面上の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  の関係」を使う。

### <面の方程式とその面上の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ の関係>

曲面 S 上の点  $\mathbf{x} = (x,y,z)$  を考えて、その点で面要素に垂直に立てた単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  を拡大したのが図 6-6 である。この単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  の成分はその方向余弦を用いて、

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_x, n_y, n_z) = (\cos\phi, \cos\varphi, \cos\theta) \quad (17)$$

とする。また、曲面 S 上の点  $\mathbf{x} = (x,y,z)$  は、

$$F(x,y,z) = 0 \quad (18)$$

を満足しているとする。即ち、(18)は曲面 S の方程式である。

点  $\mathbf{x}' = (x+dx, y+dy, z+dz)$  は一般にどこに考えても良いが、ここでは点  $\mathbf{x} = (x,y,z)$  から  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  に沿って僅かにずれた点とする。これは図 6-6 に示した面 S' 上の点である。面 S' は、S から法線方向に  $r = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$  の距離だけ

ずれた面である。S に対し垂直方向にずれているので、面 S' は面 S に平行である。面 S の方程式が  $F(x,y,z)=0$  である時、面 S' 上の点  $\mathbf{x}'=(x+dx,y+dy,z+dz)$  の座標値を  $F(x,y,z)$  に代入したら、どのような値になるかを考える。

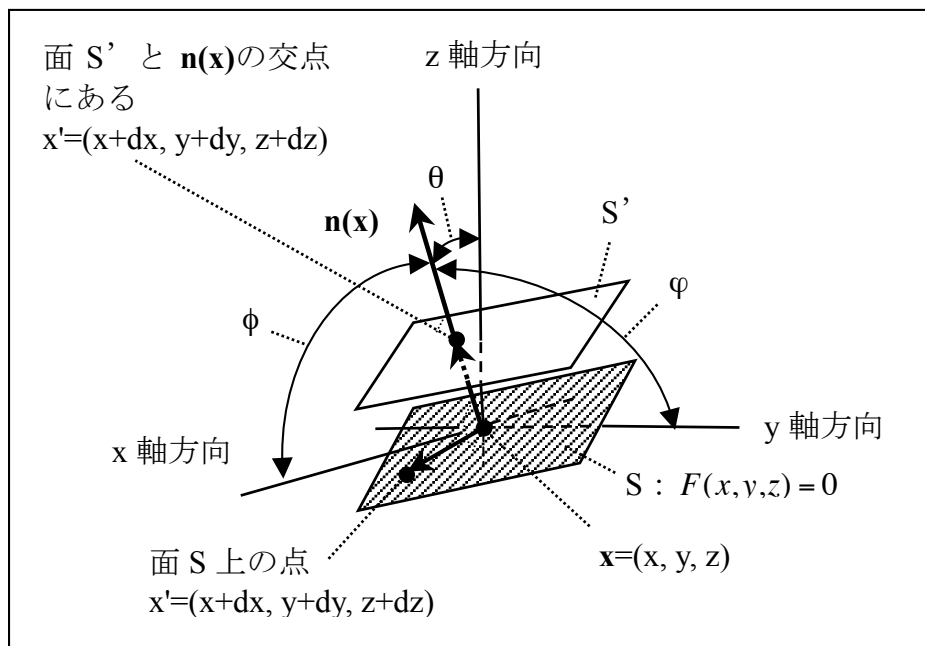


図 6-6. 面 S の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  と面 S の方程式が  $F(x,y,z)=0$  である時、 $\nabla F(=gradF)$  は、面 S に直交し、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  に比例する。

この場合の  $\mathbf{x}'=(x+dx,y+dy,z+dz)$  の座標値を代入しても、0 にはならないはずだから、 $F(x,y,z)=0$  の右辺のことはしばらく忘れて、 $F(x,y,z)$  のことだけを考える。  $F(x,y,z)$  は  $x, y, z$  の関数で、スカラーだから、 $\mathbf{x}'=(x+dx,y+dy,z+dz)$  での  $F(x+dx,y+dy,z+dy)$  の値は、3変数の関数の全微分を使って、次のように表現できる。

$$dF(x,y,z) \equiv F(x+dx,y+dy,z+dy) - F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (19)$$

しかし、 $F(x,y,z)=0$  であることを思い出せば、

$$\begin{aligned} dF(x,y,z) &= F(x+dx,y+dy,z+dy) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = (\nabla F) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (20)$$

である。図 6-6 では、 $\mathbf{dx} = (dx, dy, dz)$  は、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$  から  $\mathbf{x}' = (x + dx, y + dy, z + dz)$  へ向かうベクトルであり、 $\mathbf{dx}$  は単位法線ベクトル

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_x, n_y, n_z) = (\cos\phi, \cos\varphi, \cos\theta)$$

を  $r$  倍したものであるから、

$$\mathbf{dx} = r \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = r \cdot (n_x, n_y, n_z) = r \cdot (\cos\phi, \cos\varphi, \cos\theta)$$

である。

次に、 $\mathbf{x}' = (x + dx, y + dy, z + dz)$  が面  $S$  上にある場合、即ち、 $\mathbf{dx}$  が面  $S$  上にある場合を考える。  $F(x, y, z) = 0$  であると同時に、この場合は、 $F(x + dx, y + dy, z + dy) = 0$  であるから、(20)に相当する式は、

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = (\nabla F) \cdot \mathbf{dx} = 0 \quad (21)$$

となる。ベクトル  $\nabla F (= \text{grad}F)$  は面  $S$  に直交している。従って、面  $S$  に考えた単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  は  $\nabla F (= \text{grad}F)$  と同じ向きにある。  $c$  を定数として、 $\nabla F = c \cdot \mathbf{n}$  であるから、

$$c = \frac{(\partial F / \partial x)}{n_x} = \frac{(\partial F / \partial y)}{n_y} = \frac{(\partial F / \partial z)}{n_z} \quad (22)$$

となる。

### < 曲面の方程式が $z = f(x, y)$ の場合 >

曲面  $S$  の方程式が  $z = f(x, y)$  と与えられている場合を考える。  $F(x, y, z) = 0$  の形に直すと、

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

である。従って、

$$\partial F / \partial x = \partial f / \partial x, \quad \partial F / \partial y = \partial f / \partial y, \quad \partial F / \partial z = -1$$

となる。(22)は、

$$c = \frac{(\partial f / \partial x)}{n_x} = \frac{(\partial f / \partial y)}{n_y} = \frac{-1}{n_z}$$

である。故に

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{n_x}{n_z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{n_y}{n_z} \quad (23)$$

と表現できる．ここ結果を(16)右辺に用いる．

### < 3次元のストークスの定理の続き >

(16)に戻る．

$$\int_C A_x(x,y,z)dx = - \iint_S \left[ \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] n_z(\mathbf{x}) dx dy \quad (16)$$

(16)右辺第二項に，(23)の  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{n_y}{n_z}$  を代入して，

$$\int_C A_x(x,y,z)dx = - \iint_S \left[ \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} n_z(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial z} \cdot n_y(\mathbf{x}) \right] dS \quad (24)$$

となる．これは(5-1)に他ならない．同様にして，(5-2), (5-3)も確認できる．従って，(5-1), (5-2), (5-3)の和である(5)，即ち，**3次元のストークスの定理**が成立する．

図 6-5 での 3次元の閉曲線 C と閉曲面 S の xy 平面への投影では，投影された点  $(x, y, 0)$  には 3次元空間の点  $(x, y, z)$  が一対一対応することを前提とした．もし，二つ以上の 3次元空間の点が対応する場合は，これらの点を分離するように閉曲面 S を分割し，後で加えれば，分割部分は相殺するので，**ストークスの定理**は同じように成立する．

#### 4) 線積分が経路に依存しない条件とストークスの定理

既に述べたように、ストークスの定理、

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (5)$$

を用いると、ベクトルの線積分は、始点と終点だけの値で決り、途中の経路には依存しないための必要十分条件は、

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3)$$

であることを証明できる。

$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ として、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (25)$$

が常に成立している。(25)で、 $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  であれば、電場の閉曲線についての線積分が0となる：

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (26)$$

図 6-7 のように、閉曲線 C は、二つの部分経路に分割できる。しかし、分割

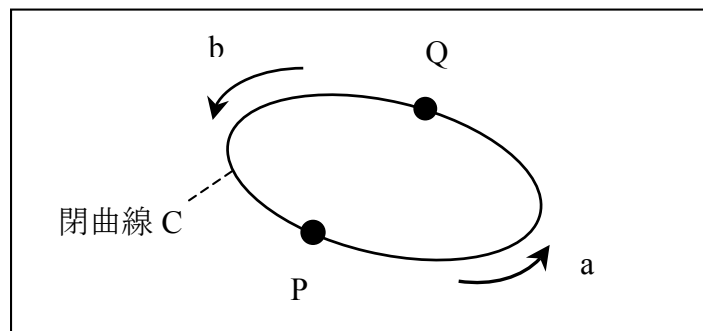


図 6-7. 閉曲線 C の分割を二つの経路の分割する。

しても全体が0であることは変わりはない。

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{P \rightarrow a}^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{Q \rightarrow b}^P \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{P \rightarrow a}^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{P \rightarrow b}^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

これより、

$$\int_{P \rightarrow a}^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{P \rightarrow b}^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (27)$$

である。 $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  であれば、(27) から、電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  の線積分は、始点

と終点だけ値で決まってしまう、途中の経路には依存しない。

逆に、(26)が成立しているなら、C は任意なので、S も任意である。故に、

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0 \quad \text{は} \quad \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{を意味する。}$$

以上のように、 $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  (3)は、ベクトル E の線積分が、始点と終点だけの値で決り、途中の経路には依存しないための必要十分条件であることが判る。

### 5) クーロン電場は $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ を満足する

クーロン則によって与えられる電場が、実際に、 $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  を満足していることを確認する。

電荷密度  $\rho(\mathbf{x})$  が与えられた場合、電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  は、 (§ 3-1-3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dx' \right] \right\} \right] \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3 \mathbf{x}' \end{aligned} \quad (\S 3-1-3)$$

であった。これから  $\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x})$  をつくる。まず、この x 成分から考える。

$$\begin{aligned} [\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x})]_x &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3 \mathbf{x}' \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3 \mathbf{x}' \right] \right\} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \right\} \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3 \mathbf{x}' \end{aligned} \quad (28)$$

括弧内には同じような偏微分が現れる。第一項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(z - z')}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \right] \\ &= (z - z') \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (29-1)$$

同様に、第二項は、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] = (y-y') \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} \right] \quad (29-2)$$

となる。同じ式の  $y, z$  の偏微分であり、 $x$  の偏微分も同様である。  $y$  の偏微分の結果は、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} \right] = \frac{(-3/2) \cdot 2 \cdot (y-y')}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{5/2}}$$

となることが判る。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] &= \frac{-3(x-x')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] &= \frac{-3(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] &= \frac{-3(z-z')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5} \end{aligned} \quad (30)$$

である。従って、(29-1), (29-2) に戻ると、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(z-z')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] = \frac{-3(z-z')(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] = \frac{-3(y-y')(z-z')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5}$$

両者は同じである。即ち、(28)の積分にある{ }内は0である。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(z-z')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] = 0$$

このように、確かに (28)の  $[\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x})]_x = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0$  が成立している。  $y, z$  成分についても同様に確認できる。このように、クーロン則による電場、クーロン電場は、実際に、  $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  を満足していることがわかる。

## 6) 静電ポテンシャルと電位差

§ 4-5 にまとめたように、 $\text{rot}$  に関しては幾つかの恒等式が成立する。 § 4-5-1 の恒等式は、任意のスカラー関数  $f(x,y,z)$  の勾配、  $\text{grad} f = \nabla f$ , の回転を取ると0となるものである。

$$\text{rot} (\text{grad} f(x,y,z)) = \text{rot} \text{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (\S 4-5-1)$$

クーロン電場では  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  が成立しているので、この恒等式と組み合わせて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x}) \quad (31)$$

であることが判る。  $\phi(\mathbf{x})$  はスカラー関数で、**静電ポテンシャル**、**静電位**と呼ばれる。マイナス符号は、電場は高い電位から低い電位に向うからである。

次に、**静電ポテンシャル**  $\phi(\mathbf{x})$  は電荷密度  $\rho(\mathbf{x})$  を用いてどのように表現できるかを考える。既に(28)で使ったように、電荷密度  $\rho(\mathbf{x})$  が与えられた場合の電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  は (§ 3-1-3) であるから、(31) と比べれば良い。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3\mathbf{x}' \quad (\text{§ 3-1-3})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x}) \quad (3)$$

(§ 3-1-3) 左辺の式の中から  $-\text{grad}$  を括り出すことが出来れば、その後に残るのが  $\phi(\mathbf{x})$  である。

そこで、(30) の結果を再度考えよう。(30) の三つをまとめて書くと、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] = \frac{-3(\alpha - \alpha')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5}, \quad (\alpha = x, y, z) \quad (32)$$

である。  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$  が  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  になっても、類似の結果になることは直ぐに確認できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{|(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2|^{1/2}} \right] \\ &= \frac{(-1/2) \cdot 2(\alpha - \alpha')}{|(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2|^{3/2}} = \frac{-(\alpha - \alpha')}{|(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2|^{3/2}} \end{aligned}$$

即ち、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{-(\alpha - \alpha')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (\alpha = x, y, z) \quad (33)$$

である。右辺の負符号を左に移せば、

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{(\alpha - \alpha')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (\alpha = x, y, z) \quad (33')$$

この左辺は  $-\text{grad}$  の  $\alpha$ -成分であり、右辺は (§ 3-1-3) 右辺内に存在する。従って、 (§ 3-1-3) 右辺の式の中から変数  $x, y, z$  に関する  $-\text{grad}$  を括り出すことが出来る。



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3\mathbf{x}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (34)$$

これと (3) を比べる. 結局, 静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  は,

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (35)$$

となる. ただし, (33') おいては,  $C$  を任意の定数として,  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + C$  も  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  も微分した結果は,

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + C \right] = -\frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{(\alpha - \alpha')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (\alpha = x, y, z)$$

同じである. (35) の  $\phi(\mathbf{x})$  は, このような任意の定数  $C$  も含んでいても良いので, (35) の  $\phi(\mathbf{x})$  は任意定数  $C$  を無視した結果である. 本当は, 定数ではなく関数でも良い.  $\mathbf{x}$  での偏微分する時なら,  $\mathbf{x}$  を含まない任意の関数  $g(y, z)$  は定数と同じ意味を持つからである. この問題は § 7 で再論する.

§ 6-1 で議論したように, 静電場  $\mathbf{E}$  の空間内において, 電荷  $q$  を準静的に点  $P$  から  $Q$  に移動させる為に, 外力が為さねばならない仕事は,

$$W = (-q) \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{§ 6-1 -1})$$

であった. (28) を代入すると,

$$\begin{aligned} W &= (-q) \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q \int_P^Q \text{grad } \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= q \int_P^Q \left[ \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} dz \right] = q \int_P^Q d\phi(\mathbf{x}) \\ &= q[\phi(Q(\mathbf{x})) - \phi(P(\mathbf{x}))] \end{aligned} \quad (36)$$

二行目では, (19) で述べた

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = (\nabla F) \cdot d\mathbf{x} \quad (19)$$

を用いている. (36) の  $[\phi(Q(\mathbf{x})) - \phi(P(\mathbf{x}))]$  は, 点  $Q$  の点  $P$  に対する電位差を定義する. 単位の電荷を  $P$  から  $Q$  に準静的に移動させるに必要な仕事の意味を持つ.

(35)で、電荷が分布する場所( $\mathbf{x}'$ )から無限遠点にある  $P(\mathbf{x})$ の静電ポテンシャルを考えると、クーロン電場では、 $\phi(P(\mathbf{x}))=0$ として良い。従って、無限遠点を基準にして、これとの電位差を単に**電位**と呼ぶ。

ところで、(36)の  $W$  は「準静的な仕事」であるから、仕事の次元  $J=N\cdot m$  を持つ。従って、電位差は単位電荷 (1C) 当たりの仕事で ( $J/C$ ) を持ち、これを  $V$  (ボルト) と定義している。  $1V=1(J/C)$  である。即ち、ある場所の 1C の電荷に、1J の仕事して、その電荷を別の場所に準静的に移動させた時、その 2 点の電位差は 1 V である。 SI 単位系では、  $1C=1A\cdot s$  であるから、

$$\text{電位または電位差の単位： } V = J/C = N\cdot m/(A\cdot s) \quad (37)$$

である。電気素量  $e$  の荷電粒子 1 個を電位差が 1 V である場所を移動させた時の仕事が  $1 e\cdot V$  である。  $e=F/N_A=1.60218\times 10^{-19} C$  であるから、この仕事は  $1.60218\times 10^{-19} J$  となる。この荷電粒子をアボガドロ数だけ集めると、  $9.6485\times 10^4$  クーロン(C)の電荷になるので、アボガドロ数個単位で、電位差が 1 V である場所を移動させた時の仕事は、  $9.6485\times 10^4 (J/mol)=96.485 (kJ/mol)$  となる。粒子 1 個でのエネルギー  $-e\cdot V$  を、1 モル個の粒子でのエネルギー  $-(kJ/mol)$  に換算するには、その換算係数は  $1e\cdot V=96.485 (kJ/mol)$  となる。

一方、電場は、(3) から、静電ポテンシャルの勾配に負符号をつけたものであるから、電場の大きさの単位は [電位差/距離] の次元を持つ。故に、

$$\text{電場の大きさの単位： } V/m = N/(A\cdot s) \quad (38)$$

である。

## 7) 静電場のエネルギー保存則と $rot \mathbf{E} = \mathbf{0}$

静電場  $\mathbf{E}$  の空間内において、電荷  $q$  を準静的に点  $P$  から  $Q$  に移動させる為に、外力が為さねばならない仕事は (§ 6-1-1), (36)の  $W$  である。  $Q$  の位置にある電荷  $q$  は、外界から以下の  $W$  の仕事をしてもらっているので、

$$W = (-q) \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q[\phi(Q(\mathbf{x})) - \phi(P(\mathbf{x}))] \quad (\S 6-1-1)$$

$Q$  の位置にある電荷  $q$  は、  $W$  だけ、  $P$  の位置にあるよりも余分に位置エネルギー

一を持っている。今度は、Q の位置にある電荷  $q$  を P の位置まで準静的に戻すために外界がやらねばならない仕事を  $W'$  とすると、

$$W' = (-q) \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -(-q) \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -W$$

である。故に、 $W + W' = 0$  である。

しかし、もし、 $W + W' \neq 0$  なら、電荷  $q$  が  $P \rightarrow (1) \rightarrow Q \rightarrow (2) \rightarrow P$  と元の位置に戻っても、エネルギーの余り ( $W + W' > 0$ ) や不足 ( $W + W' < 0$ ) が生じることを意味する。 $W + W' > 0$  の場合は、位置変化なしにエネルギーが生じることになる。また、 $W + W' < 0$  の場合は、 $P \rightarrow (2) \rightarrow Q \rightarrow (1) \rightarrow P$  と逆に辿れば、 $W + W' > 0$  の場合と同じになるので、やはり、位置変化なしにエネルギーが生じることになる。即ち、 $W + W' \neq 0$  は「何の位置変化もなければエネルギーは変化しない」というエネルギー保存則に矛盾する。だから  $W + W' = 0$  でなければならない。

$W + W' = 0$  は静電場でのエネルギー保存則であり、結局は  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  の条件が静電場におけるエネルギー保存則を保証している。静電場は保存力場であるとも言うが、同じことを述べている。§6-4 で示した「 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  は、ベクトル  $\mathbf{E}$  の線積分が、始点と終点だけの値で決り、途中の経路には依存しないための必要十分条件」も同じことを述べている。静電場でのエネルギー保存則と  $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  を結びつけるのが Stokes の定理であり、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  が成立することで  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$  となり、この逆も成立することを再度確認しておこう。

一般に、空間内で指定されるベクトル  $\mathbf{A}$  の回転がゼロ、 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 、であることを「ベクトル場は、渦なし」とか「ベクトル場は、非回転的」であると言う。渦は流体力学に由来する表現である。静電場は渦なしである。ベクトルの回転  $\text{rot } \mathbf{A}$  の意味するところは §4-4 で述べたが、 $\text{rot } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  の「渦あり」あるいは「回転的」状態については、次のような水流の作る渦を思い浮かべても、その有様を想像できる。風呂の水を底面の栓をはずして抜く時、風呂の水は渦を作りながら排出されて行く。このとき栓にロートを立てたような凹んだ水面が現れる。渦の回転運動面に垂直な方向に流出する水の色を与えるベクトルがこのような形で目に見える。後に議論するように電磁波が伝播する場合には、

$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$ である。電場と磁場が絡み合って「渦」を作り、その状態が空間を伝播してゆく。

任意のベクトル場  $\mathbf{A}$  は「渦の無いベクトル場」と「湧き出しの無いベクトル場」の二つに分解できるとの定理が存在する<sup>3, 23)</sup>。Helmholtz の定理と呼ばれる。「渦の無いベクトル場」は電場  $\mathbf{E}$  のように  $-\text{grad } \phi(\mathbf{x})$  で表現できる。「湧き出しの無いベクトル場」とは全てのベクトルの発散が 0 であるベクトル場を意味する。真空の静電場に対するガウスの法則（微分形）は  $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  であり、電荷密度が 0 でない限り「湧き出しが有るベクトル場」である。しかし、§4-5、「rot に関する恒等式」で述べたように、任意のベクトル  $\mathbf{B}$  について、 $\text{div } \text{rot } \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$  であるから、 $\text{rot } \mathbf{B}$  の発散は常に 0 である。従って、「湧き出しの無いベクトル場」として  $\text{rot } \mathbf{B}$  を考えれば良い。Helmholtz の定理は、任意のベクトル場  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \phi(\mathbf{x}) + \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

と表現できることを述べている。この両辺の div を取れば、

$$\text{div } \mathbf{A} = -\text{div } \text{grad } \phi(\mathbf{x}) + \text{div } \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

となるが、 $\text{div } \text{grad } \phi(\mathbf{x}) = \nabla^2 \phi(\mathbf{x})$ 、 $\text{div } \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$  であるから、

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\text{div } \mathbf{A}$$

となる。これはポアソンの方程式と呼ばれ、ベクトル場が満足すべき関係である。ベクトル  $\mathbf{A}$  が静電場  $\mathbf{E}$  となって  $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  と結びつく。電場のポテンシャルと電荷密度を結びつけるポアソンの方程式については後に議論する。

§4-4 では、「ベクトル  $\mathbf{A}$  が、あるベクトル関数  $\mathbf{p}$  の回転である時、 $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{p} = \nabla \times \mathbf{p}$ 、ベクトル関数  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{A}$  のベクトルポテンシャルと呼ばれる」と記した。従って、Helmholtz の定理は、任意のベクトル場  $\mathbf{A}$  はスカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{B}$  で記述できることを述べている。電磁場では  $\mathbf{B}$  は磁場を表す磁束密度ベクトルである。

要するに、Helmholtz の定理が成立するものをベクトル場と考えるならば、ベクトル場としての静電場  $\mathbf{E}$  は、

1)  $\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  (ガウスの法則) ,

2)  $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , (エネルギー保存)

に尽きるのではないかと述べたかったのである. 2)は  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{x})$  を意味するから, 電荷分布  $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow$  ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  とポアソンの方程式を経由して  $\rightarrow$  電場  $\mathbf{E}$  となる. では, 静電場  $\mathbf{E}$  を定義する為に用いたクーロン則は何であろうか? これは宿題としよう.

## 8) 静電場と電位の例

§3 の 3-1)~3-4) で簡単な電場について計算した. これらに対応する静電ポテンシャル (電位) を求めてみよう.

### (1) 孤立点電荷の場合

§3 の 3-1) の結果から, 座標原点に電荷  $Q$  があるとして, 廻りの電場は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3}$$

である. 電場は球対称で, 大きさは

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = |\mathbf{E}(\mathbf{x})| = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \quad (\S 3-13)$$

で, 向きは原点  $O$  からその位置向かう. 従って, この方向に関して,

$$E(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$$

である.  $\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$  として積分すると,

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (34)$$

### (2) 一様な線電荷密度 ( $\lambda$ ) で直線に電荷が分布する場合

$O$ - $x,y,z$  の座標系の  $z$  軸に, 一様な線電荷密度 ( $\lambda$ ) で電荷が連続分布する (図 6-8).

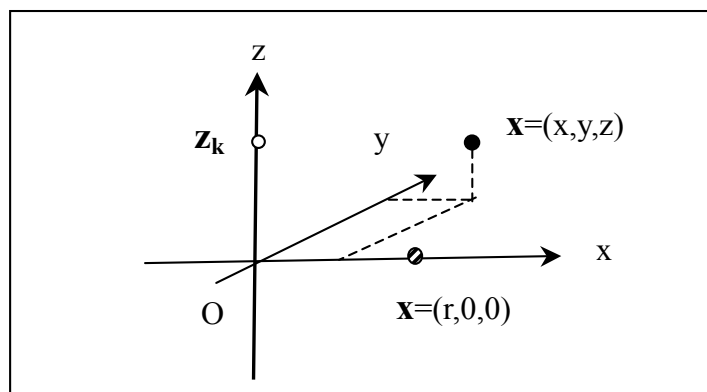


図 6-8. 線密度  $\lambda$  で一様に帯電した  $z$  軸

$\mathbf{x} = (r, 0, 0)$  を考えると、そこでの電場の成分は、 $E_y = E_z = 0$  で

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{\S 3-16-1})$$

$x$  軸は  $z$  軸に直交する任意の方向に取ることができるから、この電場は  $z$  軸について対称的である。  $E_x = E_r$  として、

$$E(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

これを  $\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$  として積分すると、

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + C \quad (36)$$

となる。

### (3) 一様な面線密度 ( $\sigma$ ) で平面に分布する電荷の場合

図 6-9 のように、 $x, y$  平面に一様な面密度 ( $\sigma$ ) で電荷が分布する時、 $\mathbf{x} = (0, 0, z)$  での電場は、 $z$  成分だけが 0 ではない。  $E_x = E_y = 0$  であり、

$$E_z = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)(z/|z|) \quad (\text{\S 3-21})$$

である。  $z$  の値によらず一定で、向きは、電荷が分布する平面内の座標原点から  $\mathbf{x} = (0, 0, z)$  に向かう方向にある。

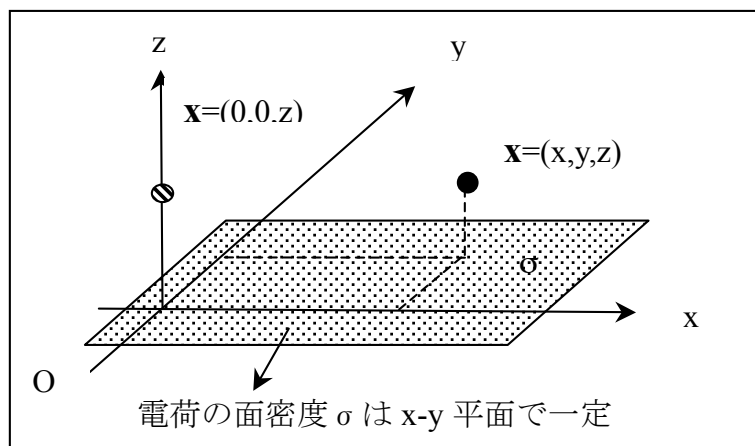


図 6-9. 無限平面上に一定の密度で分布する電荷による電場

$$E_z = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)(z/|z|) = -\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} \quad \text{である.} \quad \frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = -\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)(z/|z|) \text{として積分して,}$$

$$z > 0 \text{ で } \phi(z) = -\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \cdot z + C, \quad z < 0 \text{ で } \phi(z) = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \cdot z + C \quad (37)$$

電場  $E_z$  は,  $z=0$  を挟んで, 正側-負側で,  $\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)$  の不連続がある. しかし, ポテンシャル  $\phi(z)$  は,  $z=0$  で連続である.

#### (4) 半径 $a$ の球の内部に電荷 $Q$ が一様に分布する場合

球対称の電荷分布であるから, 積分形のガウスの法則 (§ 5-2-12) を使って電場を求める.

$$\int_S \mathbf{E}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^n Q_k \quad (\S 5-2-12)$$

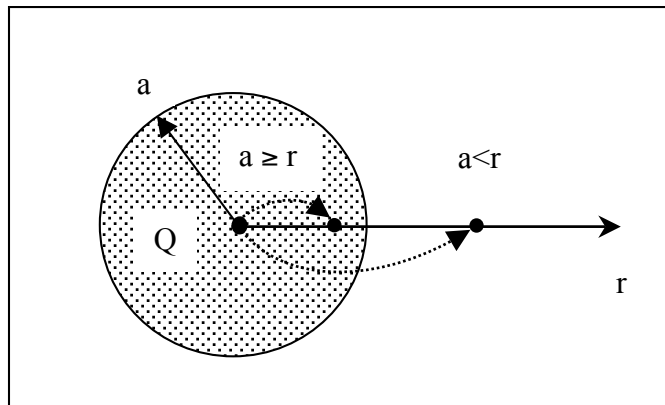


図 6-10. 半径  $a$  の球内部に一様に電荷  $Q$  が分布する.

積分形のガウスの法則で指定する球面内部に存在する総電荷は,  $r$  と  $a$  の大小関係に依存するから, 以下の二つの場合に分けて考える(図 6-10).

i)  $r \geq a$  の場合

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{から,} \quad E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{となり, 電場は}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (38)$$



電場は孤立点電荷と同じであるから、電位も同じく、

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (39)$$

となる。

ii)  $r < a$  の場合

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \frac{Q \cdot (r^3/a^3)}{\epsilon_0}, \quad \text{これから } E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}(r^3/a^3) \text{ である.}$$

電場は

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{a^3} \quad (40)$$

となる。電位は、 $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{a^3} = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}$  の関係から、

$$\phi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{a^3} + C \quad (41)$$

電位  $\phi(r)$  は  $r = a$  で連続でなければならないから、

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{a^3} + C$$

より、

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{a^3} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \quad (42)$$

である。

### (5) 一様な電荷面密度 ( $+\sigma$ と $-\sigma$ ) を持つ平行な無限平面の場合

§3 の 3-4) (22)の結果を利用すると、一様な電荷の面密度 ( $+\sigma$  と  $-\sigma$ ) の平行な無限平面が作る電場は、平面間隔 ( $d$ ) の空間のみに生じる。z 軸の正を、無限平面 a ( $+\sigma$ ) から b ( $-\sigma$ ) に向かう向きにとると(図 6-11),

$$E = E_a + E_b = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{§ 3-22})$$

である。電場と静電ポテにシャルの関係は、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} \quad (43)$$

である。故に、 $\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  を解いて、

$$\phi(z) = \int \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) dz = \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)z + C \quad (44)$$

である。

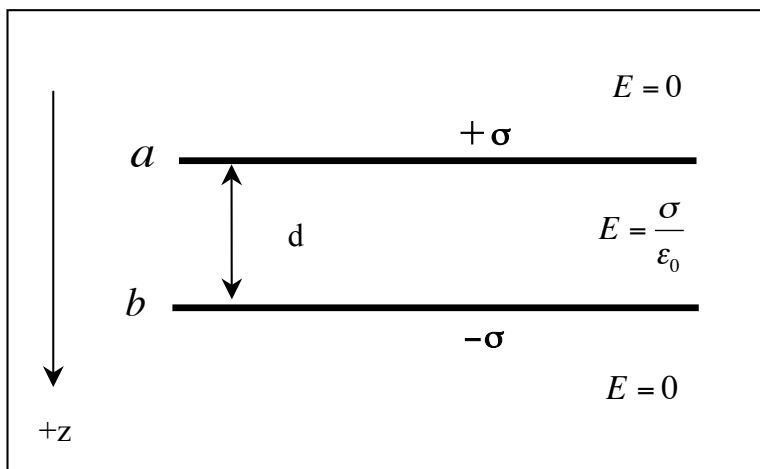


図 6-11. 一様な電荷の面密度 (+σ と -σ) の平行な無限平面が、平面間間隔 (d) の間に作る電場とそこでの電位。

a の b に対する電位差、 $V_a - V_b = \phi(a) - \phi(b)$ , は

$$V_a - V_b = \phi(a) - \phi(b) = \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)a - \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)b = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(b - a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d \quad (45)$$

となる。コンデンサー（蓄電器）内部で、電場は均質であるが、電位は b から a に向かう距離に比例して、0 から  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}d$  まで変化する。すなわち、コンデンサー

をなす二つの面の間では、電場は同じであるが、電位は  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}d$  の不連続が存在する。

§ 7-5-2 で議論する電気二重層における電位の不連続の例である。

## 9) 電気双極子：電位から電場を求める例

絶対値が等しい正負の電荷の対は、**電気双極子** (electric dipole) と呼ばれる。図 6-12 に示すように、その電荷を(+q), (-q)として、両者の距離を  $d$  とする時、大きさ  $p=qd$ 、方向は(+q)から(-q)に向かうベクトル  $\mathbf{p}$  は、**電気双極子モーメント** (electric dipole moment) と呼ばれる。このようなベクトルは、水分子のような電氣的に分極している分子を記述するのに便利である。図 6-11 の中に水分子の幾何学的な形状を模式的に示している。正電荷は水素原子に偏り、負電荷は酸素原子に偏っているので、水分子全体では、正電荷と負電荷の分布中心の位置が一致していない。負電荷の中心から、正電荷の中心へ伸ばした矢印が電気双極子モーメントに対応する。

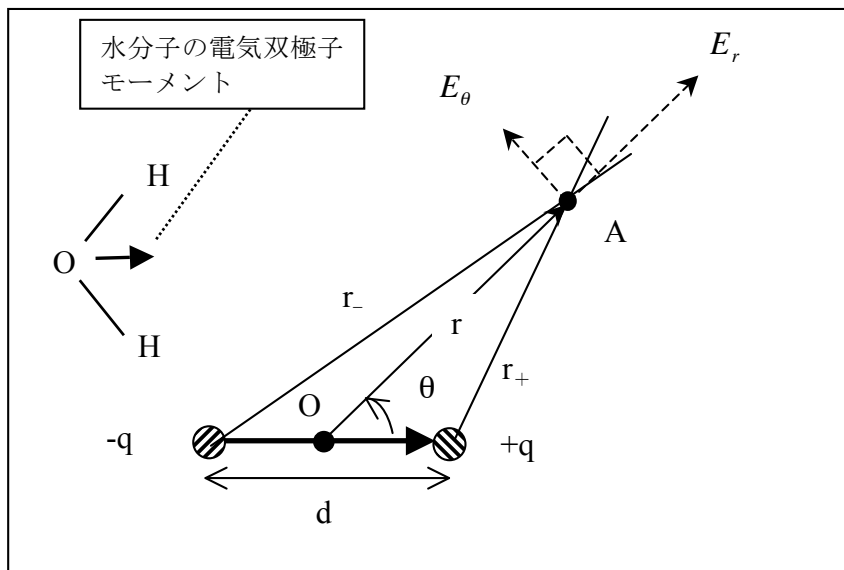


図 6-12. 電気双極子モーメント。

二つの電荷の中心、即ち、双極子の中心に置いた原点  $O$  から見ると、点  $A$  は、距離  $r$ 、角度  $\theta$  の位置にある。この点の電場  $\mathbf{E}(r, \theta) = (E_r, E_\theta)$  を、 $r$  方向とこれに垂直な  $\theta$  方向の成分として求めよう。負電荷と  $A$ 、正電荷と  $A$  の距離は、それぞれ  $r_-$ ,  $r_+$  であるとする。

二つの電荷のつくる電場の重ね合わせで考えれば良いから、電位についても

重ね合わせで考える。(34)の結果を使って、無限遠点に対する A の電位  $V_A$  は、

$$\phi(A) - \phi(\infty) = V_A = \frac{(+q)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_+} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(r_- - r_+)}{r_+ r_-} \quad (46)$$

である。 $r \gg d$ として、余弦定理を使うと、

$$r_+^2 = r^2 + (d/2)^2 - 2r(d/2)\cos\theta \approx r^2 - r \cdot d\cos\theta$$

$$r_-^2 = r^2 + (d/2)^2 + 2r(d/2)\cos\theta \approx r^2 + r \cdot d\cos\theta$$

であるから、これらの差を取れば、

$$2r \cdot d\cos\theta \approx r_-^2 - r_+^2 = (r_- + r_+)(r_- - r_+) \approx 2r(r_- - r_+)$$

これより、 $(r_- - r_+) \approx d\cos\theta$  である。また、 $r_- \cdot r_+ \approx r^2$  であるので、(46)は、

$$V_A \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2} \quad (47)$$

となる。

電場  $\mathbf{E}(r, \theta) = (E_r, E_\theta)$  は、 $\mathbf{E}(r, \theta) = -\text{grad}V_A$  として直ぐに(47)から決まる。

電場の s 方向成分は、 $E_s = -\frac{\partial V_A}{\partial s} = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta V_A}{\Delta s} \right)$  だから、r 方向では  $\Delta s = \Delta r$ 、 $\theta$  方向

では  $\Delta s = r\Delta\theta$  である。

$$E_r = -\frac{\partial V_A}{\partial r} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3} \quad (48)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V_A}{r\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3} \quad (49)$$

となる。

双極子の midpoint に置いた原点  $\mathbf{O}$  に、 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  の直交座標軸を設けた場合は、点 A は  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に位置し、双極子は任意の方向を向いていることになる。

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (50)$$

と書けるので、特定の面内での方位角  $\theta$  を直接的に用いる必要はない。

電場  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  の成分は、 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  であるから、x 成分については、

$$E_x = -\frac{\partial V_A}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

となる。そこで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right]\cdot\left(\frac{1}{r^3}\right) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\cdot\frac{d}{dr}(r^{-3})\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\cdot(-3)r^{-4}\cdot(1/2)r^{-1/2}2x = \left(\frac{p_x}{r^3}\right) - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\cdot x\end{aligned}$$

であるから,

$$E_x = -\frac{\partial V_A}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\cdot x - \left(\frac{p_x}{r^3}\right)\right]$$

となる.  $E_y, E_z$ についても同様な式が得られる.

故に, 双極子の中点を  $x, y, z$  の直交軸の原点  $O$  として, 任意の方向にある双極子  $\mathbf{p}$  が, 点  $\mathbf{r}=(x, y, z)$  につくる電場は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\cdot\mathbf{r} - \left(\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)\right] \quad (51)$$

となる.

ここでは, 静電ポテンシャル  $V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$  を先に求めて,  $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$  としてポテンシャルの勾配から電場を計算している. 7) に示した例では, 電場が与えられており, この成分を積分して静電ポテンシャルを求めている.

## 1 0) 電荷分布の双極子近似

座標原点の近くに分布する多数の点電荷を十分遠方から眺めれば、それら全体は一個の点電荷と見なすことができる。十分遠方であっても、もう少し座標原点に近い場所から眺めれば、電荷分布の広がりも識別できるに違いない (図 6-13)。このような観点から、任意の電荷分布であっても、簡単な形の電荷分布で近似できれば、静電ポテンシャルについても簡単な近似ができる。

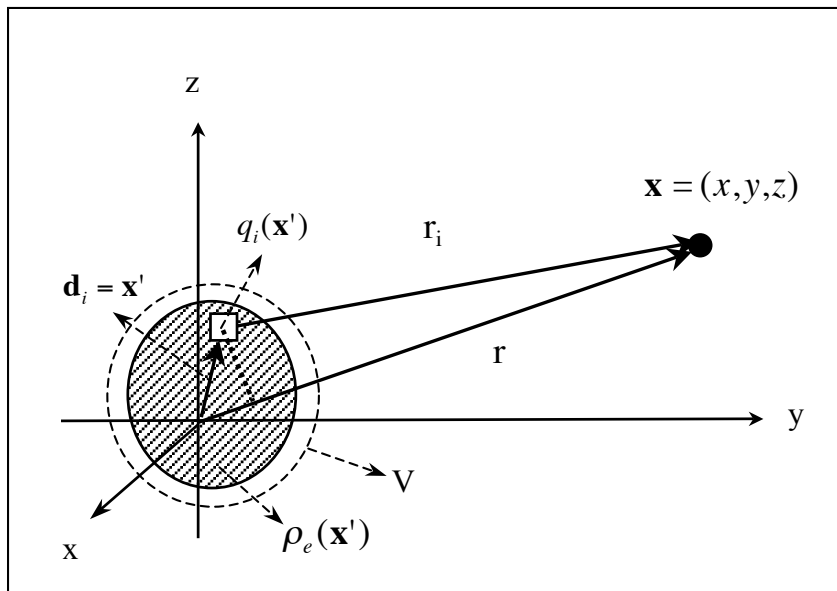


図 6-13. 原点近傍に分布する電荷を遠方の観測点  $\mathbf{x}$  から眺める。

電荷が比較的集中して分布している時、その中心部に座標原点を置く。電荷  $q_i$  が  $\mathbf{d}_i (= \mathbf{x}')$  の位置にあるものとする (図 6-13)。全電荷が位置  $\mathbf{x}$  に作るポテンシャル  $\phi$  は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

となる。離散的な電荷で考えても良いし、連続分布の電荷密度分布で考えても良いので、以下では離散的な電荷で考えよう。図 6-13 から判るように、 $r_i$ ,  $r$  を  $\mathbf{d}_i$  と同様にベクトルで考えると、 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{d}_i$  の関係になっている。もし、観測点が十分に遠方にあるなら、電荷と観測点との距離  $r_i$  はすべて観測点の距離  $r$  で近似できる。従って、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$Q$  は全電荷を表す。もし、電荷分布が電氣的に中性である原子、分子によるものであれば  $Q=0$  である。しかし、中性の原子や分子でも、実際には、正電荷と負電荷は分離しているので、この状況は反映されていない。全ての電荷に対して  $r_i = r$  とするのはこの程度の粗い近似である。

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{d}_i$  の関係が成立しているが、図 6-13 から判るように、 $r_i$  は電荷の位置ベクトル  $\mathbf{d}_i$  の  $r$  方向への正射影分だけ  $r$  を補正したものと考え、近似の程度が良くなることが判る。 $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  とすると、

$$r_i = r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r$$

である。これは  $r_i = r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r = r(1 - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r / r)$  ,  $1 \gg d_i/r$  であるから、両辺の逆数を取り、テーラー展開して 1 次の項までを考えれば

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{r} + \dots \right) \quad (52)$$

となる。これをポテンシャルの式に代入すると、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \sum_i q_i \cdot \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} + \dots \right) \quad (53)$$

となる。第二項の分だけ近似は改善された。この項に現れた電荷と電荷の位置ベクトルの積 ( $q_i \mathbf{d}_i$ ) の和を電荷分布の特徴を表現する量として、

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i q_i \mathbf{d}_i$$

と定義する．一般的に定義された**電気双極子モーメント**である．前節では一対の正負の電荷対によって電気双極子モーメントを議論したが，そこでの定義とこの一般的に定義された**電気双極子モーメント**は合致することが判る．全電荷  $Q$  とこの双極子モーメント  $\mathbf{p}$  を使うと，ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right) \quad (54)$$

と近似できる．これを双極子近似と呼ぶ． $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$ を使わないならば， $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  であるから，

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (55)$$

である．また，双極子モーメント  $\mathbf{p}$  を電荷密度  $\rho_e(\mathbf{x}')$  で表現すると

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i q_i \mathbf{d}_i = \int_V \mathbf{x}' \cdot \rho_e(\mathbf{x}') dV$$

となる．座標原点を中心に分布する電荷を，その分布がどのようなものであろうと，全電荷  $Q$  とこの双極子モーメント  $\mathbf{p}$  の二つのパラメーターによって近似出来ることを表す．