

## § 7 静電場の基本則とポアソン、ラプラスの方程式

これまでの議論を要約し、静電場の基本則をまとめる。これらの基本式からは、静電ポテンシャルに関するポアソンの方程式、ラプラスの方程式が得られる。ポアソンの方程式の解に関連して、グリーンの定理と公式について述べる。

### 1) 静電場の基本則

クーロン則により、位置  $\mathbf{x}'$  の点電荷  $Q$  が位置  $\mathbf{x}$  に作る静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  を、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (7-1)$$

と定義し、この重ね合わせとして、時間変動しない電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  に対して、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot d^3\mathbf{x}' \quad (7-2)$$

を得て、クーロン則による静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  を定義した。

この静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  に対して発散定理（ガウスの定理）を適用して、微分形のガウスの法則

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (7-3)$$

を得た。また、Stokes の定理から、静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  は

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (7-4)$$

であり、従って、静電場はポテンシャルを持つ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad}\phi(\mathbf{x}) \quad (7-5)$$

$\phi(\mathbf{x})$  を静電ポテンシャル、電位と呼ぶ。

電荷分布と静電ポテンシャルの関係は、(7-2)と(7-5)を比べて、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (7-6)$$

は、 $\phi(\mathbf{x})$  の一つの解である。

以上が、これまでの議論の要点である。(7-3), (7-4), (7-5) の簡素な表現が印象的である。(7-2)とこれら(7-3), (7-4), (7-5)が静電場の基本則と言える。(7-2)は

物理学の法則としてのクーロン則であり、この物理則に数学定理である発散定理（ガウスの定理）、Stokes の定理が結びついて、(7-3)、(7-4)となっている。従って、静電場の基本則 (7-3)、(7-4)、(7-5)が、(7-2)のクーロン則を表すとも言える。(7-5)は(7-3)から、(7-6)は(7-2)と(7-5)から、自動的に得られるので、敢えて基本則に加える必要はない。

## 2) ポアソンの方程式とラプラスの方程式

静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  は、(7-5)の  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{x})$  を、(7-3)に代入することによって、

$$\text{div grad}\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (7-7)$$

となる。この左辺は静電ポテンシャルに Laplace 演算子 ( $\Delta$  または  $\nabla^2$ ) を作用させたものになる、§4-2 の(2-2)で述べたように、 $f(x,y,z)$  を任意のスカラー関数として、

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \nabla^2 f = \Delta f \quad (\S 4-2-2)$$

が成立する。微分演算子である Laplace 演算子をスカラー関数  $f$  に作用させたものとする。この演算子は  $\Delta$  (デルタ) または  $\nabla^2$  (ナブラ二乗) と読む。

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (\S 4-2-3)$$

である。従って、(7-7)は、

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \quad (7-8)$$

となる。成分で書けば、

$$\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \quad (7-8')$$

である。これはポアソンの方程式 (Poisson, 1781-1840) と呼ばれる。電荷密度が 0 である場合は、

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (7-9)$$

である。成分で書けば、

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial z^2} = 0 \quad (7-9')$$

となる。この方程式はラプラスの方程式と呼ばれる。

(7-8) のポアソンの方程式を解けば、静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  が得られるはずである。ただし、偏微分方程式の一般解には任意の関数が現れることに注意が必要である。(7-8)の右辺には電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ があるので、 $\phi(\mathbf{x})$ の解は  $\rho(\mathbf{x})$ を含む表現になっているはずである。 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて、(7-5)の  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{x})$ に代入すれば、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ も決まる。

しかしながら、(7-2)で、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ は電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ から決まるのであり、(7-3)、(7-4)、(7-5)、(7-6)を満たしているのは当然と言える。何故わざわざポアソンの方程式を解かねばならないのだろうか？との疑問が生じる。

簡単な形で電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ が与えられている場合は、このポアソンの方程式を解く必要はなく、前章の例で見たように、静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$ も電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ も決まる。しかしながら、§8で述べるように、点電荷だけではなく導体も含む系では、外部に電荷を置くと、導体表面には静電誘導によって新たな電荷分布が生じる。これにより、与えた電荷分布は変更され、電荷分布自体も新たに決めねばならない(導体の問題は§8で考える)。そのような場合は、境界条件を電位  $\phi(\mathbf{x})$ に関する形で与えて、ポアソンの方程式やラプラスの方程式を解く方法が有効である。また、与えられた電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ が非常に複雑である場合も同様である。与えられた電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ から、静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$ や電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ が簡単に得られる場合でも、ポアソンの方程式を解いた方が問題の解はもっと簡単に得られることもある。

このようなポアソンの方程式やラプラスの方程式の有効性を明確にしてくれる定理が、次の述べるグリーンの定理である。

### 3) グリーンの定理

グリーンの定理は発散定理(ガウスの定理)から得られる。発散定理(ガウ

スの定理) は

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (\S 5-20)$$

であったが, 二つの任意のスカラー関数を  $\phi(\mathbf{x})$  と  $\psi(\mathbf{x})$  して,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \quad (7-10)$$

と置いて, 発散定理に代入してみる. ( $\S 5-20$ )の左辺は,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \phi(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right) = \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} \end{aligned} \quad (7-11)$$

ここで,

$$(\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} \equiv \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right)$$

は, スカラー関数  $\psi(\mathbf{x})$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  方向の微係数である. 一方,

( $\S 5-20$ )の右辺は,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \operatorname{div} \{ \phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \\ &= \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7-12)$$

となる. これらを( $\S 5-20$ )に代入して, 体積積分を左辺に置くと,

$$\int_V \{ \phi \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi \} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (7-13)$$

となる. これはグリーンンの定理の一つの表現 (第一恒等式) ではあるが, 通常は, 次の様に  $\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \phi$  を消した形式にする. そこで, (7-13)でスカラー関数  $\phi(\mathbf{x})$  と  $\psi(\mathbf{x})$  を入れ替えても等式は成立するから,

$$\int_V \{ \psi \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \phi \} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (7-14)$$

である (第二恒等式). (7-13) と (7-14) の二つの差とを取る.  $\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \phi$  が消えて,

$$\int_V \{ \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (7-15)$$

となる。比較的簡単で対称性も良い形になっている。これが通常のグリーンの定理（第三恒等式）である。この定理を静電ポテンシャルの議論に活用することで、ポアソンの方程式やラプラスの方程式の有効性が理解できる。一方、グリーンの第一恒等式(7-13)において、 $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$ とする、

$$\int_V \{\phi \nabla^2 \phi + (\text{grad} \phi)^2\} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS$$

となる。ここでさらに、 $\nabla^2 \phi = 0$  (ラプラスの方程式)が成立している場合は、

$$\int_S \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS = \int_V (\text{grad} \phi)^2 d^3 \mathbf{x} \geq 0 \quad (7-13')$$

この関係も後にもしばしば利用される。

#### 4) グリーンの公式と静電ポテンシャル

(7-15)での $\phi$ は静電ポテンシャル、一方、 $\psi$ は $\psi = 1/r$ とする。ここでの $r$ は $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ であり、 $r$ は特定の点 $P$ から点 $\mathbf{x}(x, y, z)$ までの距離とする。その結果、(7-15)は、

$$\int_V \{\phi \nabla^2 (1/r) - (1/r) \nabla^2 \phi\} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left\{ \phi \frac{\partial (1/r)}{\partial n} - (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS \quad (7-16)$$

となる。ここでの体積積分と面積分は、発散定理（ガウスの定理）の場合と同じで、 $S$ は閉曲面で、 $V$ は $S$ が指定する体積である。

$\psi = 1/r$ としたことには理由がある。それは、

$$\nabla^2 (1/r) = \Delta (1/r) = 0 \quad (r \neq 0) \quad (7-17)$$

が、 $r = 0$ を除いて、全ての点で成立するからである。これを確認する為に、

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ で、 $\nabla^2 (1/r) = \Delta (1/r) = \frac{\partial^2 (1/r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (1/r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (1/r)}{\partial z^2}$ の第一項につ

いて考えてみる。 $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$ の両辺を $x$ で偏微分すると、 $2r(\partial r / \partial x) = 2x$ となるので、 $(\partial r / \partial x) = x \cdot r^{-1}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (1/r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial (1/r)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial (1/r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \{ (-1) \cdot r^{-2} \cdot x \cdot r^{-1} \} = -\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot r^{-3}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot r^{-3}) = -r^{-3} - x \frac{\partial}{\partial x} (r^{-3}) = -r^{-3} - x(-3)r^{-4} \cdot x r^{-1} = -r^{-3} + 3x^2 r^{-5} \end{aligned}$$

となる．全部の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分の和を取ると，

$$\begin{aligned}\nabla^2(1/r) = \Delta(1/r) &= \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(1/r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(1/r)}{\partial z^2} \\ &= -3r^{-3} + 3(x^2 + y^2 + z^2)r^{-5} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0\end{aligned}\quad (7-18)$$

確かに 0 となる．

従って，この結果を(7-16)左辺に使う．そのためには，積分体積  $V$  を， $1/r$  が  $\infty$  となる特異点  $r=0$  を取り囲む半径  $\varepsilon$  の微小球体積， $V_\varepsilon = (4\pi/3)\varepsilon^3$  と，これ以外の部分の体積  $V'$  の二つに分割する必要がある． $V = V_\varepsilon + V'$  である．(7-16) 左辺の積分体積  $V \rightarrow V'$  と変更すれば， $V'$  の領域では， $\nabla^2(1/r) = \Delta(1/r) = 0$  が無条件に成立する．一方， $V_\varepsilon = (4\pi/3)\varepsilon^3$  はいくらでも小さくできるので， $V' \rightarrow V$  とまた積分体積を元に戻すことが出来る．即ち，

$$\int_V \{\phi \nabla^2(1/r) - (1/r) \nabla^2 \phi\} d^3 \mathbf{x} = - \int_V \{(1/r) \nabla^2 \phi\} d^3 \mathbf{x} \quad (7-19)$$

である．

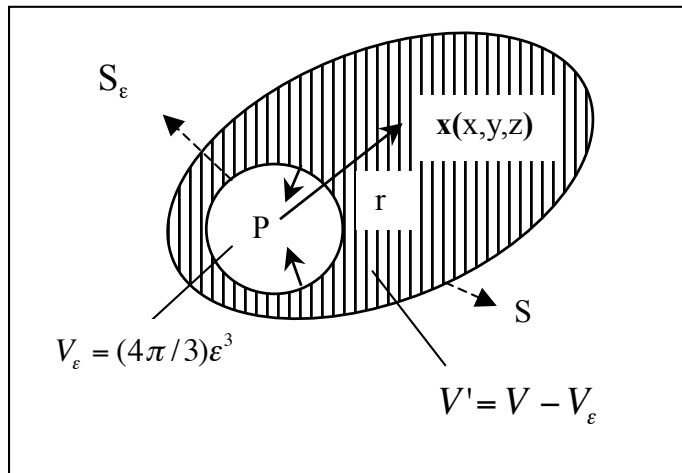


図 7-1. 閉曲面  $S$  の内部体積  $V$  から，点  $P$  を中心とする微小球  $V_\varepsilon$  を取り除く．この微小球の表面を  $S_\varepsilon$  とすると，面上の単位法線ベクトル ( $\mathbf{n}$ ) は．常に，内側から外側に取るので， $S_\varepsilon$  上の  $\mathbf{n}$  は微小球の中心点  $P$  に向かう．微小球  $V_\varepsilon$  はいくらでも小さくできるが，この  $S_\varepsilon$  上の  $\mathbf{n}$  の性質は変わらない．

一方，(7-16)右辺の面積分は，微小球体積  $V_\varepsilon = (4\pi/3)\varepsilon^3$  を分離したことで，元々の閉曲面  $S$  と，その微小球をくり抜いた為に生じた表面 ( $S_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$ ) の面積分

の二つについて考える必要が生じる。

(7-16)右辺は、

$$\int_S \left\{ \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS + \int_{S_\varepsilon} \left\{ \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS \quad (7-20)$$

となる。この第二項の面積分は、点 P を中心とする微小球を除いたことによつて生まれた面  $S_\varepsilon$  に関する積分である。面  $S_\varepsilon$  上では、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は常に原点 P を向く、図 7-1 の  $\mathbf{r}$  がこの微小球を貫く点で単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を考えると、その向きは  $\mathbf{r}$  の方向とは逆であり、 $\partial r / \partial n = -1$  となる。故に、

$$\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \phi \cdot (-r^{-2}) \cdot (-1) = \phi \cdot (r^{-2})$$

であるので、

$$\int_{S_\varepsilon} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS = \int_{S_\varepsilon} \phi \cdot (1/r^2) dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} \phi dS$$

となる。そこで、点 P における静電ポテンシャルを  $\phi_p$  とし、面上の点では  $\varepsilon \rightarrow 0$  で  $\delta \rightarrow 0$  とし、 $\phi = \phi_p + \delta$  とできるので、

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} \phi dS = \frac{(\phi_p + \delta)}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} dS = \frac{(\phi_p + \delta)}{\varepsilon^2} \cdot (4\pi\varepsilon^2) = 4\pi(\phi_p + \delta)$$

である。故に、 $\varepsilon \rightarrow 0$  で

$$\int_{S_\varepsilon} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS = 4\pi \cdot \phi_p \quad (7-21)$$

一方、(7-20)の面  $S_\varepsilon$  に関する第二の面積分では、 $\partial \phi / \partial n$  は点 P を通る直線に沿つた  $\phi$  の変化率であるから、 $|\partial \phi / \partial n| < \alpha$  とすると、

$$\left| \int_{S_\varepsilon} (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| < \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \int_{S_\varepsilon} dS = \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\alpha\varepsilon \quad (7-22)$$

が成立し、 $\varepsilon \rightarrow 0$  で 0 となる。従つて、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限で、(7-20)は、

$$\int_S \left\{ \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS + 4\pi \cdot \phi_p$$

である。結局、(7-16)の右辺と左辺は、

$$-\int_V \{ (1/r) \nabla^2 \phi \} d^3 \mathbf{x} = \int_S \left\{ \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS + 4\pi \cdot \phi_p$$

となる。点  $P$  における静電ポテンシャルを  $\phi_p$  としたから、これを左辺に取って、次式を得る。

$$\phi_p = -\frac{1}{4\pi} \int_V \{(1/r)\nabla^2\phi\} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \{(1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\} dS \quad (7-23)$$

一方、(7-8)のポアソンの方程式は  $\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$  であるから、こ

れも (7-23)に代入すると、

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \{(1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\} dS \quad (7-24)$$

となる。これはグリーンの公式（又はグリーンの定理の第三恒等式）と呼ばれる。これはポアソンの方程式の解を与える。

(7-1)~(7-6)では、電場、静電ポテンシャルを指定する位置変数  $\mathbf{x}$ （観測点）と積分の際の変数  $\mathbf{x}'$  を用いているので、(7-24)での指定法とは同じではない。

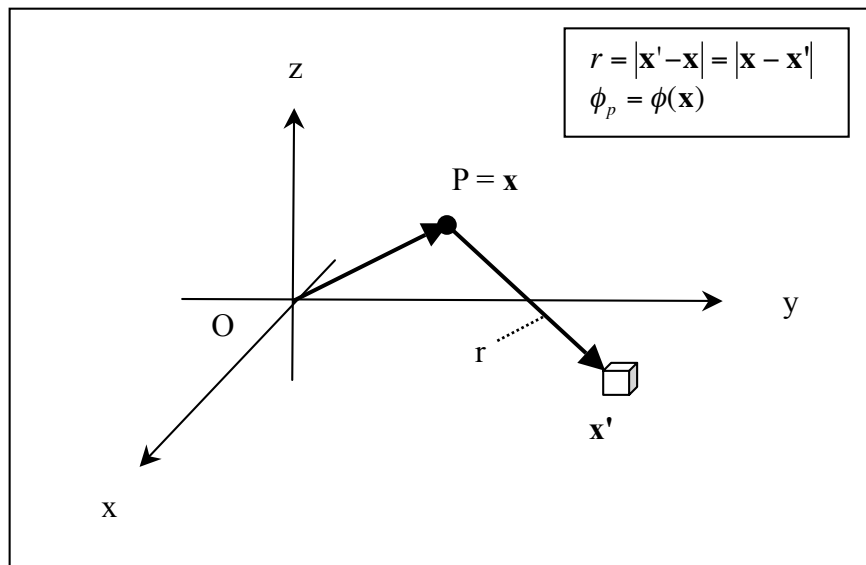


図 7-2. (7-24)での位置変数  $(\mathbf{x}, r)$  と (7-1)~(7-6)での位置変数  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  の関係。

両者は図 7-2 に示す関係にあるので、

$$r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad \phi_p = \phi(\mathbf{x})$$

これに基づいて(7-24)を書き換えると、



$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} dS \quad (7-25)$$

となる。

この右辺第一項は、(7-2)と(7-5)から得た電荷分布と静電ポテンシャルの関係(7-6)である。逆に言うと、(7-6)は(7-25)で第二項が0である場合の解である。この意味を次節で考えよう。

## 5) グリーンの公式：ポアソンの方程式の解

ポアソンの方程式の解であるグリーンの公式 (7-24), (7-25)には, 第一項の  $V$  に関する電荷密度の体積積分だけではなく, 閉曲面  $S$  に関する面積分の第二項も現れる. これは, 閉曲面  $S$  の内部体積  $V$  が有限であることに対応している. 有限の体積  $V$  を考える場合には, その境界での条件を指定しなければならない. (7-25)の第二項の閉曲面  $S$  における  $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  の値が境界条件である. 重要な点は, 閉曲面  $S$  の境界条件さえ与えれば, その外側の条件は何も知らなくても,  $V$  内部の電場が一義的に決まることである. 一方,  $V$  を有限体積ではなく, 空間全体に取った場合は, 閉曲面  $S$  を無限遠方に置くことになる. この場合は, 第一項の  $V$  に関する電荷密度の体積積分だけが残りに, 第二項の面積分は消える. まず, この後者の場合から考えよう.

### 1-1) 閉曲面 $S$ が無限遠方にある場合

図 7-1 の閉曲面  $S$  が無限遠方にあるとすると, 閉曲面では  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 1/r \rightarrow 0$  である. (7-1)のような電荷分布を考えると,  $\phi$  は  $1/r$  のように振る舞うので, 無限遠方の閉曲面では  $\phi \rightarrow 0$  である. また,  $S$  は外側に向く境界であるから, 単位法線ベクトルは  $r$  の方向と同じになる. 即ち,

$$r \frac{\partial r}{\partial n} \equiv r \left( \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y + \frac{\partial r}{\partial z} n_z \right) = (x n_x + y n_y + z n_z) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$$

であるから,  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{n}$  が同一方向なら,  $\partial r / \partial n = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) / r = +1$  となる. だから,

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial n} = \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -(1/r^2)(+1) = -(1/r^2), \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \approx -(1/r^2)(+1) = -(1/r^2)$$

である. 従って, 被積分関数の各項は,

$$-\phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \approx -(1/r)(-1/r^2) = \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n} \approx \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} \approx (1/r)(-1/r^2) = -\frac{1}{r^3}$$

である. 無限遠でこれらは 0 であるが,  $\phi \propto 1/r$  と考えたこと, この和の面積積分が問題なのだから, 直ちに 0 としはしないで次のように考える. (7-25)右辺

の面積分については、適当な任意の正数を  $\alpha$  として、

$$\left| \int_S \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS \right| < \frac{\alpha}{r^3} \int_S dS = \frac{\alpha}{r^3} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{4\pi}{r} \alpha$$

が常に成立つ。この右辺の  $(4\pi/r)\alpha$  は、 $r \rightarrow \infty$  で 0 となるので、確かに、(7-25) 右辺の面積分も  $r \rightarrow \infty$  で 0 となる。

このように、 $V$  を全空間と考え、閉曲面  $S$  が無限遠方にあり、この無限遠方境界面で  $\phi = 0$  である場合、ポアソンの方程式の解は、(7-6) 即ち、(7-25) の第一項、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (7-26)$$

である。前節で「(7-26)はポアソンの方程式一つの解である」と述べたのは、このような「無限遠方境界面で  $\phi = 0$ 」との付随する境界条件があることを述べている。

### 1-2) 有限体積 $V$ の内部で $\nabla^2\phi = 0$ である場合

(7-25)で、有限体積  $V$  の内部で  $\nabla^2\phi = 0$  である場合を考える。 $V$  内部で静電ポテンシャルはラプラスの方程式を満足している場合である。この状況は、 $V$  の内部に電荷が存在しない場合だけではなく、 $V$  が導体である場合にも対応するが、§8 で議論するので、具体的状況が何であるかはここでは考えない。(7-25)に  $\nabla^2\phi = 0$  を代入すれば、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} dS \quad (7-27)$$

となる。境界面  $S$  における  $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  の値が全て知られていれば、 $\nabla^2\phi = 0$  の一般解は (7-27) で表現できることを意味する。「境界面  $S$  での  $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  の値を与える」ことが、具体的に何を意味については、「解の一意性」と関連して後に議論する。

常微分方程式の解には任意定数が伴うように、偏微分方程式の解には任意関数が伴う。 $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  はそのような任意関数に当たる。即ち、(7-27)はラプラスの方程式  $\nabla^2\phi = 0$  の一般解である。これからすると、(7-25)の第二項は斉次方程

式  $\nabla^2\phi=0$  の一般解であり，第一項は，非斉次方程式  $\nabla^2\phi=-\rho/\epsilon_0$  の特解と言える．非斉次方程式 ( $\nabla^2\phi=-\rho/\epsilon_0$ ) の一つの解が知られている時，その特解に斉次方程式 ( $\nabla^2\phi=0$ ) の一般解を加えると，非斉次方程式 ( $\nabla^2\phi=-\rho/\epsilon_0$ ) の一般解となる．(7-25) はこの原則に対応している．

### 1-3) 有限体積 $V$ の表面 $S$ に関する境界条件と解の唯一性

グリーンの公式 (第三恒等式) からポアソンの方程式の一般解が与えられること，

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right\} dS \quad (7-25)$$

に再度立ち戻り，「境界閉曲面  $S$  での  $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  の値を与える」ことの意味を考える．特定の閉曲面での  $\phi$  と  $\partial\phi/\partial n$  が全く独立ではないことが問題である．実際は，「境界閉曲面  $S$  での  $\phi$  の値」を与えれば，内部の各点のポテンシャル  $\phi$  は決まり，電場も決まる．「境界閉曲面  $S$  での  $\partial\phi/\partial n$  の値」を与えれば，内部の各点の電場が決まる．これは「境界値問題の解の唯一性」に関する以下の定理として次のように表現される．

**定理 1:** 領域  $V$  内部の電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  と境界面  $S$  上のポテンシャル

$\phi(\mathbf{x})$  が与えられれば， $V$  内部の  $\phi(\mathbf{x})$  は唯一つ決まる．

この証明は，以下の通りである．

領域  $V$  内部のポテンシャル関数  $\phi_1(\mathbf{x})$  と  $\phi_2(\mathbf{x})$  の二つが，同一ポアソンの方程式の解であると仮定してみる． $V$  の内部では  $\nabla^2\phi_1(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$ ， $\nabla^2\phi_2(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  であり，境界面  $S$  上では， $\phi_1(\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})$  が成立する．そこで，二つの解の差を  $\phi(\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})-\phi_2(\mathbf{x})$  とすると， $\nabla^2\phi(\mathbf{x})=0$  である．また，境界面  $S$  上のいたるところで  $\phi(\mathbf{x})=0$  である．§7-3 の(7-13')

$$\int_S \left( \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\text{grad}\phi)^2 d^3\mathbf{x} \geq 0 \quad (7-13')$$

を用いると，境界面  $S$  で  $\phi(\mathbf{x})=0$  であることは，

$$\int_S \left( \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\text{grad}\phi)^2 d^3\mathbf{x} = 0 \quad (7-28)$$

となる。V の内部のどこでも  $\text{grad}\phi(\mathbf{x})=0$ ，即ち， $\phi(\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})-\phi_2(\mathbf{x})=\text{const.}$  である。ポテンシャル関数が連続であるとする、境界面 S のどこでも  $\phi(\mathbf{x})=0$  であるとき、V の内部の一定な  $\phi(\mathbf{x})$  は  $\phi(\mathbf{x})=0$  でなければならない。故に  $\phi_1(\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})$  である。異なるポテンシャルは存在しない。

この定理から、V 内部の電荷分布と境界 S 上でのポテンシャルが与えられると、内部のポテンシャルは唯一決まるから、V 内部との電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})=-\text{grad}\phi(\mathbf{x})$  も決まる。従って、以下のようにも言うことができる。

**定理 2：** 領域 V 内部の電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  と境界面 S 上のポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  が与えられれば、V 内部の電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  は唯一決まる。

次に  $\partial\phi/\partial n$  の値を与えることの意味を考えよう。  $\partial\phi/\partial n$  は、

$$(\text{grad}\phi(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}\equiv\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial n}\equiv\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z\right)$$

であること、即ち、スカラー関数  $\phi(\mathbf{x})$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  方向の微係数である。従って、境界面 S 上で  $\partial\phi/\partial n=(\text{grad}\phi)\cdot\mathbf{n}$  の値を与えることは、

$$-\partial\phi/\partial n=(-\text{grad}\phi)\cdot\mathbf{n}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=E_n$$

であるから、境界面 S 上の電場の法線成分を与えることである。

**定理 3：** 領域 V 内部の電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  と境界面 S 上のポテンシャルの法線成分  $\partial\phi/\partial n$  が与えられれば、V 内部の  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  は唯一決まる。

領域 V 内部での電場  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$  と  $\mathbf{E}_2(\mathbf{x})$  の二つの解が存在すると仮定して、境界閉曲面 S での  $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n}=\partial\phi_1/\partial n$  と  $\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{n}=\partial\phi_2/\partial n$  の値は等しいとする。二つの差を  $\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{E}_1(\mathbf{x})-\mathbf{E}_2(\mathbf{x})$  とすると、電場の線形性から  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  も電場としての解である。

$$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{n}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=\partial(\phi_1-\phi_2)/\partial n=\partial\phi/\partial n=0$$

であり、境界閉曲面 S 上では  $\mathbf{E}=\text{grad}\phi=0$  である。一方、(7-13') を使うと、やはり (7-28) が成立するので、V の内部のどこでも  $\text{grad}\phi(\mathbf{x})=0=-\mathbf{E}$  であり、 $\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{E}_1(\mathbf{x})-\mathbf{E}_2(\mathbf{x})=0$  より、 $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})=\mathbf{E}_2(\mathbf{x})$  である。唯一の電場が存在する。これ

は**定理 2**と同じ結果となる.

以上の定理は, ポアッソンの方程式の解の唯一性を保証している. 同様にして, (7-27)のラプラスの方程式の解についても唯一性を保証している. ただし, ポテンシャルの連続性とその空間微分可能であること ( $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ の存在)が前提である. 即ち, 領域  $V$  の内部にポテンシャルと電場の不連続が存在しないことを前提にしている. 次はこのような不連続が存在する場合について考える.

## 6) 不連続面が存在する場合：一重層，二重層のポテンシャル

V, S が有限の体積，閉曲面である場合の(7-24), (7-25)のグリーンの公式，

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (1/r) \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS \quad (7-24)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} dS \quad (7-25)$$

は，有限体積 V の内部に不連続面が存在しない場合に該当する．しかし，§6-7-3 で「一様な電荷面密度  $\sigma$  で平面に分布する電荷」を考えたが，この面を挟んで電場は不連続であった．また，§6-7-5 で考えた「一様な電荷面密度  $\pm\sigma$  で平行面に分布する電荷（距離  $d$  の平行板コンデンサー）」では， $d$  を小さくして行く時，このコンデンサーを挟んで，ポテンシャルは不連続となる．それぞれ，表面に分布する電荷（一重層），電気双極子（二重層）と呼ばれる．

これらが与えるポテンシャルについてまず考え，その後，V の内部に不連続面が存在する問題を考える．

### <電気一重層と電気二重層のポテンシャル>

電荷の面密度  $\sigma$  を持つ面積素片  $dS$  が， $r$  の距離にある観測点に与えるポテンシャルは，

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot dS}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot dS}{r} \quad (7-29)$$

であるから，面密度  $\sigma$  で面 S に分布する電荷によるポテンシャルはこの面積分である．

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS \quad (7-30)$$

表面電荷密度  $\sigma$  によって生じる電気一重層のポテンシャルである．

一方，§6-5 に述べた電気双極子を面上に並べたものが電気二重層である．このポテンシャルについて考えよう．原点に置かれた電気双極子  $p$  が  $r$  の位置につくるポテンシャルは，

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{\S 6-50})$$

である。電気双極子のモーメントはベクトルで、負の電荷に対する正電荷の位置ベクトルに正電荷の電気量を掛けたものである。単一の電気双極子のつくるポテンシャルと、曲面に連続分布する電気双極子のそれとを対応させる場合には、以下に述べるように  $\mathbf{r}$  の取り方に注意が必要である。

面  $S$  での電気双極子モーメントの面密度を  $\boldsymbol{\tau}$  とすると、面積素片  $dS$  は、 $\boldsymbol{\tau} dS$  のモーメントを持つ。§ 6-50 の式を当てはめると、このような電気双極子モーメントによるポテンシャルは、

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$$

となる。さらに、このモーメント面密度の向きが面  $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に一致している場合を一般に二重層と呼ぶので、 $\boldsymbol{\tau} = \tau \cdot \mathbf{n}$  となる。この場合は電荷の分布であるから電気二重層(electric double layer)と呼ばれる。従って、

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\tau \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (7-31)$$

となる。ここでの  $\mathbf{r}$  の方向は、(§ 6-50)に従っているから、面積素片  $dS$  から

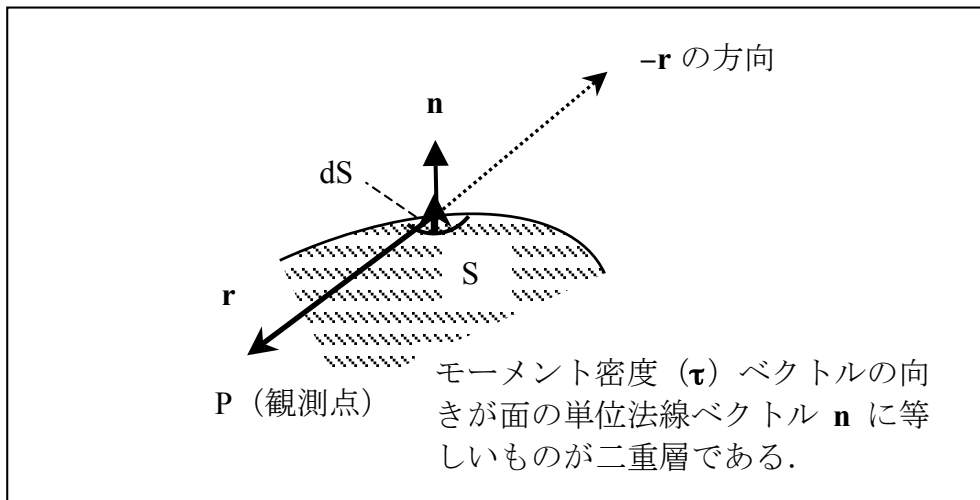


図 7-3. 電気二重層のモーメント密度 ( $\boldsymbol{\tau}$ ) ベクトルの定義。面上の点に対する観測点の位置ベクトル ( $\mathbf{r}$ )、および観測点に対する面上の点の位置ベクトル ( $-\mathbf{r}$ )。



観測点  $P$  に向かう (図 7-3). しかし, 距離  $r$  は同じであっても, (7-24), (7-25) では観測点 ( $P$ ) から面積素片に向かう動径ベクトルを  $\mathbf{r}$  として考えて来ている. 立体角の定義は 観測点  $P$  に単位球の中心を置いて,  $P$  と  $dS$  がつくる円錐が単位球表面で切り取られる表面積である. 立体角の正負は, 面  $dS$  の正方向の法線と  $P$  から  $dS$  に伸ばした直線が鋭角である時を正の立体角, 鈍角である場合を負の立体角と定義している (§ 5-1). だから, 単位球の中心  $P$  から  $dS$  に向かう動径を使う必要がある. この動径方向は, 図 7-2 では, "  $-\mathbf{r}$  " の方向になる. § 6-50 の式, (7-31) 式の  $\mathbf{r}$  を "  $-(\mathbf{r})$  " として,  $(-\mathbf{r})$  を新たな動径ベクトル ( $\mathbf{r}$ ) と考える. この新たな動径ベクトル ( $\mathbf{r}$ ) は, 観測点  $P$  に対する面積素片  $dS$  の位置ベクトルである. 従って, (7-31) は,

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(-\tau) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (7-32)$$

となる. (7-24) などと比べると, この (7-32) の形にしなければならない. 二重層のポテンシャルには, モーメントと位置ベクトルの内積と距離  $r$  が関わる. 電荷と距離  $r$  だけが関係する一重層の場合とは事情が違ふことに注意.

### < $V$ の内部の不連続面 >

$V$  の内部に不連続面が存在する場合を考えよう (図 7-4). 表面積  $S$  が指定する体積  $V$  の内部に不連続面  $F$  が存在するとする.  $F$  を取り囲む扁平な表面積  $S'$  を考え,  $S'$  が指定する体積を  $V'$  とし,  $V' \rightarrow 0$  の状況を考える. 表面積  $S'$  を二つの面  $F_1$  と  $F_2$  で表す.  $F_1$  と  $F_2$  上での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ , ポテンシャルを  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  とする. 点  $P$  のポテンシャルは, (7-24) と同様な式に表面積  $S'$  に関する面積分が加わった形で与えられる.

$$\begin{aligned} \phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (1/r) \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left\{ (1/r) \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS \end{aligned} \quad (7-33)$$

これはグリーンの公式 (7-24) を導いた過程と同じように考えれば良い.

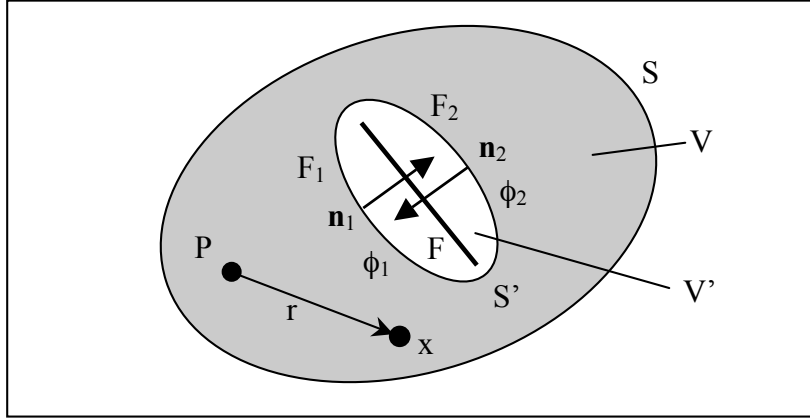


図 7-4. 体積  $V$  の内部に不連続面  $F$  を考える.  $F$  を取り囲む扁平な表面積  $S'$  を考え, これを二つの面  $F_1$  と  $F_2$  で表す.  $F_1$  と  $F_2$  上での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ , ポテンシャルを  $\phi_1, \phi_2$  とする.

$S'$  に関する面積分は,  $F_1$  と  $F_2$  に関する積分の和になるので,

$$\begin{aligned} \int_{S'} \left\{ (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS \\ = \int_{F_1} \left\{ (1/r) \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} - \phi_1 \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} \right\} dS + \int_{F_2} \left\{ (1/r) \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} - \phi_2 \frac{\partial(1/r)}{\partial n_2} \right\} dS \end{aligned} \quad (7-34)$$

となる.  $V' \rightarrow 0$  の状況下で,  $F_1$  と  $F_2$  は不連続面  $F$  に一致するから,  $F$  に関する面積分にまとめることができる. しかし,  $F_1$  と  $F_2$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  での  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  の関係は最後まで成立している. 従って, 単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_2$  は  $\mathbf{n}_1$  を用いて以下のように表現できる.

$$\begin{aligned} \int_{S'} \left\{ (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS &= \int_F \left\{ (1/r) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} \right) - \phi_1 \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} - \phi_2 \frac{\partial(1/r)}{\partial n_2} \right\} dS \\ &= \int_F \left\{ (1/r) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n_1} \right) - (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} \right\} dS \end{aligned} \quad (7-35)$$

従って, 点  $P$  のポテンシャル(33)は,

$$\begin{aligned} \phi_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left\{ (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right\} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ (1/r) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n_1} \right) - (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} \right\} dS \end{aligned} \quad (7-36)$$

となる.

表面電荷密度  $\sigma$  の一重層ポテンシャルの式(7-30)と、(7-36)の二つの面積積分の第一項が対応していることが判る。表面電荷密度が、それぞれ、

$$\sigma_S = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad \sigma_F = \varepsilon_0 \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n_1} \quad (7-37)$$

であることを意味する。従って、(7-24, 25)の面積積分の第一項も同じである。境界面 S に分布する  $\sigma_S = \varepsilon_0(\partial\phi/\partial n)$ , 不連続面 F に分布する  $\sigma_F = \varepsilon_0\partial(\phi_1 - \phi_2)/\partial n_1$  の電荷密度を持つ一重層によって生じるポテンシャルと解釈できる。

一方、(7-36)の二つの面積積分の第二項は、(7-32)の電気二重層ポテンシャルが対応している。(7-36), (7-24, 25)の面積積分第二項の被積分式は、符号も含めて、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS &= -\frac{1}{4\pi} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \frac{\phi \cdot r}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} dS \\ [ r \frac{\partial r}{\partial n} &\equiv r \left( \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y + \frac{\partial r}{\partial z} n_z \right) = (x n_x + y n_y + z n_z) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} ] \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0 \cdot \phi \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS \end{aligned} \quad (7-38)$$

である。(7-32)と比べると、

$$\tau_S = -\varepsilon_0 \phi, \quad \tau_F = -\varepsilon_0(\phi_1 - \phi_2) \quad (7-39)$$

となることが判る。第二項の面積分は、境界面 S に分布する電気双極子モーメント  $\tau_S = -\varepsilon_0 \phi$ , 境界面 F に分布する電気双極子モーメント  $\tau_F = -\varepsilon_0(\phi_1 - \phi_2)$  によるポテンシャルエネルギーに相当する。

以上の電荷の面密度  $\sigma_S = \varepsilon_0(\partial\phi/\partial n)$ ,  $\sigma_F = \varepsilon_0\partial(\phi_1 - \phi_2)/\partial n_1$  を持つ一重層, モーメント面密度が  $\tau_S = -\varepsilon_0 \phi$ ,  $\tau_F = -\varepsilon_0(\phi_1 - \phi_2)$  である二重層, のポテンシャルを使うと、(7-36)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3 \mathbf{x} + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma_S}{r} dS + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_S \tau_S \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_F \frac{\sigma_F}{r} dS + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_F \tau_F \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} dS \end{aligned} \quad (7-40)$$

境界面 S を無限大に持ってゆけば第二, 第三項の面積分は 0 となり, 体積積分と不連続面 F に関する積分だけが残る。

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_F \frac{\sigma_F}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_F \tau_F \frac{\partial(1/r)}{\partial n_1} dS \quad (7-41)$$

また、(7-25)のグリーンの公式について再度考えると、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS \quad (7-34)$$

となる。従って、(7-25)グリーンの公式は次のようにも理解できる。有限体積  $V$  の領域で電荷密度分布  $\rho(\mathbf{x})$  を考え、 $V$  の境界面  $S$  に、1) 表面荷電層（面密度  $\sigma = \epsilon_0 \cdot (\partial\phi/\partial n)$ ）と 2) 電気二重層（双極子モーメントの面密度  $\tau = -\epsilon_0\phi$ ）を置いた場合の解になっている。このような表面荷電層と電気二重層の分布はグリーンの分布と呼ばれる。1) は境界が電場について不連続である場合、2) は境界がポテンシャルについて不連続である場合、に当たる。§6-7-3 で考えた「平面に一樣な電荷密度で電荷が分布する場合」は 1) の一重層の例になっている。電場の不連続は  $(\sigma/\epsilon_0)$  である。また、§6-7-5 で議論した「平板コンデンサー」で  $d$  を小さくした場合が 2) の電気二重層の例であり、この場合のポテンシャルの不連続は  $(\sigma/\epsilon_0)d$  である。