

§ 14 真空電磁場ベクトル・ポテンシャルの平面波展開

真空電磁場のベクトル・ポテンシャルを平面波展開することから、真空電磁場は無数の「力学的調和振動子の集合」と等価であるとの Jeans の定理が得られる。真空電磁場の全エネルギー (H) は力学的調和振動子と同じ形式で表現され、ハミルトンの正準形式を満たす。これより、真空電磁場の正準量子化が可能となり、その結果、古典的な波動 (光, 電磁波) は、調和振動子の量子論を経て、「粒子」としても理解できることになる。

(14-1) 真空電磁場のベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A})

電磁気学によれば、電場の強さ \mathbf{E} は、スカラー・ポテンシャル φ とベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} の両方が関与し、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

で与えられる。磁束密度 \mathbf{B} はベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) の回転である。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

スカラー・ポテンシャル $\varphi(\mathbf{x}, t)$ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ を合わせて、**電磁ポテンシャル** と言う。電荷も電流もない真空中の電磁場 (\mathbf{E} , \mathbf{B}) の問題は、ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) に対するクーロン条件、

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3)$$

を採用し、電荷も電流も無いことは

$$\rho_e = 0, \quad \mathbf{i} = 0 \quad (4)$$

として、Maxwell 方程式を考えれば良い。その結果、

$$\varphi = 0, \quad \text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7)$$

$$(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (8)$$

の連立方程式が得られる。これらから、 \mathbf{A} を消去する形で、真空電磁場の (\mathbf{E} , \mathbf{B}) の波動方程式を導き、その解を得ることも出来る。しかし、 \mathbf{A} に関する波動方程式(8)の解を、周期的境界条件を課して直接定めることもできる。

この立場からは、ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) の平面波展開した結果 (フー

リエ展開)を用い、真空電磁場を記述出来るとの結論になる。ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) は、色々に異なる無数の波数ベクトル(\mathbf{k})の平面進行波の重ね合わせで表現出来る。各平面進行波は横波としての振動方向(偏光成分)も区別されるが、何れも波動方程式を満足しており、力学的には「調和振動子」とみなすことができる。真空電磁場は「無数の力学的調和振動子の集合」と等価である(**Jeansの定理**)と言える。真空電磁場の全エネルギー(H)は力学的調和振動子と同様に、ハミルトンの正準形式を満たす。これより真空電磁場の**正準量子化**が可能となる。古典的な波動(光、電磁波)は「粒子」的に理解できることになる。ここでは、真空電磁場ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) の平面波展開^{9, 26, 76)}について簡単に記す。

(14-2) 立方体の周期的境界条件と \mathbf{A} に関する波動方程式の解

一辺の長さが L である立方体内の電磁場を考える。境界に依存しない状況を考える為に、立方体の形状に対応する \mathbf{A} についての周期的境界条件を考える。この条件は、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, y, z, t) &= \mathbf{A}(x + L, y, z, t) \\ &= \mathbf{A}(x, y + L, z, t) \\ &= \mathbf{A}(x, y, z + L, t)\end{aligned}\quad (9)$$

である。上述の \mathbf{A} に関する波動方程式は、 $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c = 2.998 \times 10^8 (m/s)$ として、

$$(\nabla^2 - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = c^2\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

である。(11)右辺は、 \mathbf{a}_k を振幅ベクトルとする波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の平面波進行波($\mathbf{a}_k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)}$)であるが、これは(9)の周期的境界条件を満たし、かつ、(10)の波動方程式も満たすので、特別の付帯条件を伴う。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}, \quad (11)$$

この事情は、(11)右辺を(9)と(10)に代入して確認出来る。特別の条件とは、この平面進行波の波数ベクトルの成分は

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad (12-1)$$

$$k_x = \frac{2\pi \cdot n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi \cdot n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi \cdot n_z}{L}, \quad (12-2)$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12-3)$$

であるとの条件が付く。さらに、この平面進行波の角周波数は、

$$\omega_{\mathbf{k}} = c \cdot |\mathbf{k}| = ck, \quad (12-4)$$

でなければならない。以下、これらの条件が付随する理由を確認しよう。

(9)の $\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x+L,y,z,t)$ に、(11)右辺の平面進行波を代入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x,y,z,t) &= \mathbf{A}(x+L,y,z,t) \\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} &= \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i[k_x(x+L) + k_y y + k_z z]} \\ e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} &\rightarrow 1 = e^{ik_x L} \end{aligned} \quad (13)$$

最後の等式より、

$$k_x = \frac{2\pi \cdot n_x}{L}, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

であれば $\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x+L,y,z,t)$ の境界条件は満足される。同様にして、y, zに関する境界条件から、(12-2)と(12-3)の条件となる。

(11)右辺の平面進行波を(10)の波動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t}) &= c^2 \nabla^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t}) \\ (-i\omega_{\mathbf{k}})^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t}) &= c^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \nabla^2 (e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。左辺での時間微分は $e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ のみに作用する。右辺側のラプラス演算子

$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は、位置変数のスカラー関数に作用するので、関係する

のは $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ だけである。振幅を表す定ベクトル $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ と $e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ には作用しない。ラプラス演算子が関与する部分は、

$$\begin{aligned} \nabla^2 (e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}) &= [(ik_x)^2 + (ik_y)^2 + (ik_z)^2] (e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}) \\ &= -[(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2] (e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}) \end{aligned}$$

となる。従って、元に戻すと

$$-(\omega_{\mathbf{k}})^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t}) = -[(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2] c^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (15)$$

となるので、結局、

$$(\omega_{\mathbf{k}})^2 = [(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2] c^2 = \mathbf{k}^2 c^2$$

となり、(12-4)の条件に帰着する。

以上のように、(11)右辺に示す $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ を振幅ベクトルとする波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の平面波進行波 ($\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$) が(12-1)~(12-4)の条件を備えていれば、その平面進行波は、(9)の周期的境界条件を満たし、かつ、(10)の波動方程式も満足する。 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$ は(12-1)~(12-4)の条件を満たす一つの平面進行波である。従って、このような平面進行波の重ね合わせ（一次結合）も全く同様な性質を

持つので、一般解としては、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c.c.\} \\ &= \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t) \exp[i \cdot \frac{2\pi}{L}(n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z)] + c.c.\} \quad (16) \end{aligned}$$

とできる。ただし、 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \rightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t)$ と表記している。また、 $c.c.$ は、初めの項に対する複素共役項(complex conjugate)を意味する。 a, b を実数とする時、複素数 $z=a+bi$ の共役複素数は、 $z^*=a-bi$ であり、初めの項で $i \rightarrow (-i)$ としたものになる。初めの項が解ならその複素共役項も自動的に解となっている(これは各自確認されたい)。しかし、問題にしている物理量は、常に実ベクトルであるから、最終的には、初めの項に対する複素共役との和を作ることによって ($z+z^*=2a$) 虚数部を消去し、実数部を残したものを解とする。和を2で割れば a となるが、振幅の大きさは任意だから、2で割っても割らなくても良い。和をとることは、平面進行波を複素形式で表現したことに対する必要な最終手続きである。

(16)は、周期的境界条件を満たすベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t)$ はフーリエ級数に展開出来ることを表す。即ち、周期的境界条件の下での $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t)$ の波動方程式の一般解は、「平面進行波の重ね合わせ」で表現できる。

(14-3) クーロン条件 ($\text{div}\mathbf{A} = 0$) との関連

以上の議論では、真空電磁場のクーロン条件($\text{div}\mathbf{A} = 0$)のことを考えていないので、ここで考えよう。(7)の「平面進行波の重ね合わせ」解を $\text{div}\mathbf{A} = 0$ に代入してみる。(16)右辺の「平面進行波の重ね合わせ」解を次のように略記する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c.c.\} \rightarrow \sum_{\mathbf{k}} \{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c.c.\} \quad (16)$$

$\text{div}\mathbf{A} = 0$ は、 $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ の意味である。(16)を代入する場合、 x 成分につ

いて考えると、 $[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]_x = [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ だから、

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x \frac{\partial}{\partial x} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)]_x \cdot (ik_x) \cdot (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})$$

である。 y, z 成分についても同様な結果になるので、

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\sum_{\mathbf{k}} \{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c.c.\}] &= \sum_{\mathbf{k}} \{i(\mathbf{a}_{\mathbf{k}x} \cdot k_x + \mathbf{a}_{\mathbf{k}y} \cdot k_y + \mathbf{a}_{\mathbf{k}z} \cdot k_z)(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + c.c.\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + c.c.\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

である。これが常に成立する為には、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (18)$$

でなければならない。即ち、ベクトル・ポテンシャルの振幅ベクトル $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ は、波数ベクトル \mathbf{k} と直交している。波数ベクトル \mathbf{k} に垂直な面内に、ベクトル・ポテンシャルの振幅ベクトル $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ があれば良い。 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ は横波である。この波数ベクトル \mathbf{k} に垂直な面内には、直交する二つの方向を指定出来る。その方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とすると、

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{a}_{\mathbf{k}})_1 \mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}_{\mathbf{k}})_2 \mathbf{e}_2 = \sum_{\sigma=1,2} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}})_{\sigma} \mathbf{e}_{\sigma} \quad (19)$$

と表現できる。これを(16)に代入すれば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \{ [\sum_{\sigma=1,2} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{e}_{\sigma}] + c.c. \} \quad (20)$$

である。波数ベクトル \mathbf{k} に垂直な面内での $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ の偏り(偏光)を考慮した表現になる。(20)で、 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{a}(n_x, n_y, n_z, t) \rightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ と元の形に戻せば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \{ [\sum_{\sigma=1,2} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} \mathbf{e}_{\sigma}] + c.c. \}$$

$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ を波数ベクトルが \mathbf{k} である時の σ の偏り方向の単位ベクトルとすれば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \{ |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} + c.c. \} \quad (21)$$

と表現できる。また再度、

$$|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} = \{ |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (22)$$

と表現すれば、(21)の複素表現は、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (23)$$

とも表現出来る。最終的には(21)も(23)も実ベクトルとして考えるので、実表現としては、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma}) \quad (24)$$

と書いても良い。

(24)は、様々に異なる波数ベクトル \mathbf{k} と σ の偏り方向($\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ の方向)の振幅の大きさ $|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}|$, 対応する初期位相 $\phi_{\mathbf{k}\sigma}$ を与えれば, 平面進行波の重ね合わせ(単振動の重ね合わせ)としてベクトル・ポテンシャル(\mathbf{A})は表現出来ることを示している。

(14-4) ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) から求める \mathbf{E} , \mathbf{B}

ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) を用いて, (6)と(7)から (\mathbf{E} , \mathbf{B}) の表現が得られる。(24)の実ベクトル表現を使うと,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma}) \right\} \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot (-\omega_k) \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma})\end{aligned}$$

$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi \rightarrow \varphi = \pi/2$ で $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$ より

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot (\omega_k) \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \quad (25)$$

である。 \mathbf{E} は, \mathbf{A} と同じ単位ベクトル $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ で記述されるので, 両者には振幅の大きさ, 位相差($\pi/2$)の違いはあるが, 偏光特性も含めて同じような「波動ベクトル」と考えれば良い。

ベクトル・ポテンシャル (\mathbf{A}) (24)の複素表現を使えば,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] \right\} \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)}{\partial t} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)}{\partial t} \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \omega_k [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] \quad (26)\end{aligned}$$

となる。

一方, 磁束密度の方は, (24)の実表現を使うと,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\sigma}) \right\}$$

$$= \text{rot} \left\{ \sum_k \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \right\} \quad (27)$$

となる. rot と Σ は順序を変更できる. また, rot は,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} - \left(\frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (28)$$

であるから, $\mathbf{C} = |\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma})$ と置いてみる. 各成分は

$$C_x = [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_x \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma})$$

$$C_y = [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma})$$

$$C_z = [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma})$$

だから, $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) = \cos[(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z) - \omega_k t + \phi_{k\sigma}]$ に注意して, その x 成分を考えると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) &= [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \\ &\quad - [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \\ &= [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \cdot (-k_y) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \\ &\quad - [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y \cdot (-k_z) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \end{aligned}$$

演算子は定ベクトル成分には作用しない. また, $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) &= [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \cdot (k_y) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma} + \pi/2) \\ &\quad - [|\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y \cdot (k_z) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma} + \pi/2) \end{aligned} \quad (29)$$

となる. \mathbf{C} の y, z 成分も同様に考えれば良いから,

$$\mathbf{C} = |\mathbf{a}_{k\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t + \phi_{k\sigma}) \quad (30)$$

とすると,

$$\text{rot } \mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_x & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_y & [|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]_z \end{vmatrix} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{C}'
\end{aligned} \tag{31}$$

ただし、 \mathbf{C}' と \mathbf{C} は位相差 ($\pi/2$) のみ異なり、

$$\mathbf{C}' = |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{32}$$

である。故に、ベクトル・ポテンシャルの実表現(24)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma})$$

を使うと、

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \mathbf{k} \times |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{33}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} |\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}| \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot (\omega_{\mathbf{k}}) \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}\sigma} + \pi/2) \tag{34}$$

である。 \mathbf{B} と \mathbf{E} を比べれば、各進行波の波数ベクトル \mathbf{k} 、偏光成分 σ が指定すベクトル・ポテンシャル成分 ($\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$) が与えられた時、これに対応する電場と磁場成分の間には位相差はない。ベクトルの外積 $\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ の定義と $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} = 0$ の横波の条件から、波数ベクトル \mathbf{k} とベクトル・ポテンシャル成分の方向 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ の外積 ($\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$) が、 \mathbf{B} の各成分の方向を指定する(図 25-1)。両者は、図 14-1 に示すように、 \mathbf{k} は「右手系 z 軸」、 \mathbf{B} の各成分は「右手系 y 軸」に対応し、両者は相互に直交している。 \mathbf{A} 、 \mathbf{E} の各成分の方向 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ は「右手系 x 軸」の方向にあるの

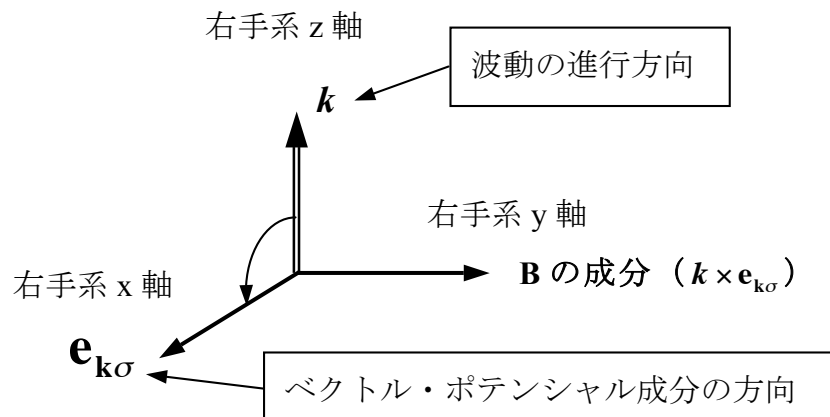


図 14-1. 波数ベクトル \mathbf{k} の方向とベクトル・ポテンシャル成分、磁場成分の方向の関係

で、三者は相互に直交している。

ベクトル・ポテンシャルの複素表現(A11-24),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

を使う場合は,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \left\{ \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \right\} \quad (35)$$

である。各成分について、実数表現の場合と同じように考えれば良い。演算子は $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ と $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ の項のみに作用する。

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ i \cdot k_x & i \cdot k_y & i \cdot k_z \\ [|\mathbf{a}_{k\sigma}(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_x & [|\mathbf{a}_{k\sigma}(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y & [|\mathbf{a}_{k\sigma}(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \end{vmatrix} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \text{rot}[\mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -i \cdot k_x & -i \cdot k_y & -i \cdot k_z \\ [|\mathbf{a}_{k\sigma}^*(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_x & [|\mathbf{a}_{k\sigma}^*(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_y & [|\mathbf{a}_{k\sigma}^*(t)| \cdot \mathbf{e}_{k\sigma}]_z \end{vmatrix} \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \\ = i [\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \end{aligned}$$

となる。従って、(35)は,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (36)$$

である。 \mathbf{B} のこの複素表現は、 \mathbf{E} の複素表現

$$\mathbf{E} = i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} \omega_k [\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (26)$$

と共に、電磁場のエネルギーを表現する為に以下で利用できる。もちろん、(26), (27)の \mathbf{E}, \mathbf{B} の実表現を使っても良い。

(14-5) 電磁場のエネルギー

電磁気学によれば、体積 $V(=L^3)$ の真空電磁場の全エネルギーを H とすると、

$$H = \int_V u_{e.m.} dV \quad (37)$$

である。 $u_{e.m.}$ は単位の体積当たりの電磁場のエネルギーで、

$$u_{e.m.}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)]$$

となる。これは、

$$u_{e.m.}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 [\mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t)]. \quad (38)$$

となるので、電磁場の全エネルギーは(SI 単位系で)、

$$H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V [\mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t)] dV \quad (39)$$

である。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [k \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (40)$$

$$\mathbf{E} = i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} \omega_k [\mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (41)$$

を、(39) $H = (1/2)\epsilon_0 \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) dV$ に代入して、その表現を求めよう。

\mathbf{E}^2 から調べると、

$$\mathbf{E}^2 = [i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} \omega_k (\mathbf{a}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})] \cdot [i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} \omega_k (\mathbf{a}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]$$

(以後は、 $\mathbf{a}_{k\sigma}(t), \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \rightarrow \mathbf{a}_{k\sigma}, \mathbf{a}_{k\sigma}^*$, $\sum_k \sum_{\sigma=1,2} \rightarrow \sum_{k,\sigma}$ と表記する)

$$= [i \sum_{k,\sigma} \omega_k (\mathbf{a}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})] \cdot [i \sum_{k,\sigma} \omega_k (\mathbf{a}_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \mathbf{a}_{k\sigma}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})]$$

(この積は4種類の和になるから)

$$= - \sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} \omega_k \omega_{k'} [(\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{k'\sigma'}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - (\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{k'\sigma'}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ - (\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{k'\sigma'}^*) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + (\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{k'\sigma'}^*) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}] \quad (42)$$

である。 \mathbf{E}^2 の各項を体積積分するが、関係するのは、 $e^{\pm i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$ だけであり、

$\mathbf{a}_{\mathbf{k}0}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}'0}^*$ の定ベクトルは無関係である. $e^{\pm i(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$ のうちの $e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$ の積分を以下で考える.

$$I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = \int_V e^{i[(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_x \cdot x + (\mathbf{k} + \mathbf{k}')_y \cdot y + (\mathbf{k} + \mathbf{k}')_z \cdot z]} dx dy dz$$

$$= \int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_z \cdot z} \int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_y \cdot y} \left\{ \int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_x \cdot x} dx \right\} dy dz \quad (43)$$

となるから, まず $\{ \quad \}$ 内の x についての積分を考えると

$$(k_x + k'_x) = 0 \rightarrow \int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_x \cdot x} dx = L; \quad (k_x + k'_x) \neq 0 \rightarrow \int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_x \cdot x} dx = 0 \quad (44)$$

である. $(k_x + k'_x) = 0$ の場合は説明を要しない. しかし, $(k_x + k'_x) \neq 0$ の場合は, $k_x = 2\pi \cdot n_x / L, k'_x = 2\pi \cdot n'_x / L$ ($n_x, n'_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の条件により

$$\int_0^L e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')_x \cdot x} dx = \frac{-1}{(k_x + k'_x)} \left| \sin(k_x + k'_x)x \right|_0^L + i \cdot \frac{1}{(k_x + k'_x)} \left| \cos(k_x + k'_x)x \right|_0^L = 0$$

である. (43) の y での積分, z での積分に於いても(44)と同じような結果となるので, (43)の積分全体は,

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = L^3 = V \quad (45-1)$$

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \quad (45-2)$$

となる.

(42)の四項のうち, 残りの二つの $e^{\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$, 一つの $e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$ の体積積分についても, (45-1)と(45-2)と同様の結果が得られる.

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = L^3 = V \quad (46-1)$$

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \quad (46-2)$$

$e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$ については, (45-1)と(45-2)を次のように改めればよい,

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = L^3 = V \quad (47-1)$$

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}) \rightarrow I(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \int_V e^{\pm i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3 = 0 \quad (47-2)$$

以上の体積積分では, (46-1)と(46-2)では $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{0}$ の場合, 即ち, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \omega_{k'} = \omega_k$

の場合のみが残る。(47-1)と(47-2)では $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ の場合が残るので、この場合も $\omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$ であることに注意。従って、(42)の積分全体は

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V \sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} (\omega_k)^2 [-(\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) - (\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma}^*)] \quad (48)$$

である。右辺側の和 $(\sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'})$ は、 $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ と $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ だけが残ることになったので、 \mathbf{k}' を落としている。元々は $\sum_k \sum_{\sigma=1,2} \rightarrow \sum_{k,\sigma}$ との表記による。 $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ と

$\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ だけが残ることも考慮すると、

$$\sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} \rightarrow \sum_{k,\sigma} \sum_{k,\sigma'} = \sum_k \sum_{\sigma=1,2} \sum_k \sum_{\sigma'=1,2} \rightarrow \sum_{k,\sigma} \sum_{\sigma'}$$

と、 \mathbf{k}' を落とした和となる：

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V \sum_{k,\sigma} \sum_{\sigma'} (\omega_k)^2 [-(\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) - (\mathbf{a}_{k\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma}^*)] \quad (49)$$

である。

磁場のエネルギーも同様に表現出来る。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [k \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] \quad (40)$$

を用いて、 $\int_V \mathbf{B}^2 d\mathbf{x}^3$ を求めれば良い。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 &= \{i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [k \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]\} \cdot \\ &\quad \{i \sum_k \sum_{\sigma=1,2} [k \times \mathbf{a}_{k\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]\} \\ &\quad (\text{再度 } \mathbf{a}_{k\sigma}(t), \mathbf{a}_{k\sigma}^*(t) \rightarrow \mathbf{a}_{k\sigma}, \mathbf{a}_{k\sigma}^* \text{ と } t \text{ を省略する}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 &= (-1) \sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} [(k \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (k' \times \mathbf{a}_{k'\sigma'}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad - (k \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (k' \times \mathbf{a}_{k'\sigma'}^*) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad - (k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*) \cdot (k' \times \mathbf{a}_{k'\sigma'}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad + (k \times \mathbf{a}_{k\sigma}^*) \cdot (k' \times \mathbf{a}_{k'\sigma'}^*) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}] \quad (50) \end{aligned}$$

これを体積積分すれば、(46-1), (46-2), (47-1), (47-2) のように、第一と第四項は $(\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0})$ のみが残る、第二項と第三項は $(\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{0})$ のみが残る。何れの項も体

積積分は V となる。即ち,

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}^2 d\mathbf{x}^3 &= (-1)V \sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} [(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{-k\sigma'}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}') \\ &\quad - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma'}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}')] \\ &= V \sum_{k,\sigma} \sum_{\sigma'} [(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{-k\sigma'}) + 2(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma'}) \\ &\quad + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}')] \quad (51) \end{aligned}$$

ここには $(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{-k\sigma'})$ のような「ベクトル外積の内積」が現れるが、これらにはベクトル解析の公式,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (52)$$

を使う。この公式が成立することは、外積と内積の定義,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

を使い、 x, y, z 成分に戻って考えれば確認出来る。

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma'}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) \cdot (\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{k})$$

となる。しかし、右辺の第二の項は、波数ベクトルとベクトル・ポテンシャルが直交していることから [(18)の $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0$] , 消えるので、結局,

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{k\sigma'}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) = k^2 \cdot (\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'}) \quad (53)$$

となる。他の場合も同様な結果が得られる。従って、(51)は

$$\int_V \mathbf{B}^2 d\mathbf{x}^3 = V \sum_{k,\sigma} \sum_{\sigma'} (k^2) [(\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'} + (\mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot \mathbf{a}_{k\sigma}'] \quad (54)$$

である。

電磁場の全エネルギーは,

$$H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V [\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{x},t)] dV \quad (39)$$

であるから,

$$\int_V \mathbf{E}^2 d\mathbf{x}^3 = V \sum_{k,\sigma} \sum_{\sigma'} (\omega_k)^2 [-(\mathbf{a}_{k\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot \mathbf{a}_{k\sigma'} - (\mathbf{a}_{k\sigma}') \cdot \mathbf{a}_{-k\sigma}'] \quad (49)$$

と(54)を使えば良いが,

$$(\omega_k)^2 = c^2 k^2 = \frac{k^2}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \quad (55)$$

の関係があったことにも留意すると,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V [\mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t)] dV \\
 &= \frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\sigma'} (\varepsilon_0) (\omega_{\mathbf{k}})^2 [-(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) - (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}^*) \\
 &\quad + (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\sigma'}) + 2(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) + (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}^*)]
 \end{aligned}$$

となり, 中央の項のみが残り, 結果は次のように簡素なものとなる.

$$\begin{aligned}
 H &= 2V \cdot \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\sigma'} (\omega_{\mathbf{k}})^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma'}) \\
 &= 2V \cdot \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\sigma'} (\omega_{\mathbf{k}})^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})^2 \cdot \delta_{\sigma\sigma'} = 2V \cdot \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} (\omega_{\mathbf{k}})^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma})^2 \quad (56)
 \end{aligned}$$

$\delta_{\sigma\sigma'}$ は, 偏光成分が同じならば 1, 異なれば両者は直交するよう選んであるから 0 である. これは偏光成分の振幅の二乗和と同じことである. 電磁場の全エネルギーは簡単な表現で与えられる. この(56)は, 力学的調和振動子のエネルギーと同じ形式になっている. これを次ぎに確認しよう.

(14-6) 電磁場の全エネルギーと調和振動子のエネルギーの対応

ベクトル・ポテンシャルの複素表現(23)は,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (23)$$

に留意して, 表記を $\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \rightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$, $\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \rightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \cdot e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}$ と又元に戻す. 添字 $\mathbf{k}\sigma$ は, 進行方向が \mathbf{k} である平面波の二つの横波 ($\sigma=1,2$) の振幅であることを表す. そして, 以下のように, 実表現に対応する新変数を定義する.

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \equiv (V\varepsilon_0)^{1/2} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)] \quad (56-1)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \equiv \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} (V\varepsilon_0)^{1/2} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)] \quad (56-2)$$

この変数 (一般化座標と一般化運動量) を使って, 以下の量を求めると,

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} [\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) + (\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t)] = 2V\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \sigma} (\omega_{\mathbf{k}})^2 \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) = H \quad (57)$$

となり, 電磁場の全エネルギーに等しい. (56-2)から, (57)は,

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} [\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) + (\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t)] = 2V\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \sigma} (\omega_{\mathbf{k}})^2 \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) = H$$

とも表現できる.

次に, $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ と $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ はハミルトンの正準方程式を満たすことを確認しよう.

(56-1) と (56-2) より, 両者の時間微分は,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) &= (V\varepsilon_0)^{1/2}[\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \dot{\mathbf{a}}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] = -i\omega_{\mathbf{k}}(V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\end{aligned}\quad (58)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) &\equiv \ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}}(V\varepsilon_0)^{1/2}[\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \dot{\mathbf{a}}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] \\ &= -(\omega_{\mathbf{k}})^2(V\varepsilon_0)^{1/2}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)] = -(\omega_{\mathbf{k}})^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\end{aligned}\quad (59)$$

である. さらに, (57) の H (電磁場の全エネルギー: Hamiltonian) は,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\sigma} [\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) + (\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}^2(t)] \quad (57)$$

だから, 以下のハミルトンの正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \quad -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}} = \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \quad (60)$$

が成立することを確認できる. (57) の H を $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ と $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ で各々偏微分すると,

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \quad -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}} = -(\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$$

の各々の第一等式となる. さらに, (58) の $\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ と (59) の $\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \equiv \ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = -(\omega_{\mathbf{k}})^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ を使うと, それぞれの第二等式が成立する. これは(60)のハミルトンの正準方程式である. このように, $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ と $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ は, ハミルトンの正準方程式を満たす正準共役な「座標」と「運動量」である. 真空電磁場 (輻射場) を正準量子化する際に必要なステップである.

一方, 良く知られているように, 質量 m , バネ定数 K の調和振動子の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{K/m}$$

である. この方程式に, $x = q \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ を代入すると, これが解であることが判る. この調和振動子の全エネルギー (Hamiltonian) を H_0 とすると,

$$H_0 = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \quad (61)$$

である. (61) で,

$$Q \equiv \sqrt{m}x, \quad P \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}p \quad (62)$$

と変換する.

$$P \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} p = \frac{1}{\sqrt{m}} (m\dot{x}) = \sqrt{m}\dot{x} = \dot{Q} \quad (63-1)$$

$$\sqrt{m} \cdot \ddot{x} = -\sqrt{m} \cdot \omega^2 x \rightarrow \dot{P} = -\omega^2 Q \quad (63-2)$$

を意味している. 従って, (61)の全エネルギー (Hamiltonian) は,

$$H_0 = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 \cdot Q^2) \quad (64)$$

故に, 調和振動子の (Q, P) は

$$\frac{\partial H_0}{\partial P} = \dot{Q}, \quad -\frac{\partial H_0}{\partial Q} = \dot{P} \quad (65)$$

のハミルトンの正準方程式を満たす. 調和振動子の (Q, P) は

$$Q \leftrightarrow \mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t), \quad P \leftrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k},\sigma}(t) \quad (66)$$

と電磁場の $(\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}(t), \mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma}(t))$ に対応する.

真空電磁場ベクトル・ポテンシャルの平面進行波・偏光成分に対する $(\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\sigma}, \mathbf{P}_{\mathbf{k},\sigma})$ は, 調和振動子の (Q, P) と同じように, ハミルトンの正準方程式を満たす正準共役な「座標」と「運動量」である. この正準方程式のレベルで, ベクトル・ポテンシャル波動成分と力学的調和振動子は相互に対応している. 真空電磁場のベクトル・ポテンシャルの平面波展開から, 真空電磁場は「無数の調和振動子の集合」と等価であるとの結論になる. これは「Jeans の定理」と呼ばれるが, 「波動」を伝播させる電磁場は「無数の調和振動子」と考えても良い訳だから, 電磁波は「粒子的」にも理解できることになる. その理由を次の調和振動子の量子論で考えよう.