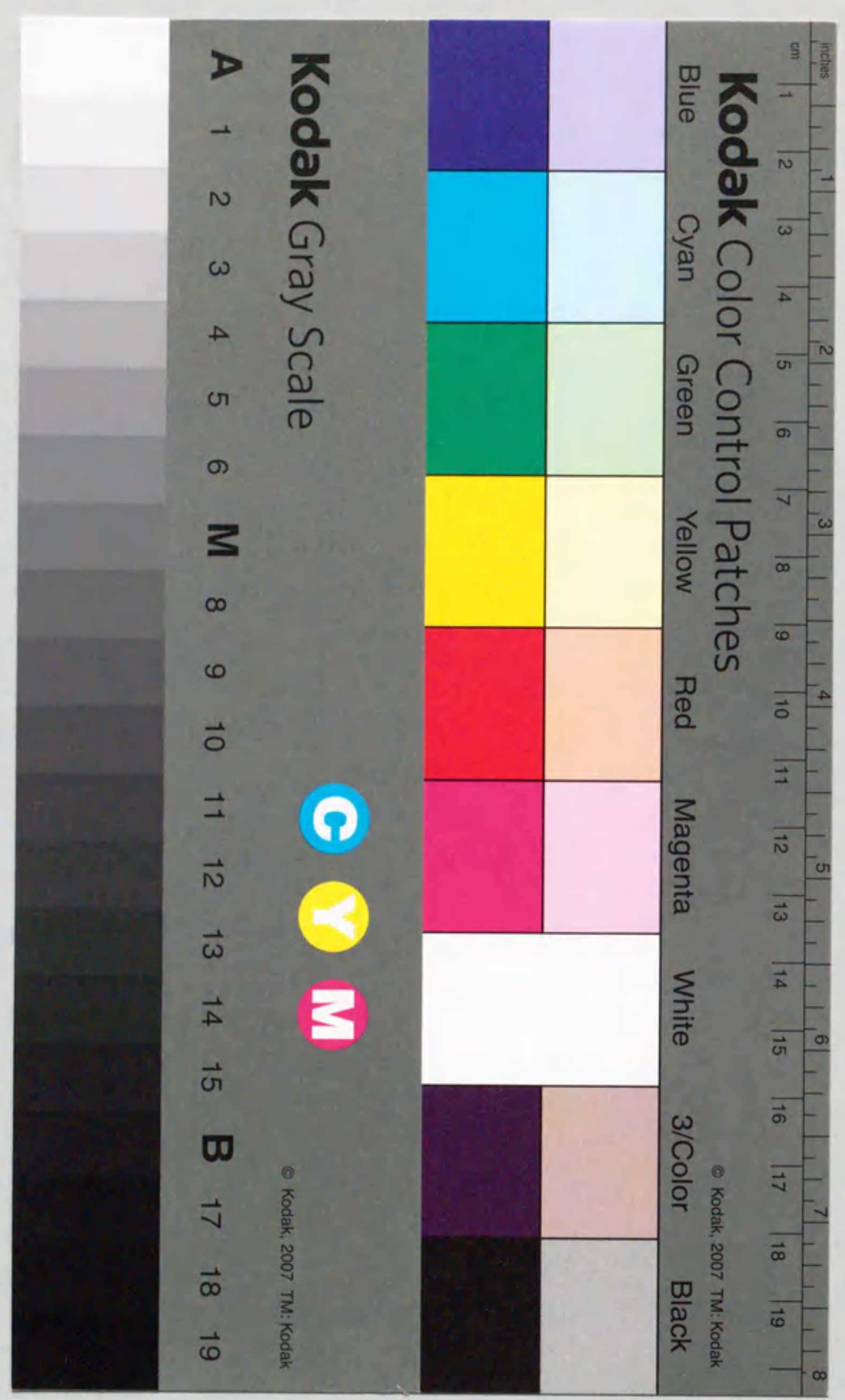


FFTの一般化とその数値解析的応用
に関する研究

杉浦 洋



FFTの一般化とその数値解析的応用
に関する研究

杉浦 洋

序

1965年Cooley とTukey は高速Fourier変換法(FFT)を発表し、標本数 n の離散型Fourier変換とその逆変換に要する時間が、従来の $O(n^2)$ から $O(n \log n)$ へと画期的に短縮できることを示した。FFTは、Fourier変換、Fourier展開、コンボリューションなどの計算を飛躍的に高速化し、デジタル信号処理、統計解析、システム解析などの分野に急速に広まった。

我々の興味は、FFTにより複素周期連続関数の、等間隔標本点集合上の補間三角多項式の係数と関数値の変換が、高速におこなえるということにある。

複素周期連続関数の三角多項式補間の問題は、簡単な変数変換を通じて複素平面単位円周上の複素連続関数の巾級数補間の問題と等価である。また、関数族を制限することにより、実周期関数の三角多項式補間、実周期偶関数のcosine級数補間、実周期奇関数のsine級数補間の問題となる。さらに、実周期偶関数のcosine級数補間は、ある変数変換によって有限区間 $[-1, 1]$ における実連続関数のChebyshev級数補間と等価となる。

これらの補間法は、関数をそれが属する関数族の特徴的な基底で近似展開する手段であり、得られる近似式は微積分等の基本的な演算が容易である。このことから、等間隔点集合上の三角多項式補間とそのアルゴリズムとしてのFFTは、単に周波数解析や、関数近似の手段として用いられるのみならず、上で述べた関数族の上の各種の作用素の近似、関数方程式の近似解法などに広く用いられている。

補間法を用いる上で重要な要素となるのは、標本点集合の選択である。周期連続関数に対する標本点数が2の中の等間隔点集合上の三角多項式補間は、FFTによる高速アルゴリズムが確立しているとともに、安定性と精度においても、ある種の最良性を持つ。しかしながら、補間式の精度と密接に関係する標本点数の選択は2の中に限定される。

標本点数の選択の自由度を広げるために、この論文では準等間隔標本点集合上の三角多項式補間を提案する。準等間隔標本点は、等間隔標本点のある種の一般化であるが、その上での三角多項式補間は、安定性と精度において等間隔標本点上の三角多項式補間とはほぼ同等であることを示す。また、補間法のための効率的なアルゴリズムを提示する。このアルゴリズムは基数2のFFTの自然な一般化であり、その演算量は標本点数 n に対してFFTと同じ $O(n \log n)$ であるのみならず、 $n \log n$ の係数まで一致する。また、FFTと同じく上で述べた各種の近似問題に応用できる。

関数近似への応用で重要なことは、準等間隔標本点集合の採用により、関数の複雑さに

応じて標本点を任意に小さな増加率で順次追加してゆく自動補間システムが構成できることである。この様な補間システムは、等間隔標本点とFFTを使っても構成できるが、標本点数の増加率は2以上にならざるを得ず、きめ細かな精度コントロールができなかった。

このような補間システムは、単なる関数近似のみならず、各種作用素、汎関数の近似においても有用であり、現実には数値積分法などの基本的な構成要素として効果的に用いられている。

目次

1章 複素領域の補間法	
1-1 はじめに	1
1-2 補間法とその安定性	2
1-3 補間法の精度	4
1-4 事後誤差評価法	6
2章 単位円周上の多項式補間とFFT	
2-1 はじめに	8
2-2 単位円周上の多項式近似	11
2-3 準等間隔標本点上の補間の安定性と精度	14
2-4 準等間隔標本点上の補間法の高速アルゴリズムと数値的安定性	16
2-5 事後誤差評価法	22
2-6 再利用性を持つ標本点列の構成	27
2-7 高速自動補間法	30
2-8 数値実験	34
3章 有限巾級数補間、あるいは数値Fourier変換	
3-1 はじめに	36
3-2 準等間隔標本点上の有限巾級数補間の安定性と収束性	36
3-3 準等間隔標本点上の補間法の高速アルゴリズムと数値的安定性	40
3-4 事後誤差評価法	44
3-5 高速自動補間法	48
4章 関数の対称性と補間	
4-1 はじめに	51
4-2 実関数の補間の安定性と収束性	53
4-3 実共役対称関数、実共役歪対称関数の補間の安定性と収束性	57
4-4 準等間隔標本点上の実関数補間の誤差解析	60
4-5 実共役対称関数及び実共役歪対称関数の補間の誤差解析	65
4-6 準等間隔標本点上の三角多項式補間による線形汎関数の近似	68
4-7 区間 $[1, -1]$ の実関数のChebyshev級数補間	70
5章 対称関数のための高速補間アルゴリズム	
5-1 はじめに	73
5-2 実周期関数のLagrange補間	74

5-3 準等間隔標本点上の高速算法	76
5-4 偶関数と奇関数のための高速補間アルゴリズム	81
5-5 逆変換の高速アルゴリズム	86
5-6 再利用可能標本点集合列	89
5-7 数値実験	90
6章 再利用可能標本点列	
6-1 はじめに	93
6-2 自己再利用性	94
6-3 Van der Corput 列	98
6-4 Van der Corput 列上の補間の安定性	103
6-5 Van der Corput 列上の補間の精度	108
結論	114
謝辞	116
参考文献	117

1章 複素領域の補間法

1-1. はじめに

2章以下では、単位円周上の複素関数の有限巾級数補間、複素周期関数の複素有限Fourier級数補間、実周期関数の実有限Fourier級数補間、実周期偶関数の有限cosine級数補間、実周期奇関数の有限sine級数補間、及び実軸の有限区間[-1, 1]の実関数の有限Chebyshev級数補間の問題を扱う。これらの補間問題は、すべて複素平面のある領域で定義された特定の関数族に対する補間問題と考えることができる。この章では、以下の章の準備として、複素平面の領域における補間問題について一般的に考察しておく。

複素平面 \mathbf{C} の連結領域 \mathbf{D} で定義された連続関数全体を $\mathcal{C}(\mathbf{D})$ とする。空間 $\mathcal{C}(\mathbf{D})$ には一様ノルム $\|\cdot\|$ をいれる。空間 $\mathcal{C}(\mathbf{D})$ の部分空間 \mathbf{X} は基礎体 \mathbf{K} 上の無限次元ベクトル空間とする。ここで、基礎体 \mathbf{K} は複素数体 \mathbf{C} か実数体 \mathbf{R} とする。部分空間 \mathbf{X} の可算無限基底を $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ とし $\|\varphi_k\|=1, k \geq 1$,と正規化されているものとする。空間 \mathbf{X} の有限次元部分空間 Π_n を

$$\Pi_n := \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k : c_k \in \mathbf{K} \right\}, \tag{1-1-1}$$

$$\Pi_\infty := \bigcup_{n \geq 1} \Pi_n. \tag{1-1-2}$$

と定義し、 Π_∞ の要素である有限級数による \mathbf{X} の元 f の近似問題を考える。

関数 f の $\Pi_n, n \geq 1$,の要素による最良近似度を

$$E_n(f) := \inf_{g \in \Pi_n} \|g - f\|, f \in \mathbf{X}, \tag{1-1-3}$$

とする。すべての $f \in \mathbf{X}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0, \tag{1-1-4}$$

が成立するとき、有限級数 Π_∞ は \mathbf{X} で稠密であるという。 Π_∞ の稠密性は、有限級数により関数 $f \in \mathbf{X}$ を近似することの正当性を保証する。

2節で述べるように、ある種の条件下では、任意の関数 $f \in \mathbf{X}$ に対して、 $\rho_n(f) \in \Pi_n$ が唯一つ存在して、

$$\|\rho_n(f) - f\| = E_n(f), \tag{1-1-5}$$

となる。この $\rho_n(f)$ を f の Π_n における最良近似という。作用素 ρ_n は非線形であり、任意の f に対して $\rho_n(f)$ を求めることは一般には困難である。

1-2. 補間法とその安定性

領域 D の要素数 n の有限集合を $X = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ とする。関数 $f \in X$ に対する X 上の補間問題は、補間条件

$$g(\xi_l) = f(\xi_l), \quad 1 \leq l \leq n, \quad (1-2-1)$$

を満たす $g \in \Pi_n$ を求めることである。このような g は、

$$g = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k, \quad C_k \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1-2-2)$$

と展開して、係数 C_k , $1 \leq k \leq n$, に関する線形方程式、

$$\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(\xi_l) = f(\xi_l), \quad 1 \leq l \leq n, \quad (1-2-3)$$

が解ければ具体的に求まる。方程式(1-2-3)の係数行列 $(\varphi_k(\xi_l))$ は、 $\varphi_k(z) = z^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$, ならば Van der Monde 行列である。すべての要素数 n の有限集合 $X = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ に対して、係数行列 $(\varphi_k(\xi_l))$ が正則であるとき、 Π_n は Haar の条件を満たすという。また、 Π_n , $n \geq 1$, のすべてが Haar の条件を満たすとき部分空間列 Π_n , $n \geq 1$, あるいは基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ は Chebyshev 系をなすという。我々が 2 章以下で具体的に扱う基底はすべて Chebyshev 系である。

以下、基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ は Chebyshev 系であることを仮定する。方程式(1-2-3)の係数行列 $(\varphi_k(\xi_l))$ の逆行列を $W(X)$ とかく。これにより、式(1-2-2)の展開係数は、

$$(C_1, \dots, C_n)^T = W(X)(f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))^T, \quad (1-2-4)$$

によって一意に定まる。それに要する演算は、 n^2 の乗算と加算である。このとき、

$$L(X)f := \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k, \quad (1-2-5)$$

で定義される X から Π_n の上への線形射影 $L(X)$ を補間作用素という。

数値計算においては、標本値 $f(\xi_l)$, $1 \leq l \leq n$, に対して各種の原因による誤差の混入が避け難い。入力誤差が結果に対して大きな影響を与えないとき、その作用素あるいは計算は安定であるといい、重大な影響を与えるとき不安定であるという。

補間法の安定性を 2 つの観点から調べてみる。第一の観点は、線形変換 $W(X)$ の安定性、すなわち補間係数 $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T \in \mathbf{K}^n$ の計算に関する安定性である。基礎体 \mathbf{K} 上の n 次元ベクトル空間 \mathbf{K}^n にノルム $\|\cdot\|$ を入れる。関数値 $\mathbf{f} = (f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))^T \in \mathbf{K}^n$ に混入した誤差 $\Delta \mathbf{f} \in \mathbf{K}^n$ による係数 \mathbf{C} の摂動 $\Delta \mathbf{C}$ は、線形変換 $W(X)$ の条件数 $\text{cond}(W(X))$ によって、

$$\frac{\|\Delta \mathbf{C}\|}{\|\mathbf{C}\|} \leq \text{cond}(W(X)) \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}, \quad (1-2-6)$$

でおさえられる。ここで、任意の $n \times n$ 正則行列 A に対して、行列のノルムを

$$\|A\| := \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|, \quad (1-2-7)$$

条件数を、

$$\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad (1-2-8)$$

と定義する。したがって、 $W(X)$ の条件数 $\text{cond}(W(X))$ が小さいほど、補間係数の計算は安定である。ある不等式 $A \leq B$ が成立し、しかも任意の正数 ε に対して不等式 $A \leq B - \varepsilon$ が不成立であるとき、その不等式は最良であるという。式(1-2-6)は最良である。

第 2 の観点として、補間作用素 $L(X)$ の安定性について考察する。作用素 $L(X)$ のノルムを $\Lambda(X)$ とかき、 $L(X)$ の Lebesgue 定数とよぶ。すなわち、

$$\Lambda(X) := \|L(X)\| \equiv \max_{f \in X, \|f\|=1} \|L(X)f\|. \quad (1-2-9)$$

$\|f\|=1$ なら、 n 次元ベクトル空間 \mathbf{K}^n の 1-ノルム $\|\cdot\|_1$ によって、

$$\|f\|_1 \leq n, \quad \mathbf{f} = (f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))^T,$$

だから、式(1-2-5)と正規化条件 $\|\varphi_k\|=1, k \geq 1$, より

$$\|L(X)f\| \leq \sum_{k=1}^n |C_k| \leq \|W(X)\|_1 \|f\|_1 < n \|W(X)\|_1 < \infty,$$

となり、Lebesgue 定数 $\Lambda(X)$ は有界である。

作用素 $L(X)$ は線形だから、 f の誤差 Δf による $g = L(X)f$ の摂動 Δg は $L(X)\Delta f$ である。これより、

$$\|\Delta g\| \leq \Lambda(X) \|\Delta f\|, \quad (1-2-10)$$

を得る。この不等式も Lebesgue 定数 $\Lambda(X)$ の定義より最良である。

次に、標本値 $\mathbf{f} = (f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))^T$ に混入した誤差 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)^T \in \mathbf{K}^n$ による $g = L(X)f$ の

摂動 Δg を調べてみる。我々が、2章以下で考察する具体的な補間問題では、任意の δ に対して、 $\Delta f(\xi_l) = \delta_l$, $1 \leq l \leq n$, かつ $\|\Delta f\| = \max_{1 \leq l \leq n} |\delta_l|$ なる $\Delta f \in \mathbf{X}$ が容易に構成できる。この Δf について $\Delta g = L(X)\Delta f$ であるから、不等式

$$\|\Delta g\| = \Lambda(X) \max_{1 \leq l \leq n} |\delta_l| \equiv \Lambda(X) \|\delta\|_\infty, \quad (1-2-11)$$

を得る。ここで $\|\cdot\|_\infty$ は n 次元ベクトル空間 \mathbf{K}^n の一様ノルムである。不等式(1-2-11)も最良である。

式(1-2-10, 11)は、Lebesgue定数 $\Lambda(X)$ が小さいほど補間作用素 $L(X)$ が安定であることを示している。

1-3. 補間法の精度

2章以降で対象とする補間問題においては、基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ はすべてChebyshev系である。基底がChebyshev系であれば、最良近似について次の定理が成り立つ。引用は、[Meinardus, 1967, p.16]よりおこなった。

定理 1-3-1 ([Haar 1918], [Kolmogoroff 1948]): 空間 \mathbf{X} の基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ がChebyshev系であれば、任意の $f \in \mathbf{X}$ と自然数 n に対して、 Π_n 上の f の最良近似 $\rho_n(f)$ が唯一つ存在する。

補間作用素 $L(X)$ は \mathbf{X} から Π_n 上への射影である。このことより、次の不等式を得る。

$$\|L(X)f - f\| \leq (1 + \Lambda(X)) E_n(f). \quad (1-3-1)$$

したがって、補間式 $L(X)f$ の誤差は高々最良近似度 $E_n(f)$ の $(1 + \Lambda(X))$ 倍である。また、Lebesgue定数 $\Lambda(X)$ が小さいほど補間式 $L(X)f$ に良い精度が期待できる。

現実に、我々がある補間法を関数 f の近似の有効な手段として採用するのは、基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ による関数 f の級数展開

$$f = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k, \quad (1-3-2)$$

が存在し、収束が速い場合である。展開係数 c_k , $1 \geq k$, は、具体的にはFourier係数や巾級数展開係数であるが、それ自体関数を特徴づける量として重要である。式(1-3-2)の右辺の級数が絶対収束すること、すなわち、

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty,$$

を仮定して、式(1-2-5)の補間係数 C_k , $1 \leq k \leq n$, と式(1-3-2)の展開係数 c_k , $1 \geq k$, の関係を調べてみる。

2節で述べた様に補間作用素 $L(X)$ は有界線形であるから、

$$L(X)f = \sum_{k=1}^\infty c_k L(X)\varphi_k. \quad (1-3-3)$$

ここで、

$$\psi_k := L(X)\varphi_k = \sum_{l=1}^n a_l^{(k)} \varphi_l, \quad (1-3-4)$$

とおくと、

$$\mathbf{a}^{(k)} := (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})^T = W(X)(\varphi_k(\xi_1), \dots, \varphi_k(\xi_n))^T, \quad k \geq 1, \quad (1-3-5)$$

である。補間作用素 $L(X)$ は Π_n への射影だから、

$$\mathbf{a}^{(k)} := \mathbf{e}_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1-3-6)$$

となる。ここで、 \mathbf{e}_k , $1 \leq k \leq n$, は、第 k 要素のみ1で残りの要素が0のベクトルである。以上より、

$$(C_1, \dots, C_n)^T = (c_1, \dots, c_n)^T + \sum_{k=n+1}^\infty c_k \mathbf{a}^{(k)}, \quad (1-3-7)$$

を得る。この式を要素ごとに書き下すと、

$$C_l = c_l + \sum_{k=n+1}^\infty a_l^{(k)} c_k, \quad 1 \leq l \leq n, \quad (1-3-8)$$

となる。この式にみられるように、補間係数 C_k , $1 \leq k \leq n$, と f の展開係数 c_k , $1 \geq k$, の近似であり、その誤差は f の展開係数 c_k , $n+1 \leq k$, の線形結合である。ここで、

$$\omega(X) := \sup_{k \geq n+1} \|\mathbf{a}^{(k)}\|_1, \quad (1-3-9)$$

とすれば、補間係数の f の展開係数に対する誤差の見積り、

$$\|(C_1 - c_1, \dots, C_n - c_n)^T\|_1 \leq \omega(X) \sum_{k=n+1}^\infty |c_k|, \quad (1-3-10)$$

を得る。 $\omega(X)$ の定義より、この不等式は最良である。正規化条件 $\|\varphi_k\| = 1, k \geq 1$, より $\omega(X)$ は不等式

$$\omega(X) \leq n \|W(X)\|_1, \quad (1-3-11)$$

を満たし、有界である。したがって、式(1-3-2)の右辺の級数の収束が速いほど、補間係数 C_k , $1 \leq k \leq n$, は f の展開係数 c_k , $1 \geq k$, の良い近似となる。この意味で C_k , $1 \leq k \leq n$, を f の離散型展開係数とよぶことにする。

次に、この量 $\omega(X)$ による補間式 $L(X)f$ の誤差評価を行う。式(1-3-4,6)より、式(1-3-3)は、

$$L(X)f = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \psi_k. \quad (1-3-12)$$

ここで、

$$\hat{\omega}(X) := \sup_{k \geq n+1} \|\psi_k\|, \quad (1-3-13)$$

とすれば、正規化条件 $\|\varphi_k\| = 1, k \geq 1$, より直ちに、

$$\|L(X)f - f\| \leq (1 + \hat{\omega}(X)) \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|. \quad (1-3-14)$$

を得る。再び正規化条件 $\|\varphi_k\| = 1, k \geq 1$, より

$$\|\psi_k\| \leq \sum_{l=1}^n |a_l^{(k)}| \equiv \|\mathbf{a}^{(k)}\|_1, \quad k \geq 1,$$

が成立するので、

$$\hat{\omega}(X) \leq \omega(X). \quad (1-3-15)$$

これと式(1-3-14)より不等式

$$\|L(X)f - f\| \leq (1 + \omega(X)) \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|. \quad (1-3-16)$$

が得られた。

このように、補間点集合 X に付随する量 $\omega(X)$ は、離散型展開係数 C_k , $1 \leq k \leq n$, の展開係数 c_k , $1 \geq k$, に対する近似度のみならず、補間式 $L(X)f$ の f に対する近似度も決定する。

この量 $\omega(X)$ は一般に $\hat{\omega}(X)$ や Lebesgue 定数に比べて見積るのが容易である。また、2章以下で我々が具体的に採用する補間点集合 X に対しては、簡単にその値が計算できる。

1-4. 事後誤差評価法

次に、式(1-3-10,16)による、現実的な誤差評価法について述べる。

級数展開(1-3-2)の係数が指数的に減少する場合を考える。すなわち、ある $0 < r < 1$ が

存在して、十分大きな k で $|c_k| = O(r^k)$ が成立するものとする。 r は級数展開係数の漸近的な減衰率である。この仮定により、

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leq a \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \frac{ar^{n+1}}{1-r}, \quad (1-4-1)$$

となる。ここで、 a はある非負整数 l について、

$$|c_k| \leq ar^k, \quad k \geq n-l, \quad (1-4-2)$$

を満たす正の実数である。正数 a は、 $a = \sup_{k \geq n-l} |c_k| / r^k$, で十分であるがそれを、

$$a = \sup_{n-l \leq k} |c_k| / r^k \approx \max_{n-l \leq k \leq n} |c_k| / r^k \leq \left\{ \sum_{k=n-l}^n |c_k| \right\} / r^n, \quad (1-4-3)$$

で見積もる。式(1-4-3)の最右辺の c_k , $n-l \leq k \leq n$, を離散型展開係数 C_k , $n-l \leq k \leq n$, で置き換え、式(1-4-1)の最右辺に代入して、

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{r}{1-r} \left\{ \sum_{k=n-l}^n |C_k| \right\}, \quad (1-4-4)$$

を得る。式 $A \leq B$ は、 B が A の上界の見積りであることを示す。係数の減衰係数 r は補間係数の漸近的な振るまいから見積もる [Oliver 1972, 鳥居 1974, 鳥居 1983]。

この式と(1-3-10,16)より、補間級数の被近似関数に対する誤差及び、離散型展開係数の被近似関数の級数展開係数に対する誤差は次のように評価できる。

$$\|L(X)f - f\| \leq \frac{r(1 + \omega(X))}{1-r} \left\{ \sum_{k=n-l}^n |C_k| \right\}, \quad (1-4-5)$$

$$\left\| ((C_1 - c_1), \dots, (C_n - c_n))^T \right\|_1 \leq \frac{r\omega(X)}{1-r} \left\{ \sum_{k=n-l}^n |C_k| \right\}, \quad (1-4-6)$$

を得る。両式の右辺はすべて計算可能な量である。

ここでは、補間級数と補間係数の誤差解析を行ったが、補間級数を、数値積分などに応用する際にも、積分値などの最終結果の誤差を、補間級数の高次の係数数個で見積もる方法が、いくつか報告されている [Oliver 1972, Gentleman 1972, 鳥居 1978, 長谷川 1983, 1984a, 1984b, 1985, 1987a, 1987b, 1988, 1990]。

2章 単位円周上の多項式補間とFFT

2-1. はじめに

Cooley とTukey[Cooley1965]により1965年に発表されたFFT (高速フーリエ変換) は, 複素数値データ列 $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ からフーリエ係数

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{-2\pi i k l / n} d_l, \quad 0 \leq k < n, \quad (2-1-1)$$

への変換とその逆変換

$$d_l = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi i k l / n}, \quad 0 \leq l < n, \quad (2-1-2)$$

を高速に求める算法である. $n=n_1 n_2 \dots n_\alpha$ と因数分解できるとき, 変換及び逆変換に要する四則演算回数は, 式(2-1-1), (2-1-2)による直接的な計算法の $O(n^2)$ のに対して, FFTでは, $O(n(n_1+n_2+\dots+n_\alpha))$ になる. 特に, $n=2^m$ ときには, 四則演算数は $O(n \log n)$ となり, n が大きいたまには, 劇的な計算時間の短縮が得られる.

我々は, FFTを関数近似や級数計算を高速に行う手段として見る. FFTは, 解析関数のTaylor展開やLaurent展開, また, 複素周期関数, 実周期関数の三角多項式補間, sine変換, cosine変換, あるいは, 有限区間の実関数のChebyshev級数展開のための高速算法として用いられる.

1章でみたように, 補間法は関数をその属する関数族の特徴的な基底で近似展開する手段である. このことにより, FFTは作用素や汎関数の近似法及び関数方程式の高速解法を構成する重要な要素となっている. 数値積分への応用例としては, [Gentleman 1972, 鳥居1974a, 74b, 鳥居1978, 長谷川1983, 84a, 84b, 85, 87a, 87b, 88, 90]. 微積分方程式への応用として, [Delves1979, Reichel1989]. 積分作用素の1種である共役作用素の近似法として, [Gutknecht1979]. さらにその数値等角写像への応用として, [Gutknecht1981, Wegmann1978,90, 宋1989]などがある.

この章では, 最も単純な様相を見せる複素平面の単位円周上で定義された複素関数の補間について考察し, FFTを一般化した高速補間法の算法を紹介する. この高速算法は, FFTと同様に, 上で述べたいくつかの重要な関数近似の問題に応用できる. それらについては, 3章以下で詳しく述べることにする.

複素平面の単位円周 $\mathbf{S} := \{z: |z|=1\}$ で定義された関数を f とする. 単位円周上の等間隔標本点を $z_l = e^{2\pi i l / n}, 0 \leq l < n$, とし, 式(2-1-1)で, $d_l = f(z_l), 0 \leq l < n$, とするならば, 式(2-1-2)は,

$$d_l = f(z_l) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z_l^k, \quad 0 \leq l < n, \quad (2-1-3)$$

となる. したがって, FFTは, 単位円周 \mathbf{S} 上で定義された関数の, 等間隔点集合上の補間多項式のすべての係数を求める, あるいは, 等間隔点集合上における(2-1-3)の右辺の多項式のすべての値を計算する高速算法とみなすことができる.

ここで, いくつかの記号を定義しつつ, FFTの算法の一般化に対する動機づけを行う.

単位円周上における多項式補間が有効である関数の族は, 自ら制限されている. ここでは, 対象とする関数族を単位閉円板 $\mathbf{D} := \{z: |z| \leq 1\}$ 上で連続で, 内部で正則な関数の空間 $A(\mathbf{D})$ とする. 空間 $A(\mathbf{D})$ には一様ノルムをいれる. すなわち,

$$\|f\| := \max_{z \in \mathbf{D}} |f(z)| = \max_{z \in \mathbf{S}} |f(z)|, \quad f \in A(\mathbf{D}), \quad (2-1-4)$$

である. 第2の等式は, 解析関数の最大値原理から来る.

したがって, 以下の議論は1章の一般論において, 関数空間 \mathbf{X} を $A(\mathbf{D})$, 可算無限基底を $\varphi_k(z) = z^{k-1}, k \geq 0$, と置いたものとなる.

単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z の要素数を $|Z|$ とかく. 有限集合 Z を標本点集合とする関数 $f \in A(\mathbf{D})$ の多項式補間を $L(Z)f$ とかく. $L(Z)f$ は, 補間条件

$$L(Z)f(\zeta) := f(\zeta), \quad \zeta \in Z, \quad (2-1-5)$$

を満たす $|Z|-1$ 次多項式である.

多項式補間を要求された精度を満たす関数近似を求める手段として考えるとき, 1つの標本点集合上でただ1度だけ, 補間多項式近似が行われることはまれである. 求める精度の近似多項式を得るまで, 標本点数を増加させつつ何度かの試行が行われる. すなわち, 要素数 $|Z_m|, m \geq 0$, が狭義単調増加する標本点集合列 $\{Z_m\}_{m \geq 0}$ にしたがって, 要求精度を満たす近似を得るまで, 関数 f の多項式近似列 $\{L(Z_m)f\}_{m \geq 0}$ を次々に求めてゆく.

従来, この用途によく用いられてきたのは, 大きさ n の等間隔点集合

$$U_n := \{e^{2\pi i l / n} : 0 \leq l < n\}, \quad (2-1-6)$$

で, その標本数 n が2の中のもの系列 $Z_m = U_{2^m}, m \geq 0$, である. 上で述べたように, この系列上での多項式補間列は, FFTにより高速に求められる. また, 2-2節で述べたように, 等間隔標本点上の補間には, 安定性と精度において, 最適性を持つ. さら

に、この系列は、

$$Z_0 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_m \subset \dots, \quad (2-1-7)$$

を満たし、 $L(Z_m)f$ を計算する段階で、必要な標本値の集合 $f(Z_m)$ の内、新しく計算されるのは $f(Z_m - Z_{m-1})$ のみで、それまでに求めた標本値 $f(Z_{m-1})$ がすべて再利用できる。結局、 $L(Z_m)f$ の計算までに要する標本値は合計 $|Z_m|$ となる。これは、 $L(Z_m)f$ を単独で計算するとき要する標本点数と等しく、結果として、上で述べたような必要な精度を得るための試行錯誤に、余分な関数計算を費やすことから免れる。

系列 $\{Z_m\}_{m \geq 0}$ の式(2-1-7)で示された性質を再利用性ということにする。

要求された精度に対して、十分な精度を持つ多項式補間を、なるべく少ない関数評価回数で求めようとするなら、標本数の増加率 $|Z_m|/|Z_{m-1}|$ を小さくしたほうがよい。しかし、等間隔標本点に固執する限り、再利用性を持つ系列 $\{Z_m\}_{m \geq 0}$ 標本点数の増加率は、2以上にならざるを得ないことは明らかである。

鳥居らは、Van der Corput列の有限部分列上での補間が、FFTにより効率的に構成できることを示した[鳥居1983a, 83b, 84]。彼等の補間系列は、標本点集合が共通の無限列を有限で打ち切ったものであるから、再利用性が自然に確保され、標本点数の増加率が任意に小さいものが構成できる。

その特別な場合として、提案された補間点集合列、

$$Z_{2k} = U_{2^{k+1}}, Z_{2k+1} = V_{2^k}, k \geq 0, \quad (2-1-8)$$

$$V_{2^k} = U_{2^{k+1}} \cup 2^{k+1}\sqrt{-1}U_{2^k} = U_{2^k} \cup 2^k\sqrt{-1}U_{2^k} \cup 2^k i U_{2^k}, \quad (2-1-9)$$

の上の補間系列は、安定性、精度と収束性において、等間隔標本点集合列の補間とほぼ同等であることがわかっている[鳥居1983b]。この系列は、再利用性を満たし、標本点数の増加率の平均は $\sqrt{2}$ である。

我々は、式(2-1-9)を一般化して、与えられた有限集合 Z に対して準等間隔標本点集合

$$R_m(Z) := \bigcup_{\zeta \in Z} m\sqrt{\zeta} U_m, m \geq 1, \quad (2-1-10)$$

を定義する。集合 Z を準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$ の核という。

以下の節では、 $R_m(Z)$ 上の補間の性質について考察し、応用として自動補間法のアルゴリズムについて述べる。

2節では、関数 $f \in A(\mathbf{D})$ の多項式近似についての基本的な性質について述べる。3節

では、 $R_m(Z)$ 上の補間が、安定性と精度において、等間隔標本点上の補間とほぼ同等であることを示す。4節では、補間係数の計算のための高速アルゴリズムとその安定性について述べる。5節では、補間多項式の誤差解析について考察する。6節では、準等間隔標本点を用いて標本点数の増加率の小さい補間系列ができることを示し、7節で、それによる自動補間法のアルゴリズムと計算量について述べる。最後に8節で、数値計算例を示す。

2-2. 単位円周上の多項式近似

自然数 n に対して、 n 次未満の複素係数多項式全体からなる $A(\mathbf{D})$ の部分空間を Π_n とかく。また複素係数多項式全体を Π_∞ とかく。

単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z を標本点集合とする f の多項式補間 $L(Z)f$ は、条件(2-1-5)より一意に定まり、Lagrange補間の基本多項式

$$w(Z, \zeta; z) := \prod_{\eta \in Z - \{\zeta\}} \frac{z - \eta}{\zeta - \eta} = \frac{\varphi(Z; z)}{\varphi'(Z; \zeta)(z - \zeta)}, \quad (2-2-1)$$

$$\varphi(Z; z) := \prod_{\zeta \in Z} (z - \zeta), \quad (2-2-2)$$

を用いて、

$$L(Z)f(z) = \sum_{\zeta \in Z} w(Z, \zeta; z) f(\zeta), \quad (2-2-3)$$

とあらわせる。

このことは、 $A(\mathbf{D})$ の基底 $\{z^k\}_{k \geq 0}$ がChebyshev系であることを示す。したがって、定理1-3-1により、 $f \in A(\mathbf{D})$ に対して $n-1$ 次最良近似多項式 $\rho_n(f)$ が唯一つ存在して、

$$\|\rho_n(f) - f\| = E_n(f) \equiv \inf_{g \in \Pi_n} \|g - f\| \quad (2-2-4)$$

が成立する。 $E_n(f)$ は Π_n の f に対する最良近似度である。

また、多項式全体 Π_∞ が、 $A(\mathbf{D})$ で稠密であること、すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0, \quad (2-2-5)$$

が知られている[Walsh1956(p.36)]。このことから、 $A(\mathbf{D})$ の要素を多項式で近似することの理論的な正当性が得られる。式(2-2-5)における収束速度は、被近似関数の連続度により支配されている。また逆に、収束速度は連続度を規定する。このことに関して、以

下の定理が知られている。

定理2-2-1: f がHölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属することと,

$$E_n(f) = O(n^{-k-\alpha}), n \rightarrow \infty, \quad (2-2-6)$$

は同値である。

Hölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{D})$ は単位円周 \mathbf{S} 上で k 回連続微分可能であり, $f^{(k)} \in \text{Lip}\alpha$ が成立するような $f \in A(\mathbf{D})$ の全体である。また,

$$\text{Lip}\alpha := \{g \in C(\mathbf{S}) : \sup_{x \neq y \in \mathbf{S}} |g(x) - g(y)| / |x - y|^\alpha < \infty, 0 < \alpha \leq 1, \quad (2-2-7)$$

である。

この定理は、任意の解析的Jordan曲線で囲まれた領域について、J. H. Curtiss, J. Walsh, W. E. Sewellらによって証明された[Walsh 1956(p.371)]。

次の定理は、解析関数論の初等的な知識である。

定理2-2-2: $f \in A(\mathbf{D})$ が \mathbf{S} 上解析的であることは、ある $r < 1$ が存在して、

$$E_n(f) = O(r^n), n \rightarrow \infty \quad (2-2-8)$$

が成立することと同値である。

補間作用素 $L(Z)$ のノルム

$$\Lambda(Z) := \|L(Z)\| \equiv \max_{f \in A(\mathbf{D}), \|f\|=1} \|L(Z)f\|, \quad (2-2-9)$$

をここでもLebesgue定数とよぶ。

Lebesgue定数は、標本点集合 Z の原点を中心とする回転に対して不変である。すなわち、

$$\Lambda(\tau Z) = \Lambda(Z), \quad \forall \tau \in \mathbf{S}. \quad (2-2-10)$$

Lebesgue定数は、Lagrangeの基本多項式を用いて次のようにあらわされる。

$$\Lambda(Z) = \max_{z \in \mathbf{S}} \Lambda(Z; z), \quad \Lambda(Z; z) := \sum_{\zeta \in Z} |\omega(Z, \zeta; z)|. \quad (2-2-11)$$

$\Lambda(Z; z)$ をLebesgue関数とよぶ。

1章で述べた様に、Lebesgue定数は補間の安定性の指標であるとともに、次の式により、補間の精度を支配する。

$$\|L(Z)f - f\| \leq (1 + \Lambda(Z)) E_n(f), \quad n = |Z|. \quad (2-2-12)$$

したがって、Lebesgue定数が小さければ、補間多項式の精度は、最良多項式近似の精度に近くなる。

次の定理は、等間隔点集合の標本点集合としての最適性を示す。

定理2-2-3 [Kilgore 1978, de Boor 1978, Brutman 1980, Zygmund 1959(p.37)]: 単位円周 \mathbf{S} のすべての要素数 n の集合について、

$$\Lambda(Z) \geq \Lambda(U_n), \quad (2-2-13)$$

であり、 $L(U_n)$ に関して、

$$\Lambda(U_n) = \frac{2}{\pi} \log n + O(1), \quad n \geq 1, \quad (2-2-14)$$

が成立する。

これより、1節で述べた補間系列における、補間作用素のノルムは、最良の場合でも標本点数の対数のオーダーで発散する。ゆえに、Banach-Steinhausの定理 [Kantorovich 1982(p.203)]より、その上の補間多項式列は $A(\mathbf{D})$ のすべての関数について収束するわけではない、ということがわかる。

しかし、定理2-2-1によって、等間隔点集合列上の補間は十分広い関数族について収束性が保証されている。

たとえば、定理2-2-1、定理2-2-3と式(2-2-12)より次の系を得る。

系2-2-4: 関数 f が、Hölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属するなら、

$$\|f - L(U_n)f\| = O(\log n / n^{k+\alpha}), \quad (2-2-15)$$

が成立する。すなわち、 $L(U_n)f$ は、 $n \rightarrow \infty$ で一様に f に収束する。

等間隔点集合の列に限らず、標本点数が狭義単調増加する標本点集合列 $\{Z_m\}$ 上の補間作用素列が、

$$\Lambda(Z_m) = O(\log |Z_m|), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2-2-16)$$

を満たせば、系2-2-4の結論が成立する。作用素列のノルムの一様有界性を通常安定性と

よぶ。これにしたがって、式(2-2-16)の性質を持つ補間作用素列を、準安定とよぶことにする。

鳥居らは、式(2-1-9)で定義された準等間隔標本点集合について、次の定理を示した、定理2-2-5 [鳥居1983b]: 式(2-1-9)で定義された V_m , $m \geq 0$, について、

$$\Lambda(V_m) = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\pi} \log m + O(1), \quad (2-2-17)$$

が成立する。

すなわち、式(2-1-8)の標本点集合列上の補間作用素列は、準安定である。

2-3. 準等間隔標本点上の補間の安定性と精度

この節では、準等間隔標本点集合上の多項式補間の表現と、補間の安定性と精度の指標としてのLebesgue定数について述べる。

任意の複素数 $\zeta \in \mathbf{S}$ について、 $\sqrt[m]{\zeta}U_m$ 上のLagrange補間の基本多項式は、式(2-2-1), (2-2-2)より、

$$\begin{aligned} \varphi(\sqrt[m]{\zeta}U_m; z) &= z^m - \zeta, \\ \omega(\sqrt[m]{\zeta}U_m, \eta; z) &= \frac{(z^m - \eta)}{m\eta^{m-1}(z - \eta)}, \quad \eta \in \sqrt[m]{\zeta}U_m, \end{aligned}$$

である。これより、式(2-1-10)定義された単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z を核とする準等間隔点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, について、

$$\begin{aligned} \varphi(R_m(Z); z) &= \prod_{\zeta \in Z} \varphi(\sqrt[m]{\zeta}U_m; z) = \varphi(Z; z^m), \\ \varphi'(R_m(Z); z) &= mz^{m-1} \varphi'(Z; z^m), \end{aligned} \quad (2-3-1)$$

を得る。

また、 $R_m(Z)$ 上のLagrange補間の基本多項式は、

$$\begin{aligned} \omega(R_m(Z), \eta; z) &= \frac{\varphi(Z; z^m)}{m\eta^{m-1} \varphi'(Z; \eta^m)(z - \eta)} = \frac{\varphi(Z; z^m)}{\varphi'(Z; \eta^m)(z^m - \eta)} \frac{(z^m - \eta)}{m\eta^{m-1}(z - \eta)} \\ &= \frac{\varphi(Z; z^m)}{\varphi'(Z; \eta^m)(z^m - \eta)} \omega(\sqrt[m]{\zeta}U_m, \eta; z), \quad \eta \in \sqrt[m]{\zeta}U_m, \zeta \in Z, \end{aligned} \quad (2-3-2)$$

となる。

以上により、 $f \in A(\mathbf{D})$ の $R_m(Z)$ 上の多項式補間は、

$$L(R_m(Z))f(z) = \sum_{\zeta \in Z} \frac{\varphi(Z; z^m)}{\varphi'(Z; \zeta)(z^m - \zeta)} \sum_{\eta \in \sqrt[m]{\zeta}U_m} \frac{(z^m - \eta)}{m\eta^{m-1}(z - \eta)} f(\eta),$$

とかける。

これより直ちに次の定理を得る。

定理2-3-1: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z について、

$$L(R_m(Z))f(z) = \sum_{\zeta \in Z} \omega(Z, \zeta; z^m) L(\sqrt[m]{\zeta}U_m)f(z), \quad (2-3-3)$$

が成立する。

また、 $L(R_m(Z))$ のLebesgue定数について次の定理を得る。

定理2-3-2: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z について、

$$\Lambda(R_m(Z)) \leq \Lambda(Z) \Lambda(U_m) = \frac{2}{\pi} \Lambda(Z) \log |R_m(Z)| + O(1), \quad (2-3-4)$$

が成立する。

(証明) 式(2-2-9)と定理2-3-1より、式(2-3-4)の前半の不等式、

$$\begin{aligned} \Lambda(R_m(Z)) &\equiv \max_{\|f\|=1} \left\| \sum_{\zeta \in Z} \omega(Z, \zeta; z^m) L(\sqrt[m]{\zeta}U_m)f \right\| \\ &\leq \max_{\|f\|=1} \max_{z \in \mathbf{C}} \sum_{\zeta \in Z} |\omega(Z, \zeta; z^m)| |L(\sqrt[m]{\zeta}U_m)f| \\ &\leq \max_{z \in \mathbf{C}} \sum_{\zeta \in Z} |\omega(Z, \zeta; z^m)| \Lambda(\sqrt[m]{\zeta}U_m) \\ &\leq \Lambda(U_m) \max_{z \in \mathbf{C}} \sum_{\zeta \in Z} |\omega(Z, \zeta; z^m)| = \Lambda(Z) \Lambda(U_m), \end{aligned}$$

を得る。式(2-3-4)の後半の等式は、 $|R_m(Z)| = m|Z|$ と定理2-2-3の式(2-2-14)より明らかである。//

$|Z|=1$ のときは、 $\Lambda(Z)=1$ だから、この定理は、2節で紹介した定理2-2-3の拡張になっている。この定理により、準等間隔標本点集合列 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, 上の補間系列

$L(R_m(Z))$, $m \geq 1$, が準安定補間列であることがわかる.

2-4. 準等間隔標本点上の補間法的高速アルゴリズムと数値的安定性

この節では, 準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, 上の関数値から補間多項式の係数を求める計算, また, その補間多項式を, $R_m(Z)$ 上で評価する計算を高速に行うアルゴリズムと, その数値的安定性について述べる.

単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 v の有限集合を $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_v\}$ とする. 関数 $f \in A(\mathbf{D})$ の Z 上の多項式補間と Lagrange 基本多項式を,

$$L(Z)f(z) = \sum_{l=1}^v w(Z, \zeta_l; z) f(\zeta_l) = \sum_{k=0}^{v-1} c_k z^k, \quad (2-4-1)$$

$$w(Z, \zeta_l; z) = \sum_{k=0}^{v-1} w_{kl} z^k, \quad 1 \leq l \leq v, \quad (2-4-2)$$

と巾級数展開しておく.

$W(Z) : \mathbf{C}^v \rightarrow \mathbf{C}^v$ を f の Z 上の値から, $L(Z)f$ の巾級数展開の係数への線形変換とする. すなわち,

$$W(Z)(f(\zeta_1), f(\zeta_2), \dots, f(\zeta_v))^T = (c_0, c_1, \dots, c_{v-1})^T, \quad (2-4-3)$$

とする.

式(2-4-1)と(2-4-2)より,

$$W(Z) = (w_{kl}), \quad (2-4-4)$$

を得る.

単位円周 \mathbf{S} 上の複素数 τ について, 標本点集合 τZ は, 集合 Z を原点周りに $\arg \tau$ 回転した集合を与える.

定理2-4-1: 単位円周 \mathbf{S} 上の複素数 τ について,

$$W(\tau Z) = \text{diag}(1, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots, \tau^{-v+1}) \cdot W(Z), \quad (2-4-5)$$

が成立する.

(証明) $\varphi(\tau Z; z) = \varphi(Z; z/\tau)$ より,

$$w(\tau Z, \tau \zeta_l; z) = w(Z, \zeta_l; z/\tau) = \sum_{k=0}^{v-1} \tau^{-k} w_{kl} z^k, \quad 0 \leq l \leq n,$$

となる. これと, 式(2-4-4)より, 式(2-4-5)を得る. //

以下の議論の準備として, いくつかの記号の定義を行う.

$A = (a_{ij}), B = (b_{kl})$ を, それぞれ, $m_1 \times n_1, m_2 \times n_2$ 行列とする. A, B の

Kronecker積 $A \otimes B$ を $m_1 \times n_1$ 行列を要素とする $m_2 \times n_2$ ブロック行列 $(b_{kl} A)$ と定義する.

また $\text{diag}(A_l)_{l=1}^n$ は, 正方行列 $(A_l)_{l=1}^n$ を対角要素とする $n \times n$ ブロック対角行列である.

定理2-4-2: 準等間隔標本点集合 $R_m(Z), m \geq 1$, 上の関数 $f \in A(\mathbf{D})$ を以下のようにならべる.

$$m\sqrt{\zeta_l} U_m = \{\zeta_{l1}, \zeta_{l2}, \dots, \zeta_{lm}\}, \quad 1 \leq l \leq v,$$

$$\mathbf{f}_l = (f(\zeta_{l1}), f(\zeta_{l2}), \dots, f(\zeta_{lm}))^T \in \mathbf{C}^m, \quad 1 \leq l \leq v,$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \dots, \mathbf{f}_v^T)^T \in \mathbf{C}^{mv}.$$

今,

$$\mathbf{c}_l = W(m\sqrt{\zeta_l} U_m) \mathbf{f}_l, \quad 0 \leq l \leq v, \quad (2-4-6)$$

とすれば, 変換 $\mathbf{c} = W(R_m(Z)) \mathbf{f}$ は,

$$\mathbf{c} = (I_m \otimes W(Z)) (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_v^T)^T$$

$$= (I_m \otimes W(Z)) \cdot \text{diag}(W(m\sqrt{\zeta_l} U_m))_{l=1}^v \mathbf{f}. \quad (2-4-7)$$

とかける.

(証明) 式(2-4-6)で, $\mathbf{c}_l = (c_{l0}, c_{l1}, \dots, c_{l,m-1})^T, 1 \leq l \leq v$, とすれば, 式(2-3-3)右辺の級数の ζ_l に関する項は,

$$w(Z, \zeta_l; z^m) L(m\sqrt{\zeta_l} U_m) f(z) = \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{j=0}^{m-1} w_{kl} c_{lj} z^{km+j},$$

である. したがって, $\mathbf{c} = (C_0, C_1, \dots, C_{mv-1})^T$ と置けば,

$$C_{km+j} = \sum_{l=1}^v w_{kl} c_{lj}, \quad 0 \leq k \leq v-1, 0 \leq j \leq m-1,$$

となる。これは、式(2-4-7)の最初の等式を意味する。式(2-4-7)の第2の等式は、これと、式(2-4-6)より明らかである。//

式(2-4-7)により、直ちに次の系を得る

系2-4-3: 定理1-4-2と同じ記号で、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \text{diag}(W(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m)^{-1})_{l=1}^v (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_v^T)^T \\ &= \text{diag}(W(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m)^{-1})_{l=1}^v \cdot (I_m \otimes W(Z)^{-1}) \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2-4-8)$$

が成立する。

(証明) 式(2-4-7) と、ブロック対角行列及び、行列のKronecker積の逆行列に関する恒等式、

$$\{\text{diag}(A_l)_{l=1}^n\}^{-1} = \text{diag}(A_l^{-1})_{l=1}^n, \quad \{A \otimes B\}^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1},$$

より明らかである。//

m が2の中の場合、式(2-4-7)、(2-4-8)より、直ちに準等間隔標本点上の補間法に対する次の高速アルゴリズムを得る。

アルゴリズム 2-4-4: 順変換 (関数標本値から補間係数の計算)

- (1) $\mathbf{f}_l = (f(\zeta_{l1}), f(\zeta_{l2}), \dots, f(\zeta_{lm}))^T \in \mathbf{C}^m, 1 \leq l \leq v$, を計算。 関数 vm 回
- (2) $\mathbf{c}_l = W(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) \mathbf{f}_l, 0 \leq l \leq v$, を計算(FFT)。 乗算 $vm \log m$ 回
- (3) $\mathbf{c} = (I_m \otimes W(Z)) (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_v^T)^T$ を合成。 乗算 $v^2 m$ 回

アルゴリズム 2-4-5: 逆変換 (補間係数から $R_m(Z)$ 上の関数値の計算)

- (1) $(\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_v^T)^T = (I_m \otimes W(Z)^{-1}) \mathbf{c}$ を計算。 乗算 $v^2 m$ 回
- (2) $\mathbf{f}_l = W(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m)^{-1} \mathbf{c}_l^T, 1 \leq l \leq v$, を計算(FFT⁻¹)。 乗算 $vm \log m$ 回

(FFT), (FFT⁻¹)はそれぞれFFTとその逆変換を使用することを示す。アルゴリズムの各段階の右に示したのは計算量である。簡単のため計算の複雑性(手間)の指標として、複素乗算回数を採用する。FFTのアルゴリズムには、これも問題を単純化するために、基数2のものを考えることにする。FFTに要する演算量は次の主張による。

主張2-4-6: m が2の中るとき、任意の m 次元ベクトル $\mathbf{f}, \mathbf{c} \in \mathbf{C}^m$ と絶対値1の複素数 τ に対して、 $W(\tau U_m) \mathbf{f}, W(\tau U_m)^{-1} \mathbf{c}$ は、FFTによりそれぞれ、 $\frac{1}{2} m \log_2 m$ の乗算回数で求めることができる。

証明は次の主張を述べてから与える。

以上により、準等間隔標本点上の補間法の複雑さに関して次の主張を得る。

主張2-4-7: 定理2-4-2と同じ記号で、任意の $\mathbf{c}, \mathbf{f} \in \mathbf{C}^{mv}$ に対して、 $\mathbf{c} = W(R_m(Z)) \mathbf{f}$,

$\mathbf{f} = W(R_m(Z))^{-1} \mathbf{c}$ は、FFTによりそれぞれ、 $\frac{1}{2} N \log_2 N + vN$ の複素乗算回数で求めることができる。ここで、 N は標本点数 mv である。

この定理は、準等間隔標本点上の補間の複雑さが、等間隔標本点上の補間の複雑さとほぼ同等であることを示す。

ここで示したアルゴリズムは、FFTの中核となるアルゴリズムを一般化したものになっている。今、 α を絶対値1の複素数とし、等間隔標本点集合 αU_{2m} 上の補間を考えよう。ここで、 m は、2の中とする。 $\tau = \alpha^{2m}, Z = \{\zeta_1, \zeta_2\}, \zeta_1 = \tau, \zeta_2 = -\tau$, とすると、

$$W(Z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau^{-1} & -\tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$R_m(Z) = \sqrt[m]{\zeta_1} U_m \cup \sqrt[m]{\zeta_2} U_m = \sqrt[2m]{\tau} U_{2m} = \alpha U_{2m},$$

であるから、アルゴリズム2-4-4で $v=2$ として、多項式 $L(\sqrt[m]{\zeta_1} U_m) f, L(\sqrt[m]{\zeta_2} U_m) f$ の係数 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ から、多項式 $L(\alpha U_{2m}) f$ の係数 \mathbf{c} を求める次の算法を得る。

$$C_l = \frac{1}{2} (c_{1,l} + c_{2,l}), \quad C_{m+l} = \frac{\tau^{-1}}{2} (c_{1,l} - c_{2,l}), \quad 0 \leq l < m. \quad (2-4-9)$$

1/2の掛け算を無視すると、(2-4-9)の計算には、 m 回の複素乗算が含まれる。これに

よって、多項式 $L(\alpha U_{2m})f$ の係数の問題は、同じ形式が規模は半分の2つの問題、すなわち、多項式 $L(m\sqrt{\zeta_1} U_m)f, L(m\sqrt{\zeta_2} U_m)f$ の係数の問題に分割される。これが、FFTのアルゴリズムの中心となる考え方である。この分割法を、規模の小くなった問題に次々と再起的に用いる方法が基数2のFFTのアルゴリズムである。

$m=2^{s-1}$ のときは、上に述べた操作を s 段階行えば、補間多項式 $L(\alpha U_{2m})f$ の係数の問題は、 $2m$ 個の1点集合上の0次補間多項式の係数問題に帰着する。この操作に要する複素乗算回数が、 sm である。また、1点集合上の0次補間多項式の0次係数は、その点上の関数値にほかならず計算を要しない。これが、主張2-4-6のFFT順変換の計算量についての証明である。逆変換については、上の操作を式(2-4-9)を $c_{1,l}, c_{2,l}$ に関して解いた

$$c_{1,l} = C_l + \tau C_{l+m}, \quad c_{2,l} = C_l - \tau C_{l+m}, \quad 0 \leq l \leq m, \quad (2-4-10)$$

を用いて逆にたどればよい。

次に、 $\mathbf{c}, \mathbf{f} \in \mathbf{C}^{mn}$ に対する線形変換、 $\mathbf{c} = W(R_m(Z))\mathbf{f}, \mathbf{f} = W(R_m(Z))^{-1}\mathbf{c}$ の数値的安定性を調べる。

正則な $n \times n$ 複素正方行列 A に対して、そのスペクトルノルムに関する条件数を、

$$\text{cond}(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2,$$

で定義する。条件数 $\text{cond}(A)$ は、線形変換 A とその逆変換 A^{-1} の入力の変動に対する安定性の指標である。すなわち、 $\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n, \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{y} + \Delta \mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ について、

$$\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta \mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2},$$

が成り立つ。したがって、条件数が小さい程入力の変動に対する影響は小さく変換及びその逆変換は安定である。

線形変換とその条件数に関して、基本的な事項をまとめておく。

主張2-4-8:

- ・任意の正則正方行列の条件数は1以上である。
- ・任意の正則正方行列 A と複素数 z について、 A と zA の条件数は等しい。
- ・2つの正則正方行列 A, B について、 $\text{cond}(A \otimes B) = \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$ 。

- ・ユニタリ行列の条件数は、1である。
- ・ユニタリ行列 A と同じ大きさの任意の行列 B に対して、 AB, BA の条件数は、 B の条件数と等しい。

変換 $W(Z)$ の条件数について調べてみる。

主張2-4-9: 条件数 $\text{cond}(W(Z))$ は、 Z の原点を中心とする回転に対して不変である。すなわち、単位円周 \mathbf{S} 上の任意の複素数 τ に対して、 $\text{cond}(W(\tau Z)) = \text{cond}(W(Z))$ 。

(証明) 主張2-4-3より、 $W(\tau Z) = \text{diag}(1, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots, \tau^{-n+1}) \cdot W(Z)$ が成り立つ。

$\text{diag}(1, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots, \tau^{-n+1})$ はユニタリ行列であるから主張2-4-8より、 $W(\tau Z)$ の条件数は、 $W(Z)$ の条件数に等しい。//

主張2-4-10: 単位円周 \mathbf{S} 上の大きさ n の任意の集合 Z に対して、

$$\text{cond}(W(Z)) \geq \text{cond}(W(U_n)) = 1, \quad (2-4-11)$$

が成立する。

(証明) 1節の最初で述べたように、 $W(U_n) = (w_{kl}) = \frac{1}{n} (e^{-2\pi i k l / n})$ である。したがって、

$\sqrt{n} W(U_n)$ はユニタリで、主張2-4-8より、 $\text{cond}(W(U_n)) = 1$ となる。不等式も主張2-4-8より明らか。//

このことは、補間法の数値的安定性の立場からも、等間隔標本点上の補間が最良であることを示す。

準等間隔標本点上の補間については、次の定理が成り立つ。

定理2-4-11: 定理2-4-2と同じ記号で、

$$\text{cond}(W(R_m(Z))) = \text{cond}(W(Z)), \quad m \geq 1, \quad (2-4-12)$$

が成り立つ。

(証明) 主張2-4-10と主張2-4-9の証明より、定理2-4-2の式(2-4-7)において、

$\sqrt{m} \text{diag}(W(m\sqrt{\zeta_l} U_m))_{l=1}^n$ はユニタリ行列となる。したがって、 $W(R_m(Z))$ の条件数は、 $I_m \otimes W(Z)$ の条件数と等しく、主張2-4-8より、それは、 $W(Z)$ の条件数と等しい。//

このことは、 $\text{cond}(W(Z))$ の小さい核 Z を選べば、準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, 上の補間法が、 m に依らず安定であることを示す。

定理2-4-11の証明から、変換 $W(R_m(Z))$, $m \geq 1$, のスペクトルノルムについて次の定理が成り立つことがわかる。

定理2-4-12: 定理2-4-2と同じ記号で、

$$\|W(R_m(Z))\|_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \|W(Z)\|_2, \quad m \geq 1, \quad (2-4-13)$$

が成り立つ。

(証明) 定理2-4-2の式(2-4-7)において、 $\sqrt{m} \text{diag}(W(\sqrt[m]{\tau} U_m))_{l=1}^n$ はユニタリ行列となる。したがって、 $W(R_m(Z))$ のノルムは、 $I_m \otimes W(Z)$ のノルムの $1/\sqrt{m}$ 倍と等しい。また、 $I_m \otimes W(Z)$ のノルムは、 $W(Z)$ のノルムと等しい。//

2-5. 事後誤差評価法

この節では、滑らかな関数 f に関する準等間隔標本点 $R_m(Z)$ 上の補間 $L(R_m(Z))f$ の誤差解析と、 $L(R_m(Z))f$ の係数を使った誤差評価法について述べる。この節では、関数 f のTaylor展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (2-5-1)$$

は単位円周上で絶対収束すると仮定する。

1-3節の議論より、単位円周 \mathbf{S} の要素数 n の有限集合 $X = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ に対して、

$$\mathbf{a}^{(k)} := (a_0^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)})^T = W(X)(\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)^T, \quad k \geq 0, \quad (2-5-2)$$

とすれば、

$$(C_0, \dots, C_{n-1})^T = (c_0, \dots, c_{n-1})^T + \sum_{k=n}^{\infty} c_k \mathbf{a}^{(k)}. \quad (2-5-3)$$

また、

$$\omega(X) := \sup_{k \geq n} \|\mathbf{a}^{(k)}\|_1, \quad (2-5-4)$$

を定義して、補間係数の f の展開係数に対する誤差の見積り、

$$\|(C_0 - c_0), \dots, (C_{n-1} - c_{n-1})\|_1 \leq \omega(X) \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|, \quad (2-5-5)$$

と補間多項式の誤差評価、

$$\|L(X)f - f\| \leq (1 + \omega(X)) \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|, \quad (2-5-6)$$

が得られる。この $\omega(X)$ について次の定理を得る。

定理 2-5-1: 単位円周 \mathbf{S} の任意の有限集合を X について、 $\omega(X) \geq 1$.

(証明) 集合 X の要素数を n とし、式(2-2-2)で定義された $\varphi(X; z)$ を

$$\varphi(X; z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} w_k z^k,$$

とかく、 w_0 は X の要素すべての積であり、その絶対値は1である。

$$\xi^n = - \sum_{k=0}^{n-1} w_k \xi^k, \quad \xi \in X,$$

より、

$$L(X)(z^n) = - \sum_{k=0}^{n-1} w_k z^k,$$

これより、

$$\omega(X) \geq \|\mathbf{a}^{(n)}\|_1 = \|(w_0, \dots, w_{n-1})^T\|_1 \geq |w_0| = 1. //$$

等間隔点集合を標本点集合とすると、次の定理を得る。

定理 2-5-2: 標本点集合を $X = \sqrt[m]{\tau} U_m$, $\tau \in \mathbf{S}$, $m \geq 1$, とすると、

$$C_k = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tau^\alpha c_{\alpha m + k}, \quad 0 \leq k < m, \quad (2-5-7)$$

が成立し、 $\omega(X) = 1$ である。

(証明) $\sqrt[m]{\tau} U_m$ の点 $\sqrt[m]{\tau} e^{2\pi i j / m}$, $0 \leq j < m$, について、

$$f(\sqrt[m]{\tau} e^{2\pi i j / m}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\sqrt[m]{\tau} e^{2\pi i j / m})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha m + k} (\sqrt[m]{\tau} e^{2\pi i j / m})^{\alpha m + k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tau^\alpha c_{\alpha m + k} \right\} (\sqrt[m]{\tau} e^{2\pi i j / m})^k.$$

が成り立つ。式(2-5-7)の右辺を C'_k とおくと、多項式 $\sum_{k=0}^{m-1} C'_k z^k$ と f は $\sqrt[m]{\tau} U_m$ 上で一

致する。これと補間多項式の一意性より、

$$L(\sqrt[m]{\tau} U_m) f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} C'_k z^k,$$

となり、式(2-5-7)が導かれた。式(2-5-7)より直ちに、

$$\mathbf{a}^{(k)} = \tau^\alpha (\delta_{k',0}, \delta_{k',1}, \dots, \delta_{k',m-1})^T, 0 \leq k' < m, k = \alpha m + k',$$

を得る。ここで、 δ は、Kroneckerのデルタである。これより、

$$\omega(Z) = \sup_{k \geq n} \|\mathbf{a}^{(k)}\|_1 = 1. //$$

式(2-5-7)は良く知られたaliasingの公式である。定理2-5-1,2は、等間隔点集合が、 $\omega(X)$ を最小化するという意味でも最良であることを示す。

$Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\nu\}$ を単位円周 \mathbf{C} 上の要素数 ν の標本点集合とし、これを核とする準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, 上の補間を考える。これまでの記号法にしたがって、

$$F_l(z) := L(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{lk} z^k, 1 \leq l \leq \nu, \quad (2-5-8)$$

$$F(z) := L(R_m(Z)) f(z) = \sum_{k=0}^{m\nu-1} C_k z^k, \quad (2-5-9)$$

とする。

変換行列を $W(Z) = (w_{lk})$ とすると、式(2-4-7), (2-5-7)より、

$$\begin{aligned} (C_j, C_{m+j}, \dots, C_{(v-1)m+j})^T &= W(Z)(c_{1,j}, c_{2,j}, \dots, c_{\nu,j})^T \\ &= W(Z) \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \zeta_1^\alpha c_{\alpha m+j}, \dots, \sum_{\alpha=0}^{\infty} \zeta_\nu^\alpha c_{\alpha m+j} \right)^T \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha m+j} W(Z) (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_\nu^\alpha)^T. \end{aligned} \quad (2-5-10)$$

また、 $f_{m\nu-1}(z) = \sum_{k=0}^{m\nu-1} c_k z^k$ とすると、 $L(R_m(Z)) f_{m\nu-1} = f_{m\nu-1}$ であるから、式(2-5-10)を導いた手順を $f_{m\nu-1}(z)$ に用いて、

$$(c_j, c_{m+j}, \dots, c_{(v-1)m+j})^T = \sum_{\alpha=0}^{v-1} c_{\alpha m+j} W(Z) (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_\nu^\alpha)^T.$$

これと、式(2-5-10)より、

$$(C_j, C_{m+j}, \dots, C_{(v-1)m+j})^T - (c_j, c_{m+j}, \dots, c_{(v-1)m+j})^T$$

$$= \sum_{\alpha=v}^{\infty} c_{\alpha m+j} W(Z) (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_\nu^\alpha)^T. \quad (2-5-11)$$

となる。これより、

$$\sum_{\alpha=0}^{v-1} |c_{\alpha m+j} - c_{\alpha m+j}| \leq \omega(Z) \sum_{\alpha=v}^{\infty} |c_{\alpha m+j}|, 0 \leq j < m, \quad (2-5-12)$$

が成立することがわかる。この不等式は最良である。

この式より、次の定理を得る。

定理2-5-3: 準等間隔点集合 $R_m(Z)$ について、

$$\omega(R_m(Z)) = \omega(Z), \quad (2-5-13)$$

$$\sum_{k=0}^{m\nu-1} |c_k - c_k| \leq \omega(Z) \sum_{k=m\nu}^{\infty} |c_k|, \quad (2-5-14)$$

$$\|L(R_m(Z)) f - f\| \leq (1 + \omega(Z)) \sum_{k=m\nu}^{\infty} |c_k|, \quad (2-5-15)$$

が成立する。

(証明) 式(2-5-12)の辺々をすべての j , $0 \leq j < m$ に関して加えあわせて、式(2-5-14)が得られる。式(2-5-12)の不等式の最良性から、式(2-5-14)の不等式も最良である。これと、1-3節で述べた不等式

$$\sum_{k=0}^{m\nu-1} |c_k - c_k| \leq \omega(R_m(Z)) \sum_{k=m\nu}^{\infty} |c_k|,$$

の最良性より、式(2-5-13)を得る。さらに、式(2-5-13)と(2-5-6)により式(2-5-15)が得られる。//

この定理により、 f のTaylor展開(2-5-1)が絶対収束すれば、補間多項式列 $L(R_m(Z)) f$, $m \geq 1$, は f に一様収束する。また、Taylor展開の収束が速いほど、補間多項式列の収束も速いこともわかる。

$\omega(Z)$ は、 $W(Z)$ の1-ノルムで、

$$\omega(Z) \leq \nu \|W(Z)\|_1 \quad (2-5-16)$$

と評価される。しかし、特別な場合には、具体的に $\omega(Z)$ を求めることができる。

例2-5-4: $n=2$, $Z=\{1, -1\}$ の場合。 Z は等間隔点集合だから $\omega(Z)=1$ であるが、これを定義どうり求めてみよう。

$$W(Z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であり, $\{(1^\alpha, (-1)^\alpha)^T : 2 \leq \alpha\}$ は有限集合で, $\{(1, -1), (1, 1)\}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \omega(Z) &= \max \left\{ \|W(Z)(1, -1)^T\|_1, \|W(Z)(1, 1)^T\|_1 \right\} \\ &= \max \left\{ \|(0, 1)^T\|_1, \|(1, 0)^T\|_1 \right\} = 1. \end{aligned}$$

$R_m(Z) = U_{2m}$ であり, 式(2-5-15)は, 良く知られた等間隔標本点上の補間の誤差評価式

$$\|L(U_{2m})f - f\| \leq 2 \sum_{k=2m}^{\infty} |c_k|,$$

を与える.

例2-5-5: $n=3, Z = \{1, -1, i\}$ の場合も $\{(1^\alpha, (-1)^\alpha, i^\alpha)^T : 3 \leq \alpha\}$ は有限集合で, その要素は, $(1, -1, i)^T, (1, 1, -1)^T, (1, -1, -i)^T, (1, 1, 1)^T$ である. これらに, $W(Z)$ を作用させたものは, $(0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (-i, 1, i)^T, (1, 0, 0)^T$ であり, そのノルムはそれぞれ, 1, 1, 3, 1, となる. すなわち, $\omega(Z) = 3$ である.

例2-5-4は, Z の要素を1の2乗根からとった. また, 例2-5-5では, 1の4乗根からとっている. Z の要素がすべて1の μ 乗根であれば, 集合 $\{(\zeta_1^\alpha, \zeta_2^\alpha, \dots, \zeta_\nu^\alpha)^T : \nu \leq \alpha\}$ は, 要素数 μ 以下の有限集合であり, $\omega(Z) < \nu \|W(Z)\|_1$ となる可能性がある.

一般の場合には, 式(2-5-16)は等式で成り立つ. これを次の例で見よう.

例2-5-6: $n=2, Z = \{1, \zeta\}$ で, $\arg \zeta / \pi$ は, 無理数とする. ある, 絶対値1の複素数 τ で,

$$W(Z) \frac{1}{2} (1, \tau)^T = \max_{x \in \mathbb{C}^2, \|x\|_1=1} \|W(Z)x\|_1 \equiv \|W(Z)\|_1,$$

とすると, ζ に関する条件より, $|\zeta^\alpha - \tau|$ がいくらでも小さくなるように α がとれる. すなわち,

$$\omega(Z) \equiv \sup_{\alpha \geq 2} \|W(Z)(1, \zeta^\alpha)^T\|_1 = 2 \|W(Z)\|_1.$$

である.

次に, 式(2-5-14, 15)による, 現実的な誤差評価法について述べる.

Taylor展開(2-5-1)の係数が, $|c_k| = O(r^k), k \geq 0, r < 1$, で減少するものとする. この仮定により,

$$\sum_{k=mv}^{\infty} |c_k| = O(r^{mv}), m \rightarrow \infty, \quad (2-5-17)$$

となる. これと式(2-5-14, 15)により, 補間多項式 $L(R_m(Z))f, m \geq 1$, とその係数は公比 r^ν の等比数列的な速度で関数 f 及びそのTaylor展開係数に収束する. 1-4節でみたように, それらの誤差は, 補間多項式の係数を用いて

$$\|L(R_m(Z))f - f\| \leq \frac{r(1 + \omega(Z))}{1-r} \left\{ \sum_{k=mv-l}^{mv-1} |c_k| \right\}, \quad (2-5-18)$$

$$\sum_{k=0}^{mv-1} |c_k - c_k| \leq \frac{r\omega(Z)}{1-r} \left\{ \sum_{k=mv-l}^{mv-1} |c_k| \right\}, \quad (2-5-19)$$

で評価できる. ここで, 式 $A \leq B$ は, B が A の上界の見積りであることを示す. 両式の右辺はすべて計算可能な量である. l は自然数で通常1か2が選ばれる. 両式に現われる係数 $r/(1-r)$ に関する最も単純な取扱いは, あらかじめ r の上限 r_0 を定めておき $r/(1-r)$ を定数 $r_0/(1-r_0)$ で置き換えてしまうことである. 上限 r_0 により必要な精度に達する補間多項式の次数が推定できる. この次数を超えた場合には別の推定法に切り替える.

次に, 被近似関数のTaylor展開係数の減衰率 r を見積もる方法をいくつか紹介する. 以下 $N=mv$ を集合 $R_m(Z)$ の要素数とする.

Oliver[1972]は, 補間多項式の高次係数 $C_{N-4}, C_{N-3}, C_{N-2}, C_{N-1}$ による減衰率 r の推定法,

$$r \approx \bar{r} := \max \left\{ \left| \frac{C_{N-3}}{C_{N-4}} \right|, \left| \frac{C_{N-2}}{C_{N-3}} \right|, \left| \frac{C_{N-1}}{C_{N-2}} \right| \right\}, \quad (2-5-20)$$

を提案している.

鳥居と長谷川[鳥居1983b]は, やや低次の係数 C_{N-m-1} を併用して, 減衰率 r に対する平均減衰率

$$\bar{r} := \left(|C_{N-1}| / |C_{N-m-1}| \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (2-5-21)$$

による推定法を提案している.

2-6. 再利用性を持つ, 標本点列の構成

次の定理は、準等間隔標本点集合により、再利用性を持ち、標本点数の増加率が小さい準安定補間系列の構成法を示唆する。

定理2-6-1: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合の列 $\{Y_t\}_{t=0}^{\alpha-1}$ が $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{\alpha-1} \subsetneq R_2(Y_0)$ を満たすとき、標本点集合列

$$Z_{s\alpha+t} = R_{2^s}(Y_t), 0 \leq t < \alpha, s \geq 0, \quad (2-6-1)$$

は、再利用性を持ち、標本点数の平均増加率は、 $\sqrt{2}$ である。またその上の補間系列は、準安定で、

$$\Lambda(Z_m) \leq \frac{2}{\pi} \{ \max_{0 \leq t < \alpha} \Lambda(Y_t) \} \cdot \log |Z_m| + O(1), \quad (2-6-2)$$

が成立する。また、線形変換 $W(Z_m)$ の条件数、誤差推定の係数 $\omega(Z_m)$, $m \geq 1$, は、一様有界で、

$$\text{cond}(W(Z_m)) \leq \max_{0 \leq t < \alpha} \text{cond}(W(Y_t)), \quad (2-6-3)$$

$$\omega(Z_m) \leq \max_{0 \leq t < \alpha} \omega(Y_t), \quad (2-6-4)$$

が成立する。さらに、関数 $f \in A(\mathbf{D})$ の補間多項式 $L(Z_m)f$, $m \geq 0$, の係数計算に要する複素乗算回数は、

$$\frac{1}{2} |Z_m| \log_2 |Z_m| + O(|Z_m|), \quad (2-6-5)$$

である。

(証明) 式(2-3-1)より、

$$R_{kl}(Z) = R_k(R_l(Z)), k, l \geq 1,$$

がわかる。また任意の $Y \subset Z \subset \mathbf{S}$ と自然数 m について、 $R_m(Y) \subset R_m(Z)$ が成立する。このことから、

$$Z_{s\alpha+t} = R_{2^s}(Y_t) \subset R_{2^s}(Y_{t+1}) = Z_{s\alpha+t+1}, 0 \leq t \leq \alpha-2, s \geq 0,$$

$$Z_{s\alpha+\alpha-1} = R_{2^s}(Y_{\alpha-1}) \subset R_{2^s}(R_2(Y_0)) = Z_{(s+1)\alpha}, s \geq 0,$$

が得られる。ゆえに、標本点集合列 Z_m , $m \geq 0$, は再利用性を持つ。この列において、標本数には $|Z_{m+s}|/|Z_m| = 2$, $m \geq 0$, なる関係がある。したがってその平均増加率は、 $\sqrt{2}$ である。

式(2-6-2),(2-6-3),(2-6-4),(2-6-5)は、それぞれ、定理2-3-2,2-4-10,2-5-3と主張2-4-7より明らかである。//

この定理を再利用性を持つ標本点集合の構成法と見るとき、 Y_0 に関する条件

$$Y_0 \subset R_2(Y_0), \quad (2-6-6)$$

は中心的な役割を果たす。この条件を(モード2の)自己再利用性と呼ぶ。

この性質を持つ Y_0 から定理の条件を満たす集合列 $\{Y_t\}_{t=0}^{\alpha-1}$ は容易に構成できる。

自己再利用性に関する詳しい議論は、後の章に任せ、ここでは、2つの具体例を示そう。

例2-6-2: 鳥居と長谷川は、次のような列を提案した[鳥居1983b]。

$$\begin{cases} Z_{2^s} = U_n \cup \sqrt{-1} U_n \\ Z_{2^{s+1}} = U_n \cup \sqrt{-1} U_n \cup \sqrt{i} U_n \end{cases}, n = 2^s, s \geq 0. \quad (2-6-7)$$

これは、上の定理において、 $\alpha=2, Y_0=\{1, -1\}, Y_1=\{1, -1, i\}$ の場合である(図2-6-1)。標本点数は、2, 3, 4, 6, ..., $2 \cdot 2^s, 3 \cdot 2^s, \dots$ と増加し、その平均増加率は、 $\sqrt{2}$ である。

$\Lambda(Y_0)=2, \Lambda(Y_1)=3, \text{cond}(W(Y_0))=1, \text{cond}(W(Y_1))=2$, であることがわかっているので、

$$\Lambda(Z_m) \leq \frac{6}{\pi} \log |Z_m| + O(1), m \rightarrow \infty, \\ \text{cond}(W(Z_m)) \leq 2, m \geq 0,$$

となる。このことは、鳥居らの補間列がよい収束性と安定性を持つことを示している。

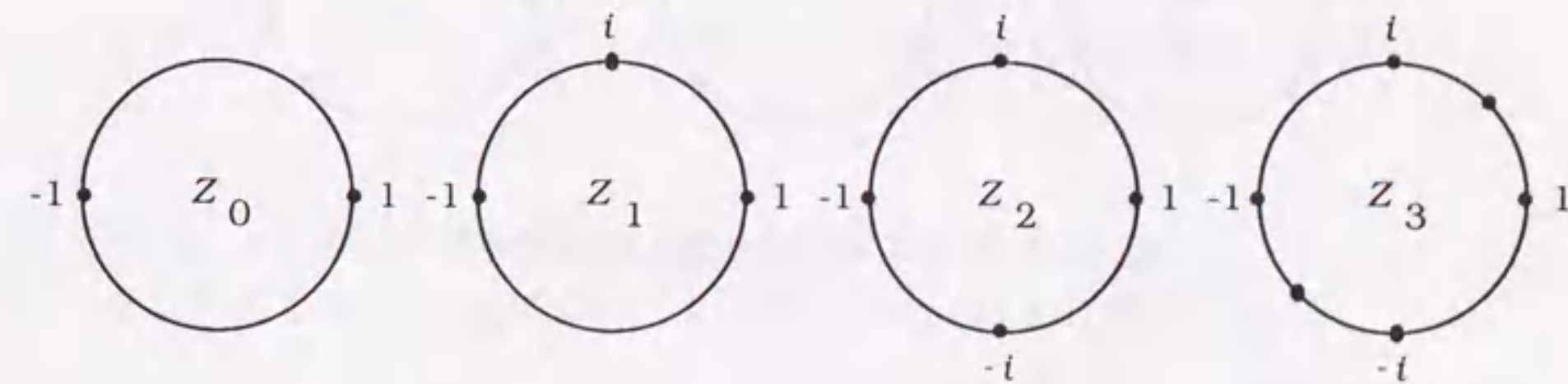


図2-6-1. 例2-6-2の標本点集合列。

例2-6-3: 次のような列も考えられる。

$$\begin{cases} Z_{3s} = U_{2n} \cup \sqrt[3]{i} U_n \\ Z_{3s+1} = U_{4n} \\ Z_{3s+2} = U_{4n} \cup e^{\pi i/4n} U_n \end{cases}, n = 2^s, s \geq 0. \quad (2-6-8)$$

これは、上の定理において、 $\alpha=3, Y_0 = \{\pm 1, i\}, Y_1 = \{\pm 1, \pm i\}, Y_2 = \{\pm 1, \pm i, e^{\pi i/4}\}$ の場合である (図2-6-2)。標本点数は、3, 4, 5, 6, ..., $3 \cdot 2^s, 4 \cdot 2^s, 5 \cdot 2^s, \dots$ と増加し、その平均増加率は、 $\sqrt[3]{2}$ である。

$\Lambda(Y_0)=3, \Lambda(Y_1)=1.84\dots, \Lambda(Y_2)=3.82\dots, \text{cond}(W(Y_0))=2, \text{cond}(W(Y_1))=1, \text{cond}(W(Y_2))=2\sqrt{2}$ であることがわかっているので、

$$\Lambda(Z_m) \leq \frac{7.7}{\pi} \log|Z_m| + O(1), m \rightarrow \infty,$$

$$\text{cond}(W(Z_m)) \leq 2\sqrt{2}, m \geq 0,$$

となる。このことは、この補間列もよい収束性と安定性を持つことを示している。

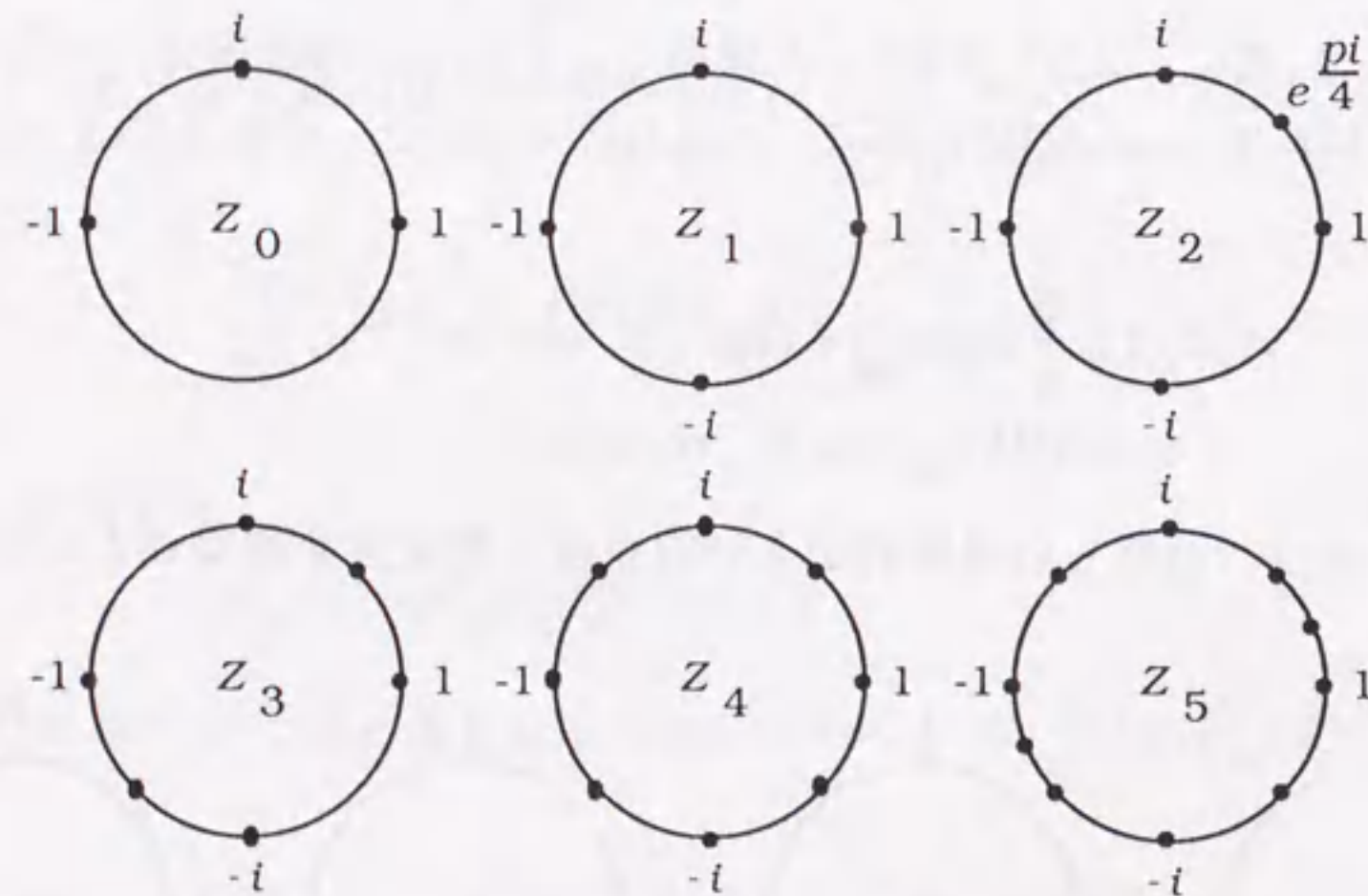


図 2-6-2. 例 2-6-3 の標本点集合列。

2-7. 高速自動補間法

この節では、定理2-6-1で示された補間系列の計算法とその複雑さについて述べる。計算法の複雑さは、それに要する複素乗算回数で評価することにする。現実の計算機の

内部で行われる計算過程を考慮し、虚数単位*i*倍や2の整数中倍は、乗算回数に数えない。

定理2-6-1の集合列

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{\alpha-1} \subsetneq R_2(Y_0) = Y_\alpha, \quad (2-7-1)$$

で、 Y_α の要素 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_\alpha}$ を $Y_0, Y_1 - Y_0, \dots, Y_t - Y_{t-1}, \dots, Y_\alpha - Y_{\alpha-1}$ の要素の順にならべて、

$$Y_t = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_t}\}, 0 \leq t \leq \alpha, \quad (2-7-2)$$

が成立するようにしておく。

$s \geq 0, 0 \leq t \leq \alpha-1, 1 \leq l \leq n_\alpha$ と $m=2^s$ に対して、 $f_l^{(s)}$ を関数 $f \in A(\mathbf{D})$ の $m\sqrt{\zeta_l} U_m$ 上の標本値を並べた列ベクトルとし、次の記号を定義する。

$$\mathbf{c}_l^{(s)} := W(m\sqrt{\zeta_l} U_m) f_l^{(s)} \quad (2-7-3)$$

$$\mathbf{f}^{(s,t)} := (\{f_1^{(s)}\}^T, \dots, \{f_{n_t}^{(s)}\}^T)^T \quad (2-7-4)$$

$$\mathbf{c}^{(s,t)} := W(R_m(Y_t)) \mathbf{f}^{(s,t)} = (I_m \otimes W(Y_t)) (\{c_1^{(s)}\}^T, \dots, \{c_{n_t}^{(s)}\}^T)^T \quad (2-7-5)$$

式(2-7-5)の第2の等式は、定理2-4-2からきている。

次の主張は、主張2-4-6の証明より明らかである。

主張2-7-1: 式(2-7-5)の再右辺は、 $\mathbf{c}^{(s,t)}$ の一つの要素あたり、 n_t 回の複素乗算で計算できる。したがって、 $\mathbf{c}^{(s,t)}$ は、 $\mathbf{c}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_t}^{(s)}$ から、 mn_t^2 回の複素乗算で計算できる。

次の主張は、 s を増加させる際の効率的な手段を与える。

主張2-7-2: すべての $1 \leq l \leq n_0$ について、自然数 $1 \leq j_l, k_l \leq n_\alpha$ が存在して、

$\zeta_{j_l} = \sqrt{\zeta_l}, \zeta_{k_l} = -\sqrt{\zeta_l}$ である。そして、 $\mathbf{c}_l^{(s+1)}$ は、 $\mathbf{c}_{j_l}^{(s)}, \mathbf{c}_{k_l}^{(s)}$ から以下の式によって、 2^s 回の複素乗算で求められる。

$$\mathbf{c}_l^{(s+1)} = (I_m \otimes W(\{\sqrt{\zeta_l}, -\sqrt{\zeta_l}\})) (\mathbf{c}_{j_l}^{(s+1)T}, \mathbf{c}_{k_l}^{(s+1)T})^T, \quad (2-7-6)$$

$$W(\{\sqrt{\zeta_l}, -\sqrt{\zeta_l}\}) = \frac{1}{2} \text{diag}(1, (\sqrt{\zeta_l})^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2-7-7)$$

(証明) 準等間隔標本点集合の定義より,

$$Y_\alpha = R_2(Y_0) = \bigcup_{l=0}^{\alpha-1} \{\sqrt{\zeta_l}, -\sqrt{\zeta_l}\},$$

である。したがって、すべての $1 \leq l \leq n_0$ について、自然数 $1 \leq j_l, k_l \leq n_\alpha$ が存在して、

$$\zeta_{j_l} = \sqrt{\zeta_l}, \quad \zeta_{k_l} = -\sqrt{\zeta_l}, \text{ である。}$$

さらに、式(2-4-9)を導いたのと同様の手順により、式(2-7-6,7)を得る。//

以上の準備をにより、次のようなアルゴリズムを構成する。

アルゴリズム2-7-3

<0> 初期化

$$s=0, \quad \mathbf{c}_l^{(0)} = \mathbf{f}_l^{(0)} = (f(\zeta_l)), \quad 0 \leq l \leq n_0.$$

<1> 第s段

<1-0> $t=0$

<1-1> $W(R_m(Y_t))f$ の誤差推定

十分な精度があれば<3>へ、そうでなければ、<1-2>へ。

<1-2> $\mathbf{f}_{n_t+1}^{(s)}, \dots, \mathbf{f}_{n_{t+1}}^{(s)}$ を計算する。

<1-3> $\mathbf{c}_{n_t+1}^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_{t+1}}^{(s)}$ を計算する。

<1-4> $t=t+1$.

$t < \alpha$ なら<1-1>, そうでないなら<2>へ。

<2> s+1段の準備

<2-1> $\mathbf{c}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_\alpha}^{(s)}$ から $\mathbf{c}_1^{(s+1)}, \dots, \mathbf{c}_{n_0}^{(s+1)}$ を計算。

<2-2> $s=s+1$ として<1>へ。

<3> $\mathbf{c}^{(s,t)} = (I_m \otimes W(Y_t)) (\mathbf{c}_1^{(s)T}, \dots, \mathbf{c}_{n_t}^{(s)T})^T$ を計算して終了。

補間多項式は、その利用される局面にしたがって、さまざまな誤差基準が適用されるであろう。したがって、この節では、アルゴリズム2-7-3の<1-1>誤差推定については詳しく述べない。またそれに要する計算量は、以下の計算量の考察からはぶく。しかし、2-5節で見たように、滑らかな関数 f に対する、準等間隔補間 $W(R_m(Y_t))f$ の絶対誤差解析は、高次の補間係数数個を使って行える。さらに、これらの補間係数は、主張2-7-

1により $\mathbf{c}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_t}^{(s)}$ から1個あたり、 n_t 回の乗算数で計算でき、後で述べる、全体の計算量に対して無視できる。

さて、上の過程の下に、アルゴリズム2-7-3の計算量について以下の主張を得る。

主張2-7-4: アルゴリズム2-7-3において、最終結果 $\mathbf{c}^{(s,t)}, s \geq 0, 0 \leq t \leq \alpha-1$, を得るのに要する総関数値計算回数は N , 総乗算回数は、

$$\frac{1}{2} N (\log_2 N + 2n_t - \log_2 n_t), \quad (2-7-8)$$

となる。ここで、 $N = mn_t$ は、 $\mathbf{c}^{(s,t)}$ の項数である。

(証明) 主張2-4-6, 2-7-2とその証明より、 $\mathbf{c}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_t}^{(s)}$ は、それぞれ、基数2のFFTと等価な算法で計算されていることがわかる。したがって、それぞれについて、 m 個の関数評価と、 $\frac{1}{2} sm$ 個の乗算で計算される。さらに、主張2-7-1より、アルゴリズムの

<3>の部分には、 mn_t^2 個の乗算を要する。したがって、 $\mathbf{c}^{(s,t)}$ の項数を、 $N = mn_t$ とすれば、総乗算回数は、

$$\frac{1}{2} n_t sm + n_t^2 m = \frac{1}{2} N (s + 2n_t) = \frac{1}{2} N (\log_2 N + 2n_t - \log_2 n_t),$$

となる。//

注意: 特別な場合には、主張2-7-1で示された計算量は、劇的に小さくなる。たとえば、

2-6節の例2-6-3において、要素を、 $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\} = \{1, -1, i, -i, e^{\pi i/4}\}$ と配列することにより、式(2-7-1)の条件、 $Y_0 = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$, $Y_1 = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$, $Y_2 = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\}$ が成立する。このとき、

$$W(Y_0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, W(Y_1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix},$$

$$W(Y_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_4 & 0 \\ 1 & \tau & i & \tau^3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(Y_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau = e^{\pi i/4}.$$

したがって、 $\langle 3 \rangle$ における、 $c^{(s,0)}$, $c^{(s,1)}$, $c^{(s,2)}$ の計算に要する乗算回数は、主張2-7-1による、 $9m, 16m, 25m$, から、 $0m, 0m, 2m$, へと激減する。

2-8. 数値実験

関数 $f(z) = 1/(1-0.9z)$ に対して、例2-6-3の式(2-6-8)で定義された標本点集合列上の補間多項式列 $L(Z_6)f, L(Z_7)f, \dots, L(Z_{20})f$, を計算してみた。3つおきにとった部分列 $L(Z_7)f, L(Z_{10})f, \dots, L(Z_{19})f$, は従来の2巾タイプである。ここでは誤差として関数の2ノルム

$$\epsilon_m := \left\{ \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} |L(Z_m)f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-8-1)$$

を測定した。これは、係数誤差の2乗和の平方根として計算される。実験は、名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-780上で、FORTRAN77の倍精度計算(10進約16桁)により行われた。

図2-8-1は、横軸は標本点数 $N_m := |Z_m|, 6 \leq m \leq 20$, を示し、左縦軸は誤差の常用対数 $\log_{10}\epsilon_m$, 右縦軸は計算に要した乗算回数を、 $(\frac{1}{2}\log_2 N_m - 1)N_m + 1$ で割った μ_m を示す。 $(\frac{1}{2}\log_2 N - 1)N + 1$ はBergland[1968a]による N が2の中のとときのFFTに要する乗算回数である。

与えられた要求誤差 ϵ に対して選ばれる補間式 $L(Z_m)f$ は、 $\epsilon_m \leq \epsilon$ を満たす最小の番号 m を持つものである。図の影のついた領域は、われわれの新しい標本点集合が選ばれる ϵ

の範囲を示す。図によってわかるように、2の中のと標本点数の中間に2つの標本点数を挿入したことは、必要な精度を持つ補間式を得るための標本点数を減少させることにおいて効果的である。

図からわかるように、計算量はFFTの20%増未満で、標本点数が多くなればFFTの計算量との比は1に近づく。

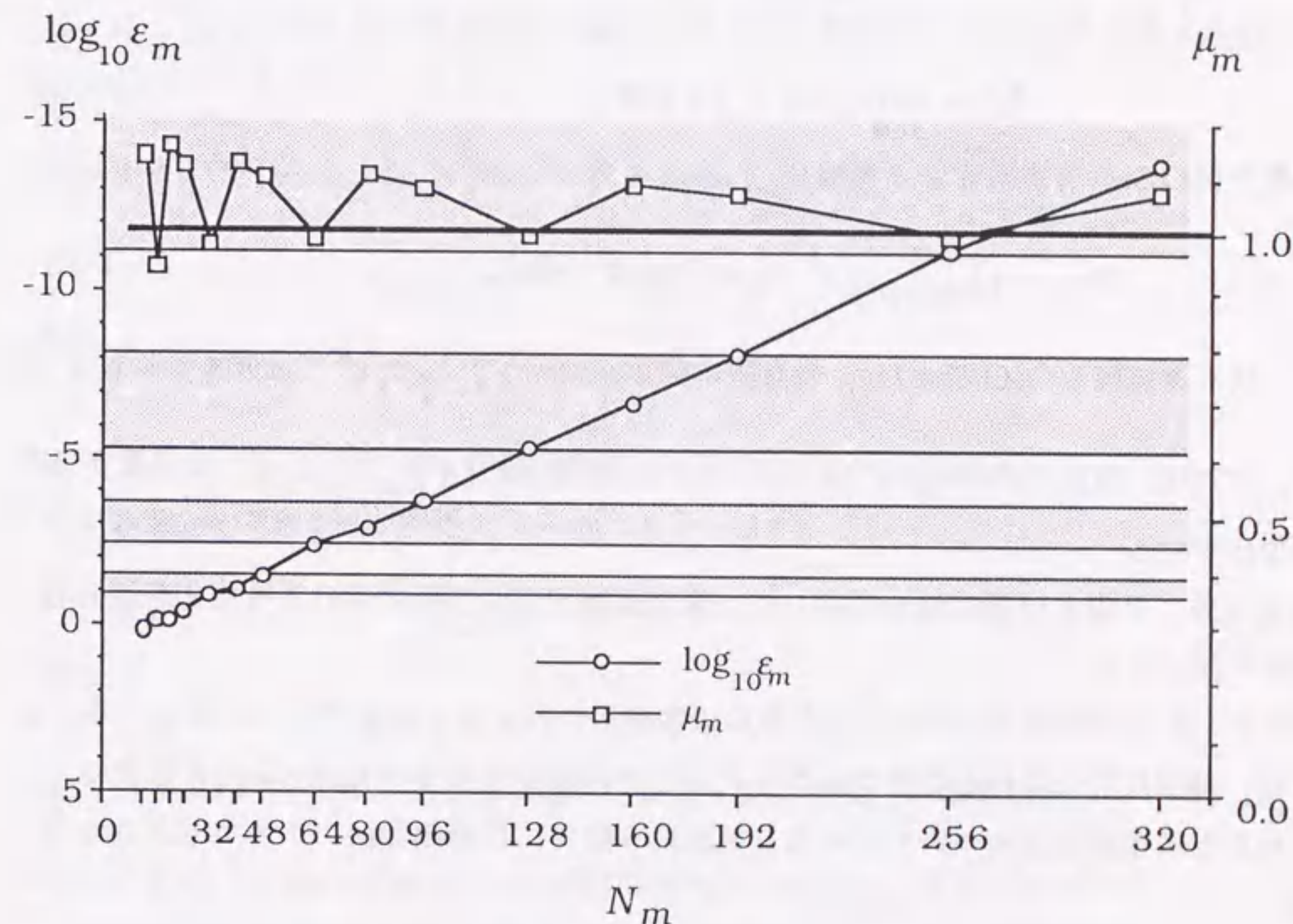


図2-8-1. 単位円周上の関数 $f(x) = 1/(1-0.9z)$ の補間の精度と2巾FFTとの計算量の比較。

3章 有限巾級数補間、あるいは数値Fourier変換

3-1. はじめに

この章では、2章に述べた、準等間隔標本点集合上の補間法の応用として、複素関数の有限巾級数補間（有限Laurent展開）について述べる。

単位円周 \mathbf{S} 上の複素連続関数全体を、 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ とかく。ここでも、関数のノルムとして一様ノルムをとる。すなわち、

$$\|f\| := \max_{z \in \mathbf{S}} |f(z)|, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}). \quad (3-1-1)$$

関数空間 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ の有限次元部分空間 $\Pi_{p,q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, を

$$\Pi_{p,q} := \left\{ \sum_{k=-p}^{q-1} c_k z^k : c_k \in \mathbf{C}, p \leq k < q \right\}, \quad (3-1-2)$$

とし、複素連続関数 $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ を $\Pi_{p,q}$ の有限巾級数 $g(z) = \sum_{k=-p}^{q-1} c_k z^k$ で近似することを考える。これは、複素周期関数 $f(e^{it})$ を有限Fourier級数 $g(e^{it}) = \sum_{k=-p}^{q-1} c_k e^{ikt}$ で近似する問題と等価である。

ここでは、2章との連続性を考慮して、複素連続関数の空間における有限巾級数近似の用語で記述する。

2節で、準等間隔標本点集合上の有限巾級数補間の安定性と収束性について述べる。3節では、補間係数を求める高速アルゴリズムとその安定性について述べる。4節では、誤差解析と誤差評価法について述べる。最後に5節で、自動補間法のアルゴリズムを与える。

3-2. 準等間隔標本点上の有限巾級数補間の安定性と収束性

単位円周 \mathbf{S} の複素連続関数 $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ に対して、 $\Pi_{p,q}$ の有限巾級数補間による最良近似の近似度を、

$$E_{p,q}(f) := \min_{g \in \Pi_{p,q}} \|g - f\|, \quad (3-2-1)$$

で定義する。後で示すように、 $\Pi_{p,q}$ はHarrの条件をみたし、右辺の $\|g - f\|$ を最小化する g_0 が $\Pi_{p,q}$ に唯一存在するので、 \inf を \min とした。

有限巾級数全体は $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ で稠密であることが知られている[Walsh1956(p.38)]。すな

わち、

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} E_{p,q}(f) = 0. \quad (3-2-2)$$

このことは、単位円周上の複素連続関数を、有限巾級数で近似することの正当性を示している。

式(3-2-2)における収束速度は、被近似関数の連続度により支配されている。このことに関する、次の定理は連続周期関数の有限級数近似に対するJacksonの定理[Zygmund 1959 (p.117)]より明らかである。

定理3-2-1: f がHölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{S})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属するなら、

$$E_{n,n}(f) = O(n^{-k-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3-2-3)$$

である。

次の定理は、解析関数に関する初等的な定理である。

定理3-2-2: $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ が \mathbf{S} 上解析的ならば、ある $r < 1$ が存在して、

$$E_{n,n}(f) = O(r^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3-2-4)$$

である。

さて、単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 n の標本点集合を Z とする。ある整数 p について、 $\Pi_{p,n-p}$ の要素による、関数 $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ の Z 上の補間 $L^{(p)}(Z)f \in \Pi_{p,n-p}$ は次の補間条件

$$L^{(p)}(Z)f(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta \in Z, \quad (3-2-5)$$

を満たす有限巾級数である。

有限巾級数の存在と一意性は、次の定理により示される。

定理3-2-3: $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ の部分空間 $\Pi_{p,n-p}$ の要素による、関数 $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ の Z 上の補間は、式(3-2-5)により一意に決定し、

$$L^{(p)}(Z)f = \{M_{-p}^{-1} L(Z) M_p\} f, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}), \quad (3-2-6)$$

とかける。ここで、 $L(Z)f$ は、 Z 上の f の多項式補間であり、 M_p は $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ 上の作用素で、 $M_p f(z) := z^p f(z)$, $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$, で定義される。

(証明) 有限巾級数 $g \in \Pi_{p,n-p}$ が、補間条件

$$g(\zeta) = f(\zeta), \zeta \in Z,$$

を満たすなら, $M_p g$ は $n-1$ 次多項式で, $M_p f$ に対する補間条件

$$M_p g(\zeta) = M_p f(\zeta), \zeta \in Z,$$

を満たす. このことと補間多項式の一意性より, $M_p g = L(Z)M_p f$ が成り立つ.

これより,

$$g = M_{-p} L(Z) M_p f,$$

を得る.

逆に, $M_{-p} L(Z) M_p f$ が, 補間条件を満たしていることは明らか. //

この定理は, $\Pi_{p,q}$ が Harr の条件をみたしていることを示している.

補間作用素 $L^{(p)}(Z)$ のノルムを $\Lambda^{(p)}(Z)$ で表わし, Lebesgue 定数とよぶ. すなわち,

$$\Lambda^{(p)}(Z) := \|L^{(p)}(Z)\| \equiv \max_{f \in C(\mathbf{S}), \|f\|=1} \|L^{(p)}(Z)f\|, \quad (3-2-7)$$

である.

1 章でも述べた様に, Lebesgue 定数が小さいことは, 被近似関数 f に混入した摂動 Δf による補間 $L^{(p)}(Z)f$ のゆらぎ $L^{(p)}(Z)\Delta f$ が小さいこと, すなわち, 作用素 $L^{(p)}(Z)$ の安定性を示す. また, Lebesgue 定数は, 次の式により補間の精度を支配する.

$$\|f - L^{(p)}(Z)f\| \leq (1 + \Lambda^{(p)}(Z)) E_{p,n-p}(f). \quad (3-2-8)$$

定理 3-2-3 より, Lebesgue 定数 $\Lambda^{(p)}(Z)$ について次の定理を得る.

定理 3-2-4: 整数 p に関して, Lebesgue 定数 $\Lambda^{(p)}(Z)$ は不変で,

$$\Lambda^{(p)}(Z) = \Lambda(Z), p \in \mathbf{Z}. \quad (3-2-9)$$

ここで, $\Lambda(Z)$ は多項式補間作用素 $L(Z)$ の Lebesgue 定数である.

(証明) 任意の整数 p について,

$$\|M_p f\| \equiv \max_{z \in C} |z^p f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)| = \|f\|.$$

ゆえに, 作用素ノルムの定義より, $M_p = 1$. これと定理 3-2-3 より,

$$\|L^{(p)}(Z)\| = \|M_{-p} L(Z) M_p\| \leq \|M_{-p}\| \|L(Z)\| \|M_p\| = \|L(Z)\|.$$

$$\|L(Z)\| = \|M_p L^{(p)}(Z) M_{-p}\| \leq \|M_p\| \|L^{(p)}(Z)\| \|M_{-p}\| = \|L^{(p)}(Z)\|,$$

が導かれる. これより, ただちに式(3-2-9)を得る. //

この定理と, 2 章の定理 2-2-3 より, 等間隔標本点上の補間について, 次の定理を得る.

定理 3-2-5: 単位円周 \mathbf{S} のすべての大きさ n の集合 Z と, 任意の整数 p について,

$$\Lambda^{(p)}(Z) \geq \Lambda^{(p)}(U_n), \quad (3-2-10)$$

であり, $\Lambda^{(p)}(U_n)$ に関して,

$$\Lambda^{(p)}(U_n) = \frac{2}{\pi} \log n + O(1), n \geq 1, \quad (3-2-11)$$

が成立する.

この定理は, 等間隔標本点集合上の補間の最適性を示している.

また, 定理 2-3-2 により, 準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$ 上の補間について次の定理を得る.

定理 3-2-6: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z と, 任意の整数 p について

$$\Lambda^{(p)}(R_m(Z)) \leq \Lambda^{(p)}(Z) \Lambda^{(p)}(U_m) = \frac{2}{\pi} \Lambda(Z) \log |R_m(Z)| + O(1), \quad (3-2-12)$$

が成立する.

2 章と同様に, 標本点数が, 狭義単調増加する標本点集合列 $\{Z_m\}$ 上の補間作用素列 $L^{(p_m)}(Z_m), m \geq 1$, について,

$$\Lambda^{(p_m)}(Z_m) = O(\log |Z_m|), m \rightarrow \infty, \quad (3-2-13)$$

が成立するとき補間作用素列 $L^{(p_m)}(Z_m), m \geq 1$, は準安定であるという.

定理 3-2-6 により, 任意の整数列 $p_m, m \geq 1$, に対して準等間隔標本点集合列 $R_m(Z)$,

$m \geq 1$, 上の補間作用素列 $L^{(p_m)}(R_m(Z))$, $m \geq 1$, は準安定である.

定理3-2-1と式(3-2-8)により, 次の定理を得る.

定理3-2-7: 補間作用素列 $L^{(p_m)}(Z_m)$, $m \geq 1$, は準安定で, ある定数 $0 < \kappa \leq 1/2$ について,

$$\kappa |Z_m| \leq \min\{p_m, |Z_m| - p_m\}, m \geq 1, \quad (3-2-14)$$

を満たすと仮定する. 関数 f が, Hölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{S})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属するなら,

$$\|f - L^{(p_m)}(Z_m)f\| = O(\log|Z_m| / |Z_m|^{k+\alpha}), \quad (3-2-15)$$

が成立する. すなわち, $L^{(p_m)}(Z_m)f$, $m \geq 1$, は, $m \rightarrow \infty$ で一様に f に収束する.

(証明) $n_m = |Z_m|$, $m \geq 1$, とすると,

$$L^{(p_m)}(Z_m)f \in \Pi_{p_m, n_m - p_m}, m \geq 1,$$

であるから, 条件(3-2-14)より,

$$\begin{aligned} \|f - L^{(p_m)}(Z_m)f\| &\leq (1 + L^{(p_m)}(Z_m))E_{p_m, n_m - p_m}(f) \\ &\leq (1 + L^{(p_m)}(Z_m))E_{\kappa n_m, \kappa n_m}(f), m \geq 1. \end{aligned}$$

これと, 式(3-2-3), (3-2-13)より, 式(3-2-15)を得る. //

3-3. 準等間隔標本点上の補間法の高速度アルゴリズムと数値的安定性

この節では, 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z 上の関数値から有限巾級数補間の係数を求める計算, また, その有限巾級数を, Z 上で評価する計算を高速に行うアルゴリズムと, その数値的安定性について述べる.

単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 n の有限集合を $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ とする. 関数 $f \in C(\mathbf{S})$ の Z 上の有限巾級数補間を,

$$L^{(p)}(Z)f(z) = \sum_{k=-p}^{n-p-1} \bar{c}_k z^k, \quad (3-3-1)$$

と巾級数展開しておく.

$W^{(p)}(Z) : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ を f の Z 上の値から, $L^{(p)}(Z)f$ の巾級数展開の係数への線形変換とする. すなわち,

$$W^{(p)}(Z)(f(\zeta_1), f(\zeta_2), \dots, f(\zeta_n))^T = (\bar{c}_{-p}, \dots, \bar{c}_{n-p-1})^T, \quad (3-3-2)$$

とする.

定理3-2-3より, 直ちに次の定理を得る.

定理3-3-1: 式(2-4-4)の $W(Z)$ により, $W^{(p)}(Z)$ は,

$$W^{(p)}(Z) = W(Z) \cdot \text{diag}(\zeta_1^p, \zeta_2^p, \dots, \zeta_n^p), \quad (3-3-3)$$

と表わせる.

対角行列 $\text{diag}(\zeta_1^p, \zeta_2^p, \dots, \zeta_n^p)$ は, ユニタリだから, 上の定理より次の系を得る.

系3-3-2: $W^{(p)}(Z)$ の条件数は, $W(Z)$ の条件数と等しい. すなわち,

$$\text{cond}(W^{(p)}(Z)) = \text{cond}(W(Z)). \quad (3-3-4)$$

また, 定理2-4-11より次の系を得る.

系3-3-3: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z を核とする準等間隔標本点集合列 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, について,

$$\text{cond}(W^{(p)}(R_m(Z))) = \text{cond}(W(Z)), m \geq 1, \quad (3-3-5)$$

が成り立つ.

系3-3-3は, 関数 $f \in C(\mathbf{S})$ に対して, 有限巾級数補間列 $L^{(p_m)}(R_m(Z))f$, $m \geq 1$, の係数が, 安定に求まることを示す.

次に, 2-7節で与えた高速自動補間法の組み立て方を意識した, 準等間隔標本点集合上の有限巾級数補間のための高速アルゴリズムを構成する.

単位円周 \mathbf{S} 上の複素数 α , 自然数 m , 整数 p , に対して, $m \times m$ 行列

$$S_m^{(p)}(\alpha) = (s_{k,l})_{-p \leq k < m-p, 0 \leq l < m} \text{ を次のように定義する.}$$

$$s_{kl} = \begin{cases} 0 & , k \not\equiv l \pmod{m} \\ \alpha^{(l-k)/m} & , k \equiv l \pmod{m} \end{cases} , -p \leq k < m-p, 0 \leq l < m. \quad (3-3-6)$$

定理3-3-4: 等間隔標本点集合上の有限巾級数補間について,

$$W^{(p)}(m\sqrt[m]{\alpha}U_m) = S_m^{(p)}W^{(p)}(m\sqrt[m]{\alpha}U_m), \quad (3-3-7)$$

成り立つ.

(証明) 任意の複素連続関数 $f \in C(\mathbf{S})$ について,

$$L^{(p)}(m\sqrt[m]{\alpha}U_m) f(z) = \sum_{k=-p}^{m-p-1} \tilde{c}_k z^k,$$

$$L(m\sqrt[m]{\alpha}U_m) f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k,$$

とおく. 今, $-p \leq k < m-p$ の関数 $l(k)$, $n(k)$ を,

$$l(k) \equiv k \pmod{m}, \quad 0 \leq l(k) < m,$$

$$n(k) = (l(k) - k) / m,$$

で定義する. これにより, $m\sqrt[m]{\alpha}U_m$ の点 $\zeta_j = m\sqrt[m]{\alpha} e^{2\pi i j/m}$, $0 \leq j < m$, について,

$$\begin{aligned} L^{(p)}(m\sqrt[m]{\alpha}U_m) f(\zeta_j) &= \sum_{k=-p}^{m-p-1} \tilde{c}_k \zeta_j^k \\ &= \sum_{k=-p}^{m-p-1} \tilde{c}_k (m\sqrt[m]{\alpha} e^{2\pi i j/m})^{l(k)-mn(k)} = \sum_{k=-p}^{m-p-1} (\alpha^{-n(k)} \tilde{c}_k) \zeta_j^{l(k)}, \end{aligned}$$

すなわち, 多項式 $\sum_{k=-p}^{m-p-1} (\alpha^{-n(k)} \tilde{c}_k) z^{l(k)}$ は, f の Z 上の補間多項式であり, 補間多項式の

一意性より, $L(m\sqrt[m]{\alpha}U_m) f(z)$ と一致する. ゆえに,

$$\tilde{c}_k = \alpha^{n(k)} c_{l(k)}, \quad -p \leq k < m-p,$$

が成立する. これは, 式(3-3-7)を意味する. //

単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 v の集合 $Z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_v\}$ を核とする準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, と関数 $f \in C(\mathbf{S})$ について, 定理2-4-2に倣って, 以下の記号を定める.

$$m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m = \{\zeta_{l1}, \zeta_{l2}, \dots, \zeta_{lm}\}, \quad 1 \leq l \leq v,$$

$$f_l = (f(\zeta_{l1}), f(\zeta_{l2}), \dots, f(\zeta_{lm}))^T \in \mathbf{C}^m, \quad 1 \leq l \leq v,$$

$$f = (f_1^T, f_2^T, \dots, f_v^T)^T \in \mathbf{C}^{mv},$$

$$c_l = W(m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) f_l, \quad 0 \leq l \leq v.$$

さらに,

$$\tilde{c}_l = W^{(p)}(m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) f_l, \quad 0 \leq l \leq v,$$

$$\tilde{c} = W^{(p)}(R_m(Z)) f,$$

とすれば, 定理2-4-2, 3-3-1, 3-3-4, より,

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= W(R_m(Z)) \cdot \text{diag}(\text{diag}(\zeta_{lj}^m)_{j=1}^m)_{l=1}^v f \\ &= (I_m \otimes W(Z)) \cdot \text{diag}(W(m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) \cdot \text{diag}(\zeta_{lj}^m)_{j=1}^m)_{l=1}^v f \\ &= (I_m \otimes W(Z)) \cdot \text{diag}(W^{(p)}(m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m))_{l=1}^v f \\ &= (I_m \otimes W(Z)) (\tilde{c}_1^T, \dots, \tilde{c}_v^T)^T \\ &= (I_m \otimes W(Z)) \cdot \text{diag}(S_m^{(p)}(\zeta_l)_{l=1}^v (c_1^T, \dots, c_v^T)^T). \end{aligned} \quad (3-3-8)$$

この等式より次のようなアルゴリズムが導かれる.

アルゴリズム 3-3-5:

- <1> $f_l = (f(\zeta_{l1}), f(\zeta_{l2}), \dots, f(\zeta_{lm}))^T \in \mathbf{C}^m$, $1 \leq l \leq v$, を求める. 関数評価 mv 回
- <2> $c_l = W(m\sqrt[m]{\zeta_l} U_m) f_l$, $0 \leq l \leq v$, を求める. 乗算 $\frac{1}{2} mv \log m$ 回
- <3> $\tilde{c}_l = S_m^{(p)}(\zeta_l) c_l$, $0 \leq l \leq v$, を求める. 乗算 mv 回
- <4> $\tilde{c} = (I_m \otimes W(Z)) (\tilde{c}_1^T, \dots, \tilde{c}_v^T)^T$ を求める. 乗算 mv^2 回

アルゴリズムの各段階の右に, m が2の中のとときに必要とされる関数評価回数と, 乗算回数をかいた. 乗算回数は, 主張2-4-6, 主張2-4-7及び, $S_m^{(p)}(\alpha)$ の定義より容易にわかる.

m が大きいときには, 必要とされる乗算のほとんどが, <2>の段階で費やされる. <2>までは, 有限巾級数の負巾の項数を定めるパラメタ p と無関係であるので, いくつかの p で有限巾級数補間の係数を求めるときに, 大半の計算を共通化できる.

このアルゴリズムを逆にたどることにより, 有限巾級数 $\sum_{k=-p}^{mv-p-1} \bar{c}_k z^k$ を, 準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$ 上で評価する高速アルゴリズムが得られる.

アルゴリズム 3-3-6:

<1> $(\bar{c}_1^T, \dots, \bar{c}_v^T)^T = (I_m \otimes W(Z)^{-1}) \bar{c}$ を求める. 乗算 mv^2 回

<2> $c_l = S_m^{(p)}(\zeta_l)^{-1} \bar{c}_l, 0 \leq l \leq v$, を求める. 乗算 mv 回

<3> $f_l = W(\sqrt[m]{\zeta_l} U_m)^{-1} c_l, 0 \leq l \leq v$, を求める. 乗算 $\frac{1}{2} mv \log m$ 回

以上2つのアルゴリズムの乗算回数に関する考察をまとめて次の主張とする.

主張3-3-7: m は2の中とする. 任意の $\bar{c}, f \in \mathbf{C}^{mv}$ に対して, $\bar{c} = W^{(p)}(R_m(Z))f$,

$f = W^{(p)}(R_m(Z))^{-1} \bar{c}$ は, FFTによりそれぞれ, $\frac{1}{2} N \log_2 N + O(N)$ の乗算回数で求めることができる. ここで, N は標本点数 mv である.

3-4. 事後誤差評価法

この節では, 滑らかな関数 f に関する準等間隔標本点上の補間 $L^{(p)}(R_m(Z))f$ の誤差解析と, $L^{(p)}(R_m(Z))f$ の係数を使った現実的な誤差評価法について述べる.

$Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_v\}$ を単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 v の標本点集合とする. f の巾級数展開

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (3-4-1)$$

は絶対収束すると仮定する.

1-3節の一般論より,

$$\mathbf{a}^{(p,\alpha)} := (a_{-p}^{(\alpha)}, \dots, a_{v-p-1}^{(\alpha)})^T = W^{(p)}(Z)(\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_v^\alpha)^T, \alpha \in \mathbf{Z}, \quad (3-4-2)$$

とすれば,

$$(C_{-p}, \dots, C_{\alpha-p-1})^T = (c_{-p}, \dots, c_{v-p-1})^T + \sum_{\alpha < -p \text{ or } v-p \leq \alpha} c_\alpha \mathbf{a}^{(p,\alpha)}. \quad (3-4-3)$$

また,

$$\omega^{(p)}(Z) := \sup_{\alpha < -p \text{ or } v-p \leq \alpha} \|\mathbf{a}^{(p,\alpha)}\|_1, \quad (3-4-4)$$

を定義して, 補間係数の f の巾級数展開係数に対する誤差の見積りと補間多項式の誤差評価が得られる. この $\omega^{(p)}(Z)$ と式(2-5-4)で定義した $\omega(Z)$ に関して次の定理が成り立つ.

定理 3-4-1: 単位円周 \mathbf{S} の任意の有限集合 Z について, $\omega^{(p)}(Z) = \omega(Z), p \in \mathbf{Z}$.

(証明) 任意の整数 α について,

$$L(Z)z^\alpha = \sum_{k=0}^{v-1} a_k^{(\alpha)} z^k,$$

$$\mathbf{a}^{(\alpha)} := (a_0^{(\alpha)}, \dots, a_{v-1}^{(\alpha)})^T = W(Z)(\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_v^\alpha)^T,$$

とすると, 補間条件より,

$$\zeta_l^\alpha = \sum_{k=0}^{v-1} a_k^{(\alpha)} \zeta_l^k, 1 \leq l \leq v.$$

この式の両辺の複素共役をとり, ζ_l^{n-1} を掛ければ, $\bar{\zeta}_l = \zeta_l^{-1}, 1 \leq l \leq v$, だから,

$$\zeta_l^{v-\alpha-1} = \sum_{k=0}^{v-1} \bar{a}_k^{(\alpha)} \zeta_l^{v-k-1} = \sum_{k=0}^{v-1} \bar{a}_{v-k-1}^{(\alpha)} \zeta_l^k, 1 \leq l \leq v,$$

を得る. これより, v 次元複素ベクトル空間 \mathbf{C}^v 上の線形変換を,

$$H_v(x_1, x_2, \dots, x_v)^T := (\bar{x}_v, \bar{x}_{v-1}, \dots, \bar{x}_1)^T, x_l \in \mathbf{C}, 1 \leq l \leq v,$$

とすると,

$$H_v \mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{a}^{(v-\alpha-1)}, \alpha \in \mathbf{Z}, \quad (3-4-5)$$

$$\|\mathbf{a}^{(\alpha)}\|_1 = \|\mathbf{a}^{(v-\alpha-1)}\|_1, \alpha \in \mathbf{Z}, \quad (3-4-6)$$

を得る. これと式(3-3-3)より,

$$\begin{aligned}\omega^{(p)}(Z) &:= \sup_{\alpha < -p \text{ or } v-p \leq \alpha} \left\| W^{(p)}(Z) (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_v^\alpha)^T \right\|_1 \\ &= \sup_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} \left\| W(Z) (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_v^\alpha)^T \right\|_1 = \sup_{v \leq k} \left\| \mathbf{a}^{(\alpha)} \right\|_1 = \omega(Z),\end{aligned}$$

が得られる. //

この定理により, 巾級数補間

$$L^{(p)}(Z)f(z) = \sum_{k=-p}^{v-p-1} C_k z^k,$$

の巾級数展開係数の誤差評価

$$\left\| ((C_1 - c_1), \dots, (C_v - c_v))^T \right\|_1 \leq \omega(Z) \sum_{k < -p \text{ or } v-p \leq k} |c_k|, \quad (3-4-7)$$

と補間多項式自身の誤差評価

$$\left\| L^{(p)}(X)f - f \right\| \leq (1 + \omega(Z)) \sum_{k < -p \text{ or } v-p \leq k} |c_k|, \quad (3-4-8)$$

が得られる. この定理と定理2-5-1, 2より, 等間隔点集合は $\omega^{(p)}(Z)$ を最小化するという意味においても最良である.

等間隔点集合を標本点集合とすると, 次の定理を得る. 証明は, 定理2-5-2 と同様である.

定理 3-4-2: 標本点集合を $Z = \tau \sqrt[m]{\tau} U_m$, $\tau \in \mathbf{S}$, $m \geq 1$, とすると,

$$C_k = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \tau^\alpha c_{am+k}, \quad 0 \leq k < m, \quad (3-4-9)$$

が成立する.

次に, 集合 Z を核とする準等間隔点集合上の巾級数補間について考える.

$$F_l(z) := L^{(p)}(\tau \sqrt[m]{\tau} U_m) f(z) = \sum_{k=-p}^{m-p-1} \tilde{c}_{lk} z^k, \quad 1 \leq l \leq v, \quad (3-4-10)$$

$$F(z) := L^{(p)}(R_m(Z)) f(z) = \sum_{k=-p}^{mv-p-1} \tilde{C}_k z^k, \quad (3-4-11)$$

とする. 定理3-4-2と, 式(3-3-8)より, $-p \leq j < m-p$ について,

$$(\tilde{C}_j, \tilde{C}_{m+j}, \dots, \tilde{C}_{(v-1)m+j})^T = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} c_{am+j} W(Z) \zeta^\alpha, \quad (3-4-12)$$

$$\zeta^\alpha = (\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_v^\alpha)^T, \quad \alpha \in \mathbf{Z},$$

を得る. また, $f_{mv-1}(z) = \sum_{k=-p}^{mv-p-1} c_k z^k$ とすると, $L^{(p)}(R_m(Z))f_{mv-1} = f_{mv-1}$ であるから, 式(3-4-12)を導いた手順を $f_{mv-1}(z)$ に用いて, $-p \leq j < m-p$ について,

$$(c_j, c_{m+j}, \dots, c_{(v-1)m+j})^T = \sum_{\alpha=0}^{v-1} c_{am+j} W(Z) \zeta^\alpha.$$

これと, 式(3-4-12)より,

$$\begin{aligned} & (C_j, C_{m+j}, \dots, C_{(v-1)m+j})^T - (c_j, c_{m+j}, \dots, c_{(v-1)m+j})^T \\ &= \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} c_{am+j} W(Z) \zeta^\alpha. \end{aligned} \quad (3-4-13)$$

これと定理3-4-1より,

$$\sum_{\alpha=0}^{v-1} |\tilde{C}_{am+j} - c_{am+j}| \leq \omega(Z) \left\{ \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} |c_{am+j}| \right\}, \quad 0 \leq j < m, \quad (3-4-14)$$

が成立することがわかる.

この式より, 定理2-5-3の証明と同様にして, 次の定理を得る.

定理 3-4-3: 準等間隔点集合 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, について,

$$\omega^{(p)}(R_m(Z)) = \omega(Z), \quad (3-4-15)$$

$$\sum_{k=-p}^{mv-p-1} |\tilde{C}_k - c_k| \leq \omega(Z) \sum_{k < -p \text{ or } mv-p \leq k} |c_k|, \quad (3-4-16)$$

$$\left\| L^{(p)}(R_m(Z))f - f \right\| \leq (1 + \omega(Z)) \sum_{k < -p \text{ or } mv-p \leq k} |c_k|, \quad (3-4-17)$$

が成立する.

次に, 式(2-4-10)による, 現実的な誤差評価法について述べる.

以下, 巾級数補間の次数設定パラメタを $p = [N/2]$ とする. ここで, $N = mv$ は準等間隔点集合 $R_m(Z)$ の大きさである. さらに, Laurent展開(3-4-1)の係数が, ある減衰係数

$0 < r < 1$ により, $|c_k| = O(r^{|k|})$, $k \geq 0$, で減少するものとする. この仮定により,

$$\sum_{k < -p \text{ or } mv-p \leq k} |c_k| = O(r^{mv/2}), \quad m \rightarrow \infty, \quad (3-4-18)$$

となる。これと式(3-4-16,17)により、補間巾級数 $L^{(p)}(R_m(Z))f$, $m \geq 1$, とその係数は公比 $r^{v/2}$ の等比数列的な速度で関数 f 及びそのTaylor展開係数に収束する。1-4節の手法を用いて、それらの誤差は、補間多項式のいくつかの高次係数により

$$\|L^{(p)}(R_m(Z))f - f\| \leq \frac{r(1+\omega(Z))}{1-r} \left\{ \sum_{p-l \leq |k| \leq p} |\bar{C}_k| \right\}, \quad (3-4-19)$$

$$\sum_{k=-p}^{mv-p-1} |\bar{C}_k - c_k| \leq \frac{r\omega(Z)}{1-r} \left\{ \sum_{p-l \leq |k| \leq p} |\bar{C}_k| \right\}, \quad (3-4-20)$$

で評価できる。ここでも、式 $A \leq B$ は、 B が A の上界の見積りであることを示す。標本数 N が偶数のとき、補間係数 C_p は存在しないので両式右辺の級数和においてはそれを0とみなす。両式の右辺はすべて計算可能な量である。 l は自然数で通常1か2が選ばれる。両式に現われる係数 $r/(1-r)$ に関しては、2-5節で紹介した手法で、数値的に取り扱うことができる。

3-5. 高速自動補間法

この節では、2-7節の自動多項式補間法の構成手法に、アルゴリズム3-3-5を組み込み、自動有限Laurent級数補間のアルゴリズムを導く。

2-7節の記号をすべてものを踏襲する。それに加えて、 $s \geq 0$, $0 \leq t \leq \alpha-1$, $1 \leq l \leq n_\alpha$ と $m = 2^s$ について、

$$\bar{c}_l^{(s)} := W^{(p_{s,t})}(m\sqrt{\zeta_l}U_m)f_l^{(s)} \equiv S_m^{(p_{s,t})}(\zeta_l)c_l^{(s)}, \quad (3-5-1)$$

$$\bar{c}^{(s,t)} := W^{(p_{s,t})}(R_m(Y_t))f^{(s,t)} = (I_m \otimes W(Y_t))([\bar{c}_1^{(s)}]^T, \dots, [\bar{c}_{n_t}^{(s)}]^T)^T, \quad (3-5-2)$$

とする。式(3-5-1,2)の第2の等式は、定理3-3-4と式(3-3-8)からきている。また、整数 $p_{s,t}$ は、 $R_m(Y_t)$ 上の有限Laurent級数補間の負巾の項数である。

下に述べるアルゴリズムでは、 $p_{s,t}$, $s \geq 0$, $0 \leq t \leq \alpha-1$, は、収束状況に即応して可変とすることができる。また、 $p_{s,t} = [m|Y_t|/2]$ と固定すれば、3-3節で見たように、補間作

用素列 $L^{(p_{s,t})}(R_m(Y_t))$, $s \geq 0$, $0 \leq t \leq \alpha-1$, は準安定であるから、任意のHölder族の関数に対して補間列の一様収束が保証される。

以上の準備により、次のようなアルゴリズムを構成する。

アルゴリズム3-5-1

<0> 初期化

$$s = 0, \quad c_l^{(0)} = f_l^{(0)} = (f(\zeta_l)), \quad 0 \leq l \leq n_0.$$

<1> 第 s 段

<1-0> $t = 0$

<1-1> $W^{(p_{s,t})}(R_m(Y_t))f$ の誤差推定

十分な精度があれば<3>へ、そうでなければ、<1-2>へ。

<1-2> $f_{n_{t+1}}^{(s)}, \dots, f_{n_{t+1}}^{(s)}$ を計算する。

<1-3> $c_{n_{t+1}}^{(s)}, \dots, c_{n_{t+1}}^{(s)}$ を計算する。

<1-4> $t = t + 1$.

$t < \alpha$ なら<1-1>, そうでないなら<2>へ。

<2> $s+1$ 段の準備

<2-1> $c_1^{(s)}, \dots, c_{n_\alpha}^{(s)}$ から $c_1^{(s+1)}, \dots, c_{n_0}^{(s+1)}$ を計算。

<2-2> $s = s + 1$ として<1>へ。

<3> $\bar{c}^{(s,t)}$ の計算。

<3-1> $\bar{c}_l^{(s)} = S_m^{(p_{s,t})}(\zeta_l)c_l^{(s)}$, $0 \leq l \leq n_\alpha$, を計算。

<3-2> $\bar{c}^{(s,t)} = (I_m \otimes W(Y_t))([\bar{c}_1^{(s)}]^T, \dots, [\bar{c}_{n_t}^{(s)}]^T)^T$, を計算して終了。

次にこのアルゴリズムに要する計算量を調べる。

3-4節で見たように、滑らかな関数 f に対する、補間 $L^{(p_{s,t})}(R_m(Y_t))f$ の誤差推定は、

高次の補間係数個を使って行える。さらに、これらの補間係数は、 $c_1^{(s)}, \dots, c_{n_t}^{(s)}$ から1個あたり、 n_t 回の乗算数で計算でき、後で述べる全体の計算量に対して無視できる。

さて、アルゴリズム2-7-3とアルゴリズム3-5-2の差は、<3-1>の計算の有無にある。<3-1>は、 mn_t 回の複素乗算で計算される。これと、主張2-7-4より、計算量に関する次の主張を得る。

主張3-5-2: アルゴリズム3-5-1において、最終結果 $\bar{c}^{(s,t)}$, $s \geq 0, 0 \leq t \leq \alpha - 1$, を得るのに要する総関数評価回数は N , 総乗算回数は,

$$\frac{1}{2}N(\log_2 N + 2n_t + 2 - \log_2 n_t), \quad (3-5-3)$$

となる。ここで、 $N = mn_t$ は、 $\bar{c}^{(s,t)}$ の項数である。

4章 関数の対称性と補間

4-1. はじめに

3章では、単位円周上の複素関数にたいする準等間隔標本点上の有限巾級数補間の問題を扱った。それは、複素周期関数に対する、有限Fourier級数補間の問題と等価であった。理論面では、複素周期関数は、おおよそ実周期関数より単純で扱いやすい。しかし、応用面においては、複素周期関数より実周期関数のほうが多く現われるであろう。また、被近似関数が、偶関数や奇関数に限定されることも多い。この章では、被近似関数の実数性や、対称性を考慮した準等間隔標本点上の補間の安定性、収束性と精度について考察する。

複素数体を \mathbf{C} , 実数体を \mathbf{R} , 整数環を \mathbf{Z} として一次元トーラスを、 $\mathbf{T} \equiv \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とかく。混同のない限り、実数 t をそのまま \mathbf{T} の要素とみなして使う。 \mathbf{R} 上で定義された周期 2π の周期関数の問題は、 \mathbf{T} 上の連続関数の問題と等価である。周期 2π の複素連続関数の空間を $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ とかく。 $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ にも一様ノルムをいれる。 $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ の部分空間として、周期 2π の実連続関数全体を $C_{\mathbf{R}}(\mathbf{T})$ とかく。 $C_{\mathbf{R}}(\mathbf{T})$ の要素 F で、 $F(t) = F(-t)$, $t \in \mathbf{T}$, を満たすものを(実)偶関数、 $F(t) = -F(-t)$, $t \in \mathbf{T}$, を満たすものを(実)奇関数とよび、それら全体からなる空間をそれぞれ、 $C_{\mathbf{E}}(\mathbf{T})$, $C_{\mathbf{O}}(\mathbf{T})$ とかく。

1次元トーラス \mathbf{T} は、写像 $t \mapsto e^{it}$ で単位円周 \mathbf{S} と1対1対応する。逆写像は、 $z \mapsto \arg z$ である。この写像により、トーラス \mathbf{T} 上の複素連続関数全体 $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ は、単位円周 \mathbf{S} の複素連続関数全体 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ と写像 $F \mapsto f = F \circ \arg$ で1対1対応する。逆写像は、 $f \mapsto F(t) = f(e^{it})$ である。今、 X を要素数 n の \mathbf{T} の有限部分集合とし、 $Z = \{e^{i\xi} \mid \xi \in X\}$ とする。 Z は、要素数 n の単位円周 \mathbf{S} の有限部分集合である。上の同形写像のもとで、関数 $f(e^{it}) = F(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ の X 上での三角多項式補間

$$F(\xi) = \sum_{k=-p}^{n-p-1} c_k e^{ik\xi}, \quad \xi \in X,$$

の問題は、関数 $f(z) \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ の Z 上での有限巾級数補間

$$f(\zeta) = \sum_{k=-p}^{n-p-1} c_k \zeta^k, \quad \zeta = e^{i\xi}, \quad \xi \in X,$$

の問題と等価である。

トーラス \mathbf{T} 上の等間隔点集合 E_m は

$$E_m := \{2\pi k/m : 0 \leq k < m\}, \quad (4-1-1)$$

で定義され、上の写像 $t \mapsto e^{it}$ で \mathbf{S} 上の等間隔点集合 $U_m \equiv \{z \mid z^m = 1\}$ に対応する。また、

トーラス \mathbf{T} 上の有限集合 X を核とする準等間隔点集合は

$$R_m(X) = \bigcup_{\xi \in X} (E_m + \frac{\xi}{m}), m \geq 1, \quad (4-1-2)$$

で定義され、 Z を核とする \mathbf{S} 上の準等間隔点集合 $R_m(Z)$ と対応する。

関数 F の実数性は f の実数性、 F の偶関数性は f の共役対称性 $f(\bar{z}) = f(z)$ 、 F の奇関数性は f の共役歪対称性 $f(\bar{z}) = -f(z)$ とそれぞれ同値である。この章では、以後、この等価性により $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ における三角多項式補間の問題を、 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ における巾級数補間の問題として取り扱う。同形写像 $F \mapsto f = F \circ \arg$ による、 $C_R(\mathbf{T})$, $C_E(\mathbf{T})$, $C_O(\mathbf{T})$ の像を $C_R(\mathbf{S})$, $C_E(\mathbf{S})$, $C_O(\mathbf{S})$ とかく。上で述べた様に、これらはそれぞれ、単位円周 \mathbf{S} 上の共役対称関数、共役歪対称関数全体からなる $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ の部分空間である。

関数 $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S})$ の形式的な巾級数展開係数を、

$$c_l(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{S}} f(z) z^{-l-1} dz \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-ilt} dt, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad (4-1-3)$$

と定義する。この定義より、すぐに、

$$C_R(\mathbf{S}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}) : c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}, k \in \mathbf{Z}\}, \quad (4-1-4)$$

$$C_E(\mathbf{S}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}) : c_{-k}(f) = c_k(f) \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\}, \quad (4-1-5)$$

$$C_O(\mathbf{S}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}) : c_{-k}(f) = -c_k(f) \in i\mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\}, \quad (4-1-6)$$

がわかる。

2節では、 \mathbf{S} 上の実連続関数の空間 $C_R(\mathbf{S})$ における関数 f の巾級数による補間とその安定性の問題をあつかう。3節では、実連続共役対称関数の空間 $C_E(\mathbf{S})$ 、実連続共役歪対称関数の空間 $C_O(\mathbf{S})$ における関数 f の巾級数補間と安定性について述べる。4節では実連続関数の補間の誤差評価、5節では共役対称関数と共役歪対称関数の誤差評価の問題を扱う。

我々は、以上の各節で、準等間隔標本点集合 $R_m(Z)$ 上の補間の関数空間上の作用素としてのノルム、すなわち Lebesgue 定数が $O(\log m)$ であること、標本値から補間係数への線形変換のノルムが $O(1/\sqrt{m})$ でかつ条件数が一様有界であることをしめす。ただし、有限ベクトル空間のノルムとしてはスペクトルノルムを採用する。最初の事実から、われわれの補間作用素の列が良い安定性、精度、収束性を持つことがわかる。第2の事実からは、補間法の数値的安定性がわかる。さらに、関数の巾級数展開係数と補間係数の関係を明らかにし、実用的な誤差評価式を導く。

6節では、準等間隔標本点上の補間を用いた $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ 上の線形汎関数の近似法とその収束

性を論ずる。7節では、区間 $[-1, 1]$ 上の実関数の Chebyshev 級数補間への応用について述べる。

4-2. 実関数の補間の安定性と収束性

単位円周 \mathbf{S} 上の N 点集合 $Y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ について、関数 $f \in C_R(\mathbf{S})$ の有限巾級数補間 $L_R(Y)f \in C_R(\mathbf{S})$ を、 $C_R(\mathbf{S})$ から $C_R(\mathbf{S})$ のなかへの写像として、次のように構成する。

$$L_R(Y)f(z) \equiv \operatorname{Re}\{L^{(n)}(Y)f(z)\} = \frac{1}{2}\{L^{(n)}(Y)f(z) + \overline{L^{(n)}(Y)f(z)}\}, \quad (4-2-1)$$

と定義する。ここで、 $n = [N/2]$ で、 $[\]$ は Gauss の記号である。

単位円周 \mathbf{S} 上で、 $\bar{z} = z^{-1}$ が成立するから、

$$L^{(n)}(Y)f(z) \equiv z^{-n} L(Y)(z^n f)(z) = \sum_{k=-n}^{N-n-1} c_k z^k, \quad (4-2-2)$$

とおくと、

$$L_R(Y)f(z) \equiv \sum_{k=-n}^n C_k z^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-n}^{N-n-1} c_k z^k + \sum_{k=-n}^{N-n-1} \overline{c_k} z^{-k} \right), \quad (4-2-3)$$

である。関数 f の実数性より、 $L_R(Y)f$ が f の Y 上の補間となっていることは明らかである。

空間 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ から $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ への写像 $f \mapsto z^{\pm n} f$ のノルムは 1 である。また、 $\mathcal{C}(\mathbf{S})$ から $C_R(\mathbf{S})$ への写像 $f \mapsto \operatorname{Re} f$ のノルムもまた 1 である。故に、写像 $L_R(Y)$ の Lebesgue 定数 $\Lambda_R(Y)$ について次の定理が成立する。

定理 4-2-1: 単位円周 \mathbf{S} の任意の有限部分集合 Y について、

$$\Lambda_R(Y) \equiv \|L_R(Y)\| \leq \|L(Y)\| = \Lambda(Y), \quad (4-2-4)$$

が成立する。

集合 Y 上の f の標本値を要素とするベクトル $\mathbf{f} = (f(\eta_1), \dots, f(\eta_N))^T \in \mathbf{R}^N$ から、 $L_R(Y)f$ の係数よりなるベクトル $\mathbf{C} = (C_{-n}, \dots, C_n)^T \in \mathbf{C}^{2n+1}$ への線形変換を $W_R(Y)$;

$$\mathbf{C} = (C_{-n}, \dots, C_n)^T = W_R(Y)(f(\eta_1), \dots, f(\eta_N))^T, \quad (4-2-5)$$

とする。

さて, $\mathbf{f} = (f(\eta_1), \dots, f(\eta_N))^T \in \mathbf{R}^N$ から $L^{(n)}(Y)f$ の係数 $\mathbf{c} = (c_{-n}, \dots, c_{N-n-1})^T \in \mathbf{C}^N$ への

線形変換は $W^{(n)}(Y)|_{\mathbf{R}^N}$ である。したがって, \mathbf{c} から \mathbf{C} への線形変換を $G(Y)$ と定義すれば, $W_R(Y)$ の条件数とノルムについて

$$\text{cond}(W_R(Y)) = \text{cond}(G(Y)W^{(n)}(Y)|_{\mathbf{R}^N}) \leq \text{cond}(G(Y)) \cdot \text{cond}(W(Y)), \quad (4-2-6)$$

$$\|W_R(Y)\| = \|G(Y)W^{(n)}(Y)|_{\mathbf{R}^N}\| \leq \|G(Y)\| \cdot \|W(Y)\|, \quad (4-2-7)$$

が成立する。

標本点数 N の偶奇により分類して線形変換 $G(Y)$ について考察する。

標本点数 N が奇数のときは, $N-n-1=n$ である。関数 f の実数性と $L^{(n)}(Y)f$ の補間条件により,

$$\sum_{k=-n}^n c_k \eta^k = f(\eta) = \overline{f(\eta)} = \sum_{k=-n}^n \overline{c_{-k}} \eta^k, \quad \eta \in Y,$$

となる。多項式補間の一意性より,

$$c_k = \overline{c_{-k}}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4-2-8)$$

を得る。これと, 式(4-2-1)より,

$$C_k = c_k, \quad |k| \leq n, \quad (4-2-9)$$

すなわち, $G(Y) = I_N$ で,

$$\|G(Y)\| = 1, \quad \text{cond}(G(Y)) = 1, \quad (4-2-10)$$

を得る。

標本点数 N が偶数のとき, $N-n-1=n-1$ である。式(4-2-1)より, ベクトル $\mathbf{C} = G(Y)\mathbf{c}$ について,

$$C_n = \frac{1}{2} \overline{c_{-n}}, C_{-n} = \frac{1}{2} c_{-n}, C_k = \frac{1}{2} (c_k + \overline{c_{-k}}), \quad |k| < n, \quad (4-2-11)$$

が成立する。標本点集合 Y を零点とする多項式 $\varphi(Y; z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k z^k$ の係数により, 集合 Y

の関数 $r(Y) = (1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} |\alpha_k|^2)^{1/2}$ を定義する。

関数 f の実数性と $L^{(n)}(Y)f$ の補間条件より,

$$\sum_{k=-n}^{n-1} c_k \eta^k = f(\eta) = \overline{f(\eta)} = \sum_{k=1-n}^n \overline{c_{-k}} \eta^k, \quad \eta \in Y.$$

ゆえに, N 次多項式 $(\sum_{k=-n}^{n-1} c_k z^k - \sum_{k=1-n}^n \overline{c_{-k}} z^k) z^n$ は, $\varphi(Y; z)$ で割り切れ,

$$(\sum_{k=-n}^{n-1} c_k z^k - \sum_{k=1-n}^n \overline{c_{-k}} z^k) z^n = -\overline{c_{-n}} \sum_{k=0}^N \alpha_k z^k,$$

となる。この式の両辺の係数を比較して,

$$c_{-n} = -\alpha_0 \overline{c_{-n}}, \quad c_k - \overline{c_{-k}} = -\alpha_{n+k} \overline{c_{-n}}, \quad |k| < n, \quad (4-2-12)$$

を得る。これより, ベクトル \mathbf{c} のノルムについて,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}\|^2 &= \sum_{k=1-n}^{n-1} |c_k|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1-n}^{n-1} (|c_k + \overline{c_{-k}}|^2 + |c_k - \overline{c_{-k}}|^2) + |c_{-n}|^2 \\ &= \sum_{k=1-n}^{n-1} |c_k|^2 + 2r(Y)^2 (|C_n|^2 + |C_{-n}|^2), \end{aligned}$$

となる。このことより, 線形変換

$$\mathbf{c} \mapsto \mathbf{C}' \equiv (\sqrt{2}r(Y)C_{-n}, C_{1-n}, \dots, C_{n-1}, \sqrt{2}r(Y)C_n)^T,$$

は, ノルムを変えない。また, $r(Y) \geq 1$ であるから, 線形変換 $\mathbf{C}' \mapsto \mathbf{C}$ のノルムは 1, 条件数は $\sqrt{2}r(Y)$ である。以上のことより,

$$\|G(Y)\| = 1, \quad \text{cond}(G(Y)) = \sqrt{2}r(Y). \quad (4-2-13)$$

式(4-2-6, 7), (4-2-10), (4-2-13)より, 次の定理を得る。

定理 4-2-2: 単位円周 S の任意の有限部分集合 Y について,

$$\text{cond}(W_R(Y)) \leq \begin{cases} \sqrt{2}r(Y) \text{cond}(W(Y)) & , |Y| \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{cond}(W(Y)) & , |Y| \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, \quad (4-2-14)$$

$$\|W_R(Y)\| \leq \|W(Y)\|, \quad (4-2-15)$$

が成立する。

条件数が有限であるから, $W_R(Y)$ は 1-1 写像であり, $W_R(Y)\mathbf{R}^N$ は \mathbf{R} 上 N 次元である。式(4-2-7, 8, 10, 11)より, 標本点数 N が奇数のとき,

$$W_R(Y)\mathbf{R}^N = \{(C_{-n}, \dots, C_n)^T \in \mathbf{C}^{2n+1} \mid C_0 \in \mathbf{R}, C_{-k} = \overline{C_k}, 1 \leq k \leq n\}. \quad (4-2-16)$$

標本点数 N が偶数のとき,

$$W_R(Y)R^N = \{(C_{-n}, \dots, C_n)^T \in \mathbf{C}^{2n+1} \mid C_0 \in \mathbf{R}, C_n \in \alpha(Y)\mathbf{R}, C_{-k} = \overline{C_k}, 1 \leq k \leq n\}, \quad (4-2-17)$$

となる. ここで, $\alpha(Y) = \sqrt{-\alpha_0}$, α_0 は多項式 $\varphi(Y; z)$ の第0次係数である.

このことから, $C_R(\mathbf{S})$ の \mathbf{R} 上 N 次元部分空間 $\Pi_N^R(Y)$ を, N が奇数のとき

$$\Pi_N^R(Y) \equiv \left\{ \sum_{k=-n}^n C_k z^k \mid C_0 \in \mathbf{R}, C_{-k} = \overline{C_k}, 1 \leq k \leq n \right\}, \quad (4-2-18)$$

N が偶数のとき,

$$\Pi_N^R(Y) \equiv \left\{ \sum_{k=-n}^n C_k z^k \mid C_0 \in \mathbf{R}, C_n \in \alpha(Y)\mathbf{R}, C_{-k} = \overline{C_k}, 1 \leq k \leq n \right\}, \quad (4-2-19)$$

としたとき, 次の補間の一意性の定理を得る.

定理 4-2-3: $C_R(\mathbf{S})$ の関数 f に対して, 補間条件 $f(\eta) = g(\eta)$, $\eta \in Y$, をみたす $\Pi_N^R(Y)$ の要素 g は一意に決まり, $g = L_R(Y)f$ である.

(証明) $h = L_R(Y)f - g$ は, $\Pi_N^R(Y)$ の要素であるから, その巾級数展開係数を並べたベクトル \mathbf{C} は, $W_R(Y)R^N$ に属する. 補間条件より, $W_R(Y)^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{0}$. したがって, $h = \mathbf{0}$ である. //

この定理は, $\Pi_N^R(Y)$ がHaarの条件を満たすことを示している.

定理4-2-1, 4-2-2と2章の定理2-3-2, 2-4-11より, 実関数族 $C_R(\mathbf{S})$ に対する準等間隔標本点上の有限巾級数補間の安定性について次の定理を得る.

定理 4-2-4: 単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 ν の集合 $Z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ を核とする標本数 $N = m\nu$ の準等間隔標本点 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, について,

$$\Lambda_R(R_m(Z)) \leq \frac{2}{\pi} \Lambda(Z) \log |R_m(Z)| + O(1) = O(\log N), \quad (4-2-20)$$

$$\text{cond}(W_R(R_m(Z))) \leq \sqrt{2} r(Z) \text{cond}(W(Z)) = O(1). \quad (4-2-21)$$

$$\|W_R(R_m(Z))\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \|W(Z)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (4-2-22)$$

この定理により, 補間作用素列 $L_R(R_m(Z))$, $m \geq 1$, が良い安定性をもつこと, また, 有限巾級数 $L_R(R_m(Z))f$ の展開係数も数値的に安定に求めることができることがわかる.

収束性については, 定理3-2-7次の定理を得る.

定理 4-2-5: 実関数 f が, Hölder族 $H_\alpha^k(\mathbf{S})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属するなら,

$$\|f - L_R(R_m(Z))f\| = O(\log nm / (nm)^{k+\alpha}), \quad (4-2-23)$$

が成立する. すなわち, $L_R(R_m(Z))f$, $m \geq 1$, は, $m \rightarrow \infty$ で一様に f に収束する.

(証明) 補間作用素列 $L^{(lm\nu/2)}(R_m(Z))$, $m \geq 1$, は3章2節で述べた意味で準安定で, 定理3-2-7の条件を満たす. したがって, 実関数 $f \in H_\alpha^k(\mathbf{S})$ に対して,

$$\|f - L^{(lm\nu/2)}(R_m(Z))f\| = O(\log nm / (nm)^{k+\alpha}),$$

を得る. f は実関数だから, この式より,

$$\|f - L^{(lm\nu/2)}(R_m(Z))f\| = O(\log nm / (nm)^{k+\alpha}),$$

である. これら2つの式と式(4-2-1)より, 式(4-2-23)を得る. //

4-3. 実共役関数, 実共役歪対称関数の補間の安定性と収束性

この節では, $f \in C_R(\mathbf{S})$ の対称性を利用するために, 単位円周 \mathbf{S} 上の標本点集合 Y を実軸対称とし, その大きさを N とする. また, $n = [N/2]$ とし, 共役対称関数に対する実質的標本点集合を $Y_E := \{\eta \in Y : \text{Im } \eta \geq 0\}$ で定義し, 共役歪対称関数に対する実質的標本点集合を $Y_O := \{\eta \in Y : \text{Im } \eta > 0\}$ と定義する.

関数 f が共役対称ならば, 点 ζ 上の関数値 $f(\zeta)$ さえ求めておけば, 共役点 $\bar{\zeta}$ 上の関数値は, $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$ となるから, 関数計算は, Y_E 上のみで行えば十分である. また, 関数 f が共役歪対称なら, 関数値 $f(\zeta)$ さえ求めておけば, 共役点 $\bar{\zeta}$ の関数値は, $f(\zeta) = -f(\bar{\zeta})$ であるから, さらに $f(1) = f(-1) = 0$ であるから, 関数計算は, Y_O 上のみで行えば十分である. 実質的な標本点集合の要素数は $|Y_E| \leq |Y|/2 + 1$, $|Y_O| \leq |Y|/2$, であるから, 補間に要する関数評価回数をほぼ半減できる.

多項式 $\varphi(Y; z)$ の0次係数 α_0 は, Y の要素すべての積であるからその絶対値は1であ

る. 集合 Y の実軸対称性より, $\varphi(Y; z)$ は実係数であるから, $\alpha_0 = \pm 1$ で, $\alpha(Y)$ は1か虚数単位 i である.

今, $f_N(z) \equiv L_R(Y)f(z) = \sum_{k=-n}^n C_k z^k$ に対し, $g_N(z) \equiv \sum_{k=-n}^n C_{-k} z^k$ とする. 定義式(4-2-18)より, N が奇数のときは, $g_N(z) \in \Pi_N^R(Y)$. また, N が偶数のときも, $\alpha(Z)$ が1か i であるから, 定義式(4-2-19)より, やはり, $g_N(z) \in \Pi_N^R(Y)$ が成り立つ.

関数 f が実共役対称なら,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n C_k \eta^k &\equiv L_R(Y)f(\eta) = f(\eta) \\ &= f(\bar{\eta}) = \sum_{k=-n}^n C_{-k} \eta^k, \eta \in Y \end{aligned}$$

となり, g_N は標本点集合 Y 上で f_N と一致するから, $L_R(Y)f_N(z) = L_R(Y)g_N(z)$.

$\Pi_N^R(Y)$ 上で $L_R(Y)$ は恒等写像であるから, $g_N = f_N$ となる. 両式の係数を比較して,

$$C_{-k} = C_k, |k| \leq n. \quad (4-3-1)$$

また, $\sum_{k=-n}^n C_k z^k \in \Pi_N^R$ より $C_{-k} = \overline{C_k}, |k| \leq n$. したがって,

$$C_k \in \mathbf{R}, |k| \leq n, \quad (4-3-2)$$

である. このことより, $L_R(Y)f \in C_E(\mathbf{S})$ となる.

同様に, 関数 f が実共役歪対称なら $g_N = -f_N$ となり,

$$C_{-k} = -C_k, |k| \leq n, \quad (4-3-3)$$

$$C_k \in i\mathbf{R}, |k| \leq n, \quad (4-3-4)$$

が成立し, $L_R(Y)f \in C_O(\mathbf{S})$ となる.

これより, $L_R(Y)$ の定義域を $C_E(\mathbf{S})$ (または $C_O(\mathbf{S})$)に制限することにより, $C_E(\mathbf{S})$ (または $C_O(\mathbf{S})$)に属す関数の $C_E(\mathbf{S})$ (または $C_O(\mathbf{S})$)の中への補間作用素 $L_E(Y) := L_R(Y)|_{C_E(\mathbf{S})}$

(または $L_O(Y) := L_R(Y)|_{C_O(\mathbf{S})}$)を得る. それらのLebesgue定数を, $\Lambda_E(Y), \Lambda_O(Y)$ とおけば,

$$\Lambda_E(Y) \leq \Lambda_R(Y), \Lambda_O(Y) \leq \Lambda_R(Y),$$

である.

さて, 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合 Z が実軸対称なら, 多項式 $\varphi(Z; z)$ は実係数である. したがって, 多項式 $\varphi(R_m(Z); z) = \varphi(Z; z^m)$ も実係数だから, その根の全体である Z を核とする準等間隔点集合 $R_m(Z)$ も実軸対称である. したがって, 定理4-2-4より直ちに次の定理を得る.

定理4-3-1: 単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 v の実軸対称な集合 $Z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_v\}$ により定義された標本数 $N = mv$ の準等間隔標本点 $R_m(Z)$, $m \geq 1$, について,

$$\Lambda_E(R_m(Z)) \leq \frac{2}{\pi} \Lambda(Z) \log |[R_m(Z)]_E| + O(1) = O(\log N), \quad (4-3-5)$$

$$\Lambda_O(R_m(Z)) \leq \frac{2}{\pi} \Lambda(Z) \log |[R_m(Z)]_O| + O(1) = O(\log N). \quad (4-3-6)$$

単位円周上の対称標本点集合 Y 上の補間作用素 $L_E(Y)$ のLebesgue定数については次の定理が知られている.

定理4-3-2 [Vértesi 1986]: 単位円周 \mathbf{S} 上の実軸対称標本点集合 Y について,

$$\min_{|Y_E|=n} \Lambda_E(Y) = \frac{2}{\pi} \log(n-1) + c_0 + o(1), \quad c_0 = 0.521251\dots, \quad (4-3-7)$$

が成立する.

定理4-3-1とこの定理は, 準等間隔標本点上の共役対称関数の補間が, Lebesgue定数のオーダーにおいて, 最適な補間に等しいことを示す.

単位円周 \mathbf{S} 上の対称標本点集合 Y 上の実関数 $f \in C_R(\mathbf{S})$ の補間の問題を, 実周期関数 $f(e^{it}) \in C_R(\mathbf{T})$ の有限Fourier級数補間の問題として見ておく.

$$f_n(z) = L_R(Y)f(z) = \sum_{k=-n}^n c_k z^k, \quad (4-3-8)$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad -n \leq k \leq n, \quad n = [N/2], \quad N = |Y|,$$

とすると,

$$F_n(t) = f_n(e^{it}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (4-3-9)$$

となる. $F_n(t)$ は, $F(t) = f(e^{it}) \in C_R(\mathbf{T})$ に対する標本点集合 $\arg Y$ 上の有限実Fourier級数補間になっている.

集合 Y が $-1, 1$ のいずれか一方のみを含むときは、 $N = |Y|$ は奇数である。集合 Y が $-1, 1$ の両方を含むときは N は偶数で、 $\alpha(Z)=1$ すなわち $c_n \in \mathbf{R}$ である。また、集合 Y が $-1, 1$ のいずれをも含まないときは、 N は偶数で $\alpha(Z)=i$ すなわち $c_n \in i\mathbf{R}$ である。したがって、

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) + b_n \sin nt & , |Y \cap \{-1, 1\}| = 0, \\ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n(a_k \cos kt + b_k \sin kt) & , |Y \cap \{-1, 1\}| = 1, \\ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a_n \cos nt & , |Y \cap \{-1, 1\}| = 2, \end{cases} \quad (4-3-10)$$

を得る。いずれの場合にも、式(4-3-10)の右辺の係数の個数は、標本点数 N に等しい。

今、 $n_E = |Y_E|$, $n_O = |Y_O|$ 、とすると、式(4-3-10)から、 f が共役対称、すなわち、 $f(e^{it})$ が偶関数のとき、

$$F_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n_E-1} a_k \cos kt, \quad (4-3-11)$$

と、 f が共役歪対称、すなわち、 $f(e^{it})$ が奇関数のとき、

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^{n_O} b_k \sin kt, \quad (4-3-12)$$

となる。いずれの場合も、右辺の係数の個数は、実質的な標本点数 n_E, n_O と一致する。

式(4-3-10, 11, 12)は、三角関数 $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$ を基底とした実周期関数の補間問題に解を与えているといえる。

4-4. 準等間隔標本点上の実関数補間の誤差解析

この節では、単位円周 \mathbf{S} 上の滑らかな実関数 f に関する準等間隔標本点上の補間 $L_R(R_m(Z))f$ の誤差解析について述べる。

$Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\nu\}$ を単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 ν の標本点集合とする。 f の中級数展開

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (4-4-1)$$

は絶対収束すると仮定する。また、整数 $m \geq 1$ に対して、 $N = m\nu, n = [N/2]$ として、

$$L^{(n)}(R_m(Z))f(z) = \sum_{k=-n}^{N-n-1} D_k z^k, \quad (4-4-2)$$

$$L_R(R_m(Z))f(z) = \sum_{k=-n}^n C_k z^k, \quad (4-4-3)$$

とする。式(3-4-13)より、

$$\mathbf{a}^{(\alpha)} := W(Z)\zeta^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z},$$

として、

$$(D_j, \dots, D_{(v-1)m+j})^T = (c_j, \dots, c_{(v-1)m+j})^T + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} c_{am+j} \mathbf{a}^{(\alpha)}, \quad (4-4-4)$$

をえる。

標本点数 N が奇数なら、式(4-2-9)より $C_k = D_k, -n \leq k \leq n, L_R(R_m(Z))f = L^{(n)}(R_m(Z))f$ であるから、この式(4-4-4)より直ちに次の定理を得る。

定理4-4-1: 標本点数 N が奇数のとき補間式 $L_R(R_m(Z))f$ と f の中級数展開係数に次の関係が成立する。

$$(C_j, \dots, C_{(v-1)m+j})^T = (c_j, \dots, c_{(v-1)m+j})^T + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} c_{am+j} \mathbf{a}^{(\alpha)}, \quad (4-4-5)$$

$$-n \leq j < -n + m.$$

また、定理3-4-3と、 $c_{-k} = \bar{c}_k, k \geq 0$ より次の誤差評価の定理を得る。

定理4-4-2: 標本点数 N が奇数のとき、補間式 $L_R(R_m(Z))f$ の誤差のノルムは次の式で評価される。

$$\|L_R(R_m(Z))f - f\| \leq 2(1 + \omega(Z)) \sum_{k > n} |c_k|. \quad (4-4-6)$$

また、補間係数の f の中級数展開係数に対する誤差評価として、

$$\sum_{k=-n}^n |C_k - c_k| \leq 2\omega(Z) \sum_{k > n} |c_k|. \quad (4-4-7)$$

が得られる。不等式(4-4-7)は $m \geq 3$ ならば最良である。

(証明) 不等式(4-4-7)の最良性を除いて、これまでの議論と定理3-4-3より明らかである。

不等式(4-4-7)は、 $m \geq 3$ のときは、 $j = -n + 1$ で最良である。なぜなら、任意の正

数 ε に対して、 $|\mathbf{a}^{(\alpha)}| \geq \omega(Z) + \varepsilon$ なる $\alpha \geq \nu$ をとるとき、関数

$$f(z) = z^{am-n+1} + z^{-am+n-1}, \quad (4-4-8)$$

に対して、

$$L_R(R_m(Z))f = \sum_{k=-n}^n C_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{v-1} \alpha_k^{(\alpha)} z^{km-n+1} + \sum_{k=0}^{v-1} \alpha_k^{(v-\alpha-1)} z^{km-n+m-1},$$

であるが、最右辺の2つの級数の項に共通の中関数は現われないから、式(3-4-6)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n |C_k - c_k| &= \sum_{k=-n}^n |C_k| = \|\mathbf{a}^{(\alpha)}\|_1 + \|\mathbf{a}^{(v-\alpha-1)}\|_1 \\ &= 2\|\mathbf{a}^{(\alpha)}\|_1 \geq 2(\omega(Z) + \varepsilon) = 2\omega(Z) \sum_{k \geq n} c_k + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

となり、改良の余地はない。//

標本点数が偶数のときには、補間係数について次の定理を得る。

定理4-4-3: 標本点数 N が偶数のとき補間式 $L_R(R_m(Z))f$ と f の中級数展開係数に次の関係が成立する。

$$(C_j, \dots, C_{(v-1)m+j})^T = (c_j, \dots, c_{(v-1)m+j})^T + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} c_{\alpha m+j} \mathbf{a}^{(\alpha)}, \quad -n < j < -n + m, \quad (4-4-9)$$

$$\begin{aligned} (C_{-n}, C_{m-n}, \dots, C_{n-m}, C_n)^T &= (c_{-n}, c_{m-n}, \dots, c_{n-m}, c_n)^T \\ &\quad -i\alpha(Z) \operatorname{Im}(\overline{\alpha(Z)c_n}) \alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v < \alpha} c_{\alpha m-n} (S_v^+ \mathbf{a}^{(\alpha)} + S_v^- \mathbf{a}^{(\alpha-1)}). \end{aligned} \quad (4-4-10)$$

ここで、 $S_v^-, S_v^+ : \mathbf{R}^v \rightarrow \mathbf{R}^{v+1}$ は次の式で定義される。

$$S_v^-(x_1, \dots, x_v)^T = (x_1, \dots, x_v, 0)^T,$$

$$S_v^+(x_1, \dots, x_v)^T = (0, x_1, \dots, x_v)^T.$$

また、 $\alpha = -(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_v)^T$ は多項式 $\varphi(Z; z) = \sum_{k=0}^v \alpha_k z^k$ の係数を並べたベクトルである。

(証明) $-n < j < -n + m$ のとき、式(4-2-1)より、

$$C_k = \frac{1}{2}(D_k + \bar{D}_{-k}), \quad n < k < n.$$

また、式(4-4-4)の j に $-(v-1)m-j$ を代入し、3章4節の式(3-4-5)で定義した H_v を両辺に掛けて、

$$(\bar{D}_{-j}, \dots, \bar{D}_{-(v-1)m-j})^T = (\bar{c}_j, \dots, \bar{c}_{(v-1)m+j})^T + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} \bar{c}_{-\alpha m-j} \mathbf{a}^{(\alpha)},$$

を得る。この式と式(4-4-4)を辺々加えて2で割ると、 $c_{-k} = \bar{c}_k, k \geq 0$ より式(4-4-9)を得る。

式(4-4-4)で $j = -n$ とすると、

$$(D_{-n}, \dots, D_{n-m})^T = (c_{-n}, \dots, c_{n-m})^T + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} c_{\alpha m-n} \mathbf{a}^{(\alpha)},$$

となる。両辺に H_v を掛けて、

$$(\bar{D}_{-n+m}, \dots, \bar{D}_{-n})^T = (\bar{c}_{-n+m}, \dots, \bar{c}_{-n})^T + \sum_{\alpha \leq 0 \text{ or } v < \alpha} \bar{c}_{-\alpha m+n} \mathbf{a}^{(\alpha-1)},$$

を得る。式(3-4-4)より、 $C_{-n} = \frac{1}{2} D_{-n}, C_n = \frac{1}{2} \bar{D}_{-n}$ であるから、

$$(C_{-n}, C_{m-n}, \dots, C_n)^T = \frac{1}{2} \{ S_v^-(D_{-n}, \dots, D_{n-m})^T + S_v^+(\bar{D}_{-n+m}, \dots, \bar{D}_{-n})^T \}.$$

以上3つの式より、

$$\begin{aligned} (C_{-n}, C_{m-n}, \dots, C_{n-m}, C_n)^T &= (\frac{1}{2} c_{-n}, c_{m-n}, \dots, c_{n-m}, \frac{1}{2} c_n)^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ c_n S_v^- \mathbf{a}^{(v)} + c_{-n} S_v^+ \mathbf{a}^{(-1)} + \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v < \alpha} c_{\alpha m-n} (S_v^+ \mathbf{a}^{(\alpha)} + S_v^- \mathbf{a}^{(\alpha-1)}) \}. \end{aligned} \quad (4-4-11)$$

を得る。 $\varphi(Z; z) = \sum_{k=0}^v \alpha_k z^k$ の係数により、

$$\mathbf{a}^{(v)} = -(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{v-1})^T, \mathbf{a}^{(-1)} = -(\alpha_1, \dots, \alpha_v)^T / \alpha_0.$$

これより、

$$\begin{aligned} (c_{-n}, 0, \dots, 0, c_n)^T - c_n S_v^- \mathbf{a}^{(v)} - c_{-n} S_v^+ \mathbf{a}^{(-1)} &= (c_{-n} / \alpha_0 + c_n) \alpha \\ &= \alpha(Z) (-\alpha(Z) \bar{c}_n + \overline{\alpha(Z)c_n}) \alpha = 2i\alpha(Z) \operatorname{Im}(\overline{\alpha(Z)c_n}) \alpha. \end{aligned}$$

この式と式(4-4-11)より、式(4-4-10)を得る。//

標本点数 N が偶数のときは、次の補間誤差評価の定理を得る。

定理4-4-4: 標本点数 N が偶数のとき、補間式 $L_R(R_m(Z))f$ の誤差のノルムは次の式で評価される。

$$\|L_R(R_m(Z))f - f\| \leq (1 + \omega(Z)) \{ |\operatorname{Im}(\overline{\alpha(Z)c_n})| + 2 \sum_{k > n} |c_k| \}. \quad (4-4-12)$$

また、補間係数の f の巾級数展開係数に対する誤差評価として、

$$\sum_{k=-n}^n |C_k - c_k| \leq (1 + \omega(Z)) |c_n| + 2\omega(Z) \sum_{k>n} |c_k|, \quad (4-4-13)$$

が得られる。不等式(4-4-13)は、 $m \geq 3$ ならば最良である。

(証明) まず式(4-4-12)を示す。式(4-2-1)より、

$$\begin{aligned} \|L_R(R_m(Z))f - f\| &\leq \left\| \frac{1}{2} [L^{(n)}(R_m(Z))f + \overline{L^{(n)}(R_m(Z))f}] - f \right\| \\ &\leq \|L^{(n)}(R_m(Z))f - f\| \leq (1 + \omega(Z)) |c_n| + 2 \sum_{k>n} |c_k|. \end{aligned} \quad (4-4-14)$$

また、

$$f_n(z) = \sum_{k=1-n}^{n-1} c_k z^k + \operatorname{Re}(\alpha(Z)c_n)(\alpha(Z)z^n + \overline{\alpha(Z)}z^{-n}),$$

とおくと、 $f_n \in \Pi_N^R(Z)$ であるから、 $L_R(R_m(Z))f_n = f_n$ 。ゆえに、

$$\|L_R(R_m(Z))f - f\| = \|L_R(R_m(Z))(f - f_n) - (f - f_n)\|.$$

したがって、

$$f(z) - f_n(z) = \sum_{|k|>n} c_k z^k + i \operatorname{Im}(\alpha(Z)c_n)(\alpha(Z)z^n + \overline{\alpha(Z)}z^{-n}),$$

を式(4-4-14)の f に代入して式(4-4-12)を得る。

次に、不等式(4-4-13)とその最良性を示す。式(4-4-9)と式(3-4-16)より、

$$\sum_{k=0}^{v-1} |C_{km-j} - c_{km-j}| \leq \omega(Z) \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v \leq \alpha} |c_{\alpha m + j}|, \quad -n < j < -n + m, \quad (4-4-15)$$

を得る。また、線形変換 S_v^-, S_v^+ はノルムを変えない。また、 $\|\alpha\|_1 = \|\alpha^{(v)}\|_1 + 1 \leq \omega(Z) + 1$ だから、式(4-4-10)より、

$$\sum_{k=0}^v |C_{km-n} - c_{km-n}| \leq (1 + \omega(Z)) |c_n| + \omega(Z) \sum_{\alpha < 0 \text{ or } v < \alpha} |c_{\alpha m - n}|, \quad (4-4-16)$$

不等式(4-4-15)をすべての j につき辺々加え、それに不等式(4-4-16)を辺々加えて、

$$\sum_{k=-n}^n |C_{km-n} - c_{km-n}| \leq \omega(Z) \sum_{|k| \geq n} |c_k|,$$

を得る。この不等式と $c_{-k} = \bar{c}_k, k \geq 0$, より式(4-4-13)を得る。

不等式(4-4-10)の最良性の証明は、定理4-4-2と同様である。//

関数 f の巾級数展開係数が減衰率 $0 < r < 1$ をもって $|c_k| = |c_{-k}| = O(r^k), k \geq 0$, で減衰するとする。定理4-4-2, 4より、3章と同様にして、補間式と補間係数について、補間係数を用いた次のような誤差評価を得る。

$$\|L_R(R_m(Z))f - f\| \leq \frac{2r(1 + \omega(Z))}{1-r} \sum_{n-l \leq k \leq n} |c_k|. \quad (4-4-17)$$

$$\sum_{k=-n}^n |C_k - c_k| \leq \frac{2r\omega(Z)}{1-r} \sum_{n-l \leq k \leq n} |c_k|. \quad (4-4-18)$$

ここで、式 $A \leq B$ は、 B が A の上界の見積りであることを示す。この2つの評価式において、 l は自然数で通常1か2にとられる。減衰率 r は、2章で述べた方法で見積もられる。

4-5. 実共役対称関数及び実共役歪対称関数の補間の誤差解析

集合 $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_v\}$ を単位円周 \mathbf{S} 上の要素数 v の実軸対称標本点集合とする。自然数 $m \geq 1$ に対して、 $Y = R_m(Z)$, その標本点数を $N = mv$, また $n = [N/2]$ とする。

まず、単位円周 \mathbf{S} 上の滑らかな実共役対称関数 f に関する準等間隔標本点上の補間 $L_E(R_m(Z))f$ の誤差解析について述べる。

関数 f は式(4-4-1)の様に絶対収束する巾級数展開をもつものとする。関数 $f(e^{it})$ は、cosine級数として、

$$f(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt, \quad (4-5-1)$$

と展開される。ここで、記号 \sum' は、初項に $1/2$ を掛けて総和をとることを意味し、

$$a_k = 2c_k \in \mathbf{R}, \quad k \geq 0, \quad (4-5-2)$$

である。実質標本点集合 Y_E は標本点集合 Y の虚部が非負の要素全体であるが、その要素数を n_E とする。関数 f に対する補間巾級数(4-4-3)を

$$L_E(R_m(Z))f(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n_E-1} A_k \cos kt, \quad (4-5-3)$$

$$A_k = 2C_k, \quad 0 \leq k \leq n_E - 1, \quad (4-5-4)$$

で、表現する。

補間 $L_E(Y)f$ について次の誤差評価を得る.

定理 4-5-1: 補間式 $L_E(R_m(Z))f$ の誤差のノルムは次の式で評価される.

$$\|L_E(R_m(Z))f - f\| \leq \begin{cases} (1+\omega(Z))\left(\sum_{k \geq n_E} |a_k|\right) & , Y \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset, \\ (1+\omega(Z))\left(\sum_{k \geq n_E} |a_k|\right) & , Y \cap \{-1, 1\} = \emptyset. \end{cases} \quad (4-5-5)$$

また補間係数の誤差について,

$$\sum_{k=0}^{n_E-1} |A_k - a_k| \leq \begin{cases} \omega(Z)\left(\sum_{k \geq n_E} |a_k|\right) & , Y \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset, \\ \frac{(1+\omega(Z))}{2} |a_{n_E}| + \omega(Z)\left(\sum_{k > n_E} |a_k|\right) & , Y \cap \{-1, 1\} = \emptyset. \end{cases} \quad (4-5-6)$$

を得る. この式は $m \geq 3$ で最良である.

(証明) $Y \supset \{-1, 1\}$ のとき, N は偶数, $n_E = n+1$, $\alpha(Z) = 1$ となるから, 式(4-4-12)より,

$$\|L_E(R_m(Z))f - f\| = \|L_R(R_m(Z))f - f\| \leq (1+\omega(Z))\left(|\operatorname{Im}(c_{n_E-1})| + 2\sum_{k \geq n_E} |c_k|\right).$$

これと式(4-5-2)より, 式(4-5-5)を得る. さらに, 式(4-4-11), (4-5-2, 4)より式(4-5-6)を得る.

Y が -1 か 1 のいずれか一方のみを含むとき, N は奇数, $n_E = n$ となるから, 式(4-4-6)より,

$$\|L_E(R_m(Z))f - f\| = \|L_R(R_m(Z))f - f\| \leq 2(1+\omega(Z))\sum_{k \geq n_E} |c_k|.$$

これと式(4-5-2)より, 式(4-5-4)を得る. また, 式(4-4-7), (4-5-2, 4)より式(4-5-6)を得る.

$Y \cap \{-1, 1\} = \emptyset$ のとき, N は偶数, $n_E = n$, $\alpha(Z) = i$ となるから, 式(4-4-12)より,

$$\|L_E(R_m(Z))f - f\| \leq (1+\omega(Z))\left(|\operatorname{Im}(-ic_{n_E})| + 2\sum_{k > n_E} |c_k|\right).$$

これと式(4-5-2)より, 式(4-5-5)を得る. さらに, 式(4-4-13), (4-5-2, 4)より式(4-5-6)を得る.

式(4-5-6)の最良性は, 式(4-4-8)で定義した関数が共役対称関数であるから, 定理4-4-2の証明がそのまま使える. //

つぎに, 単位円周 S 上の滑らかな実共役歪対称関数 f に関する準等間隔標本点上の補間 $L_E(R_m(Z))f$ の誤差解析について述べる.

関数 f は式(4-4-1)の様に絶対収束する巾級数に展開されているとする. 関数 $f(e^{it})$ は, sine級数として,

$$f(e^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt, \quad (4-5-7)$$

と展開される. ここで,

$$b_k = -2ic_k \in i\mathbf{R}, \quad k \geq 1. \quad (4-5-8)$$

また, Y_O を標本点集合 Y の虚部が正の要素全体, その要素数を n_O とし, 関数 f に対する補間巾級数(4-4-3)を

$$L_O(R_m(Z))f(e^{it}) = \sum_{k=1}^{n_O} B_k \sin kt, \quad (4-5-9)$$

$$B_k = -2iC_k, \quad 1 \leq k \leq n_O, \quad (4-5-10)$$

で, 表現する. 関数 f に対する, 補間 $L_O(Y)f$ について次の誤差評価を得る.

定理 4-5-2: 補間式 $L_O(R_m(Z))f$ の誤差のノルムは次の式で評価される.

$$\|L_O(R_m(Z))f - f\| \leq \begin{cases} (1+\omega(Z))\left(\sum_{k > n_O} |b_k|\right) & , \{-1, 1\} \not\subset Y, \\ (1+\omega(Z))\left(\sum_{k > n_O} |b_k|\right) & , \{-1, 1\} \subset Y. \end{cases} \quad (4-5-11)$$

また補間係数の誤差について,

$$\sum_{k=1}^{n_O} |B_k - b_k| \leq \begin{cases} \omega(Z)\left(\sum_{k > n_O} |b_k|\right) & , \{-1, 1\} \not\subset Y, \\ \frac{(1+\omega(Z))}{2} |b_{n_O+1}| + \omega(Z)\left(\sum_{k > n_O+1} |b_k|\right) & , \{-1, 1\} \subset Y. \end{cases} \quad (4-5-12)$$

を得る. この式は $m \geq 3$ で最良である.

証明は, 定理4-5-1の証明とはほぼ同じである. ただし, 式(4-5-12)の最良性の証明は, 式(4-4-7)の最良性の証明における関数(4-4-8)を歪対称関数

$$f(z) = iz^{\alpha m - n + 1} - iz^{-\alpha m + n - 1}, \quad (4-5-13)$$

で置き換えて行う.

関数 $f(e^{it})$ が偶関数でそのcosine係数が減衰率 $0 < r < 1$ により $|a_k| = O(r^k)$, $k \geq 0$, で減衰するとする. 定理4-5-1より, 3章と同様にして, 補間式と補間係数について, 補間係

数を用いた次のような誤差評価を得る.

$$\|L_E(R_m(Z))f - f\| \leq \frac{r(1+\omega(Z))}{1-r} \sum_{n_E-l \leq k < n_E} |A_k|. \quad (4-5-14)$$

$$\sum_{k=0}^{n_E-1} |A_k - a_k| \leq \frac{r\omega(Z)}{1-r} \sum_{n_E-l \leq k < n_E} |A_k|. \quad (4-5-15)$$

ここでも, 式 $A \leq B$ は, B が A の上界の見積りであることを示す.

関数 $f(e^{it})$ が奇関数でその sine 係数が減衰率 $0 < r < 1$ により $|b_k| = O(r^k)$, $k \geq 1$, で減衰するとする. 定理 4-5-2 より, 補間式と補間係数について, 補間係数を用いた次のような誤差評価を得る.

$$\|L_O(R_m(Z))f - f\| \leq \frac{r(1+\omega(Z))}{1-r} \sum_{n_O-l < k \leq n_O} |B_k|. \quad (4-5-16)$$

$$\sum_{k=1}^{n_O} |B_k - b_k| \leq \frac{r\omega(Z)}{1-r} \sum_{n_O-l < k \leq n_O} |B_k|. \quad (4-5-17)$$

この2つの評価式において, l は自然数で通常 1 か 2 にとられる. 減衰率 r は, 2章で述べた方法で見積もられる.

4-6. 準等間隔標本点上の三角多項式補間による線形汎関数の近似

第2節と同様の仮定のもとに, 線形汎関数 $H: C_R(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{R}$ の近似汎関数 H_m を次のように定義する.

$$H_m(f) \equiv \sum_{k=-n}^n C_k \omega_k, \quad f \in C_R(\mathbf{S}), \quad (4-6-1)$$

ここで, $L_R(R_m(Z))f(z) = \sum_{k=-n}^n C_k z^k$, ω_k はモーメント; $\omega_k \equiv H(z^k)$, $-\infty < k < \infty$, である.

モーメント ω_k を必要なだけ数表としておくか, 逐次それらを求めるアルゴリズムを開発することにより, 式(4-6-1)に依る線形汎関数の近似法は $L_R(R_m(Z))f$ の係数を高速に求めるわれわれの算法の有効な応用となる.

定理 4-6-1: 汎関数 H が,

$$\sigma^2 \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k^2 < \infty, \quad (4-6-2)$$

を満たせば, 任意の $f \in C_R(\mathbf{S})$ について, $m \rightarrow \infty$ で $H_m(f)$ は $H(f)$ に収束する.

(証明) 関数 f を $R_m(Z)$ 上で標本化して並べたベクトルを \mathbf{f}_m とし, $\mathbf{C}_m = (C_{-n}, \dots, C_n)^T$,

$\mathbf{w}_m = (\omega_{-n}, \dots, \omega_n)^T$ とすると, 式(4-2-22)と $\|\mathbf{w}_m\|_2 \leq \sigma$ より,

$$\begin{aligned} |H_m(f)| &\leq \|\mathbf{C}_m\|_2 \|\mathbf{w}_m\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \|W(Z)\|_2 \|f_m\|_2 \sigma \\ &\leq \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \|W(Z)\|_2 \sqrt{mv} \|f_m\|_\infty \leq \sigma \sqrt{v} \|W(Z)\|_2 \|f\|. \end{aligned}$$

ゆえに, 近似汎関数 H_m , $m \geq 1$, のノルムは一様有界である. また,

$$\Pi_N^R(R_m(Z)) \subset \Pi_N^R(R_{m+1}(Z)), \quad m \geq 1,$$

であり, 明らかに

$$H_m(f) = H(f), \quad f \in \Pi_N^R(R_m(Z)), \quad m \geq 1,$$

が成立する. さらに, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi_N^R(R_m(Z))$ は $C_R(\mathbf{S})$ で稠密である. ゆえに, Banach-Steinhaus の定理 [Kantorovich 1982(p.203)] を適用して求める結果を得る. //

式(4-6-2)の条件は, たとえば, 汎関数

$$H(f) \equiv \int_0^{2\pi} f(e^{it}) w(t) dt, \quad (4-6-3)$$

において w が 2 乗可積分であれば満たされる.

Piessens ら [1983] の変形 Clenshaw-Curtis 法は, $[-1, 1]$ 区間の積型積分

$$I(g) \equiv \int_{-1}^1 g(x) \rho(x) dx \quad (4-6-4)$$

に変数変換 $x = \cos t$ をほどこし,

$$\begin{aligned} H(f) &\equiv \int_0^{2\pi} f(e^{it}) w(t) dt \\ &= \int_0^\pi g(\cos t) \rho(\cos t) \sin t dt \equiv I(g), \end{aligned}$$

に対して式(4-6-1)の近似法を適用したものと等価である. ここで, $f(e^{it}) = g(\cos t)$,

$$w(t) = \begin{cases} \rho(\cos t) \sin t & , 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & , \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

である。Piessensらは等間隔標本点を用いているが、長谷川ら[1984a]は準等間隔標本点を用いてこの方法の効率化を達成した。等間隔標本点を用いた変形Clenshaw-Curtis法の収束についてはSloanら[1978]の研究がある。彼等は、重み関数 ρ が $L_p[-1,1]$, $p > 1$, に属するなら、式(4-6-4)の積型積分に対する変形Clenshaw-Curtis法が収束することを示した。我々の定理4-6-1を、準等間隔標本点を用いた変形Clenshaw-Curtis法変形Clenshaw-Curtis法に適用した結果は、Sloanらの結果より弱いものとなっているが、長谷川らの方法が、標本点選択の自由度を増して、なおかつ広いクラスの重み $\rho(x)$ をもつ積型積分に対して収束することを保証している。

4-7. 区間 $[-1, 1]$ の実関数のChebyshev級数補間

1次元トーラス \mathbf{T} 上の閉区間 $[0, \pi]$ は、写像 $t \mapsto \cos t$ で実軸の閉区間 $[-1, 1]$ と1対1対応する。この写像により、1次元トーラス \mathbf{T} 上の実偶関数全体 $C_E(\mathbf{T})$ は、区間 $[-1, 1]$ の連続関数全体 $C[-1, 1]$ と写像 $f \mapsto f \circ (\cos^{-1})$ で1対1対応する。ここで、 \cos^{-1} は主値として $[0, \pi]$ の値をとるものとする。この写像によって、空間 $C_E(\mathbf{T})$ の基底 $\{\cos kt\}_{k \geq 0}$ は $C[-1, 1]$ の基底 $\{\cos k(\cos^{-1}x)\}_{k \geq 0}$ に対応する。

$$T_k(x) := \cos k(\cos^{-1}x), \quad k \geq 0, \quad (4-7-1)$$

は k 次多項式で、Chebyshev多項式とよばれている[Rivlin 1974].

上の対応関係から、Chebyshev多項式を基底とする $C[-1, 1]$ の関数の級数展開及び補間が、cosine関数を基底とする $C_E(\mathbf{T})$ の関数の級数展開及び補間と同様良好な性質を持つことがわかる。例えば、関数 $f \in C[-1, 1]$ に対するChebyshev展開は、

$$f(x) \sim \sum_{k \geq 0} a_k T_k(x), \quad (4-7-2)$$

$$a_k := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k \geq 0, \quad (4-7-3)$$

で定義される。式(4-7-2)の右辺の級数の部分和を、

$$s_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(x), \quad (4-7-4)$$

とし、関数 $f \in C[-1, 1]$ に対する $n-1$ 次多項式の最良近似度を $E_n(f)$ とすると、

$$E_n(f) \leq \|s_n(f) - f\| \leq 4\left(1 + \frac{1}{\pi^2} \log(n-1)\right) E_n(f), \quad (4-7-5)$$

が成立する[Rivlin 1974(p.134)]. 最良近似度 $E_n(f)$ についての次の定理は、関数 f が滑らかであるほどそのChebyshev級数展開が速く f に収束することを示す。引用は[Meinardus 1967(p.57)].

定理 4-7-1 [Jackson 1930] : f がHölder族 $H_\alpha^k[-1,1]$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, に属するなら、

$$E_n(f) = O(n^{-k-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4-7-6)$$

が成立する。

Hölder族 $H_\alpha^k[-1,1]$ は、 k 回連続微分可能で、 $f^{(k)} \in \text{Lip}_M \alpha$ を満たす関数 $f \in C[-1,1]$ 全体である。

Chebyshev展開係数については、次の2つの定理が成り立つ[Rivlin 1974(p.139, 143)].

定理 4-7-2 : 関数 $f \in C[-1, 1]$ に対する $n-1$ 次多項式の最良近似度を $E_n(f)$ とすると、

$$|a_n| \leq \frac{4}{\pi} E_n(f), \quad n > 0, \quad (4-7-7)$$

が成立する。

定理 4-7-3 : 実数 $\rho > 1$ に対して、複素平面上の $-1, 1$ を焦点とする長軸、短軸の長さがそれぞれ $2(\rho+1)/\rho$, $2(\rho-1)/\rho$ の楕円の内部を C_ρ とする。 f が C_ρ で解析的なら、

$$|a_n| \leq 2\rho^{-n} \max_{z \in C_\rho} |f(z)|, \quad (4-7-8)$$

が成り立つ。

これらの定理と1章3節の議論より、滑らかな関数に対するChebyshev多項式を基底

とする補間の有効性がわかる。

この節の初めに述べた対応関係から、Chebyshev多項式補間の精度と安定性及びアルゴリズムは、これまでに述べたcosine級数補間における結果に完全に帰着する。関数 $f \in [-1, 1]$ に対する区間 $[-1, 1]$ 上の n 点集合 X を標本点集合とするChebyshev級数補間の係数 $C_k, 0 \leq k < n$, を決定する補間条件

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k T_k(\xi), \quad \xi \in X, \quad (4-7-9)$$

は、 $F(t) = f(\cos t) \in C_E(\mathbf{T})$ に対して、 $T = \cos^{-1}X$ 上のcosine級数補間の係数を決定する補間条件

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cos k\tau, \quad \tau \in T, \quad (4-7-10)$$

とまったく等しいからである。

このようにして、われわれの準等間隔標本点集合と、それによる再利用可能標本点集合上の高速補間法は、そのまま区間 $[-1, 1]$ の実関数の安定で精度の高いChebyshev級数補間の算法としても使える。

5章 対称関数のための高速補間アルゴリズム

5-1. はじめに

4章では、単位円周 \mathbf{S} 上の実関数、実共役対称関数、実共役歪対称関数の巾級数補間の安定性、収束性、誤差解析及び計算法の問題を、複素関数の巾級数補間の問題に帰着させて論じた。

電子計算機の上では、1個の複素数は実部と虚部の2個の実数データの組として表わされる。実関数の標本点集合上の標本値はもちろん実数であり、4章で述べた様に、その巾級数補間係数は、共役対称性を持っており、標本値と補間係数の双方において実質的なデータの個数は一般の複素関数の巾級数補間の場合の半分である。さらに、標本点集合が実軸対称であれば、実関数が共役対称性、共役歪対称性をもつとき、巾級数補間係数はそれぞれ実数、純虚数となり、標本値と補間係数の双方において実質的なデータ個数はさらに半減する。

FFTは、等間隔標本点上で複素関数 f の巾補間係数を高速かつ安定に求める算法であり、一般には高速性を重視して、標本点数が2の巾乗の基数2のFFTがよく用いられる。上で述べた性質を利用して、関数 f が実関数の場合には、計算量と記憶容量を半減する実FFTの算法[Bergland 1968b]が知られている。実共役対称関数、実共役歪対称関数に対しては、計算量と記憶容量をさらに半減する算法が知られている[Cooley 1970, 鳥居 1974a]。これら等間隔標本点上の対称関数の補間アルゴリズムは、鳥居[1974b]により集大成されている。Swarztrauber[1985]は、独自にこれらを系統化している。

この章の目的は、準等間隔標本点上の巾級数補間の問題において、同様の目標を達成するアルゴリズムを構成することである。

記述を簡単にするために、この章では単位円周 \mathbf{S} 上の実関数の有限巾級数補間の問題を、それと等価な周期 2π の実連続関数 $f \in C_R(\mathbf{T})$ の有限Fourier級数補間あるいは三角多項式補間の問題として扱う。したがって、実共役対称関数、実共役歪対称関数の補間問題は $C_R(\mathbf{T})$ の偶関数、奇関数の補間問題として扱う。

単位円周 \mathbf{S} 上の点 z は1次元トーラス $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ の点 $\arg z$ と1対1に対応し、その逆写像は、 $t \mapsto e^{it}$ である。これらの写像で、単位円周 \mathbf{S} 上の等間隔集合 U_n は1次元トーラス \mathbf{T} 上の要素数 n の集合 $E_n := \{2\pi l/n : 0 \leq l < n\}$ に対応する。この E_n を1次元トーラス \mathbf{T} 上の等間隔集合と呼んだ。要素数 n の \mathbf{T} の部分集合を T とし、

$$R_M(T) = \bigcup_{k=1}^{\kappa} (E_M + \frac{\tau}{M}k), M \geq 1, \quad (5-1-1)$$

を \mathbf{T} を核とする準等間隔集合とよんだ. 準等間隔集合 $R_M(T)$ は要素数 κ の \mathbf{S} の部分集合 $Z = \exp(iT)$ を核とする準等間隔標本点集合 $R_M(Z)$ の $z \mapsto \arg z$ による像である.

集合 $R_M(T)$ は, いくつかの, 要素数 M で位相の異なる等間隔集合の和集合である. 我々の準等間隔集合 $R_M(T)$ 上の三角多項式補間法は, 従来の実FFTの算法の基本的な考え方の自然な拡張になっており, $N \log_2 N + O(N)$ 回の実乗算で計算できる. ここで, N は, 標本点数 κM である.

この章は, 以下のように構成されている. 2節では, 三角多項式補間のLagrange補間形式を導入する. 3節では, それを用いた実周期関数の高速補間法のアルゴリズムを構成する. 4節では, 3節の結果を用いて実偶関数, 実奇関数のための高速補間法アルゴリズムを構成する. 5節では, 逆変換, すなわちFourier級数を準等間隔点集合のすべての点で同時に求めるための高速アルゴリズムについて述べる. 6節では, トーラス \mathbf{T} 上の再利用可能標本点集合列について述べる. 7節では, 具体的にアルゴリズムを構成し, それによる数値実験結果を示す.

5-2. 実周期関数のLagrange補間

この節では, 周期 2π の実周期関数 f の三角多項式補間をLagrange補間の形式で記述し, その特性を調べる.

この論文では, e^{ikt} , $k \in \mathbf{Z}$, を複素周期関数族 $\alpha(\mathbf{T})$ の基底とし, 周期関数をこの基底で展開したものを, フーリエ展開の標準型とする. その係数は, 断わらない限り複素数である. また, n 次の実三角多項式を,

$$g(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}, c_0 \in \mathbf{R}, \quad (5-2-1)$$

の形式で級数表現する. ここで, Σ'' は, 初項と末項を $1/2$ 倍して総和することを意味する.

本論文では, 我々の算法で重要となる, 標本点数が偶数の場合に限定して考察する. 1次元トーラス \mathbf{T} 上の大きさ $N = 2n$ の標本点集合を U とする. 記述を簡単にするために, 倍周期三角関数,

$$s(t) := \sin \frac{t}{2}, c(t) := \cos \frac{t}{2}, \quad (5-2-2)$$

を定義して, U 上の三角多項式補間の基本多項式を,

$$w(U, \vartheta; t) := \left\{ \prod_{\varphi \in U - \{\vartheta\}} \frac{s(t - \varphi)}{s(\vartheta - \varphi)} \right\} c(t - \vartheta), \vartheta \in U, \quad (5-2-3)$$

と定義する. 関数 $w(U, \vartheta; t)$, $\vartheta \in U$, は, 式(5-2-2)で定義された倍周期三角関数の, 偶数個の積の実数倍であるから, 周期 2π の n 次実三角多項式であり,

$$w(U, \vartheta; \vartheta) = 1, w(U, \vartheta; \varphi) = 0, \varphi \in U - \{\vartheta\}, \quad (5-2-4)$$

が成立する. 以上により, 周期 2π の実周期関数 f に対して,

$$L(U)f(t) := \sum_{\vartheta \in U} w(U, \vartheta; t) f(\vartheta), \quad (5-2-5)$$

は, f の U 上の n 次実三角多項式補間である.

この三角多項式の最高次の係数を調べてみる. 各 $\vartheta \in U$ について,

$$w(U, \vartheta; t) = \frac{e^{i(t-\vartheta)/2} + e^{-i(t-\vartheta)/2}}{2} \prod_{\varphi \in U - \{\vartheta\}} \frac{e^{i(t-\varphi)/2} - e^{-i(t-\varphi)/2}}{2is(\vartheta - \varphi)},$$

であるから, その e^{int} の係数を $w_{\vartheta, n}$ とすると,

$$w_{\vartheta, n} = \left(\prod_{\varphi \in U - \{\vartheta\}} 2s(\vartheta - \varphi) \right)^{-1} (-i)^{2n-1} \prod_{\varphi \in U} e^{-i\varphi/2},$$

すなわち,

$$w_{\vartheta, n} \in \alpha(U)\mathbf{R}, \vartheta \in U, \alpha(U) := (-1)^{n+1} i \prod_{\varphi \in U} e^{-i\varphi/2}, \quad (5-2-6)$$

である. 式(5-2-5)で, $f(\vartheta) \in \mathbf{R}, \vartheta \in U$, であるから, U 上の三角補間多項式 $L(U)f$ の e^{int} の係数は $\alpha(U)\mathbf{R}$ に属する. したがって,

$$L(U)f(t) \in \Pi(U) := \left\{ \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt} \mid c_0 \in \mathbf{R}, c_n \in \alpha(U)\mathbf{R} \right\}, \quad (5-2-7)$$

を得る.

これを4章の中級数補間と比べて見よう. $Y = \exp(iU) \in \mathbf{S}$ とすると, この節の仮定より, その要素数 N は偶数であるから, 実関数の Y 上の中級数補間は,

$$\begin{aligned} \Pi_N^R(Y) &= \left\{ \sum_{k=-n}^n C_k z^k : C_0 \in \mathbf{R}, C_n \in \alpha(Y)\mathbf{R}, C_{-k} = \overline{C_k}, 1 \leq k \leq n \right\} \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k z^k \mid c_0 \in \mathbf{R}, c_n \in \alpha(Y)\mathbf{R} \right\}, \end{aligned}$$

にはいる. ここで, $\alpha(Y) = \sqrt{-\alpha_0}$ であり, α_0 は多項式 $\varphi(Y; z)$ の第0次係数で, 要素数 N が偶数であるから, Y の要素すべての積である. このことより, $\alpha(Y)$ は符号を除いて

$\alpha(U)$ と一致し, $C_R(\mathbf{S})$ から $C_R(\mathbf{T})$ への同型写像 $t: f(z) \mapsto F(t) = f(e^{it})$ によって,

$$\Pi(U) = i\Pi_N^R(Y), \quad (5-2-8)$$

となる. これと補間の一意性の定理4-2-3より, 任意の $f \in C_R(\mathbf{S})$ と $F(t) = f(e^{it}) \in C_R(\mathbf{C})$ について,

$$L(U)F(t) = L_R(Y)f(e^{it}), \quad (5-2-9)$$

を得る.

さて, 我々の定義(5-2-5)が, 従来の離散型実フーリエ展開の拡張となっていることを示すために, U を等間隔標本点 $E_N + \tau/N$ にとってみる. この場合,

$$\begin{aligned} \alpha(E_N + \frac{\tau}{N}) &= (-1)^{n+1} i \prod_{l=0}^{N-1} e^{-i(\frac{\pi l}{n} + \frac{\tau}{N})/2} \\ &= (-1)^{n+1} i e^{-i(n-1/2)\pi - i\tau/2} = e^{-i\tau/2}, \end{aligned} \quad (5-2-10)$$

である.

実FFTは, 実周期関数 f の E_N 上の三角多項式補間 f_n を,

$$f_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{1}{2}a_n \cos nt,$$

の形式で求める高速算法である. ここで, $a_k, 0 \leq k \leq n, b_k, 1 \leq k \leq n-1$, は実数である.

$\tau \neq 0$ のときは, 関数 $f(t + \tau/N)$ を E_N 上で離散型実フーリエ展開して, $f_n(t + \tau/N)$ とする.

すなわち,

$$f_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos k(t - \frac{\tau}{N}) + b_k \sin k(t - \frac{\tau}{N})) + \frac{1}{2}a_n \cos n(t - \frac{\tau}{N}),$$

である. これを, 基底, $\{1, \cos t, \dots, \cos nt, \sin t, \dots, \sin nt\}$ で展開し, 展開係数を求める.

さらに, これを, 基底 $\{e^{ikt}\}_{-n \leq k \leq n}$ で展開すれば, その e^{int} の係数 c_n は,

$$c_n = \frac{1}{2}a_n e^{-i\tau/2} \in \alpha(E_N + \frac{\tau}{N})\mathbf{R},$$

を満たす. したがって, $f_n \in \Pi(E_N + \tau/N)$ が成立して, 補間の一意性の定理4-2-3より,

$f_n = L(E_N + \tau/N)f$ となる. すなわち, 等間隔標本点 $U = E_N + \tau/N$ をとれば, 我々の実離散型フーリエ変換は従来のものと一致する.

5-3. 準等間隔標本点上の高速算法

この節では, 定められた $T = \{\tau_k\}_{k=1}^{\kappa} \subset \mathbf{T}, \kappa \geq 1$, について, 式(5-1-1)で定義された準等間隔標本点集合 $R_M(T)$ 上の三角多項式補間の算法を構成する. M は2の巾で2以上の整数とする. $\mu = M/2$ として,

$$\begin{cases} E_{M,k} := E_M + \frac{\tau_k}{M} = \{u_{m,k}\}_{m=0}^{M-1}, \\ u_{m,k} := \frac{\pi m}{\mu} + \frac{\tau_k}{M}, \\ w_{m,k}(t) := w(R_M(T), u_{m,k}; t), \quad 0 \leq m \leq M-1, 1 \leq k \leq \kappa, \end{cases}$$

と定義すると, 定義式(5-2-3)より,

$$\begin{aligned} w_{m,k}(t) &= \left\{ \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \prod_{l=0}^{M-1} \frac{s(t - \frac{\pi l}{\mu} - \frac{\tau_j}{M})}{s(\frac{\pi m}{\mu} + \frac{\tau_k}{M} - \frac{\pi l}{\mu} - \frac{\tau_j}{M})} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{l=0, l \neq m}^{M-1} \frac{s(t - \frac{\pi l}{\mu} - \frac{\tau_k}{M})}{s(\frac{\pi m}{\mu} - \frac{\pi l}{\mu})} \right\} c(t - \frac{\pi m}{\mu} - \frac{\tau_k}{M}) \\ &= \left\{ \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \prod_{l=0}^{M-1} \frac{s(t - \frac{\pi l}{\mu} - \frac{\tau_j}{M})}{s(\frac{\pi m}{\mu} + \frac{\tau_k}{M} - \frac{\pi l}{\mu} - \frac{\tau_j}{M})} \right\} w(E_{M,k}, u_{m,k}; t), \end{aligned}$$

となる. したがって, 公式

$$\prod_{l=0}^{n-1} \sin(x - \frac{\pi l}{n}) = (-\frac{1}{2})^{n-1} \sin nx, \quad n \geq 1,$$

$$\sin(x + \pi m) = (-1)^m \sin x, \quad m \in \mathbf{Z},$$

より,

$$w_{m,k}(t) = W_k(\mu t) (-1)^{(\kappa-1)m} w(E_{M,k}, u_{m,k}; t), \quad (5-3-1)$$

$$0 \leq m \leq M-1, 1 \leq k \leq \kappa,$$

を得る. ここで,

$$W_k(t) := \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \frac{s(2t - \tau_j)}{s(\tau_k - \tau_j)}, 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-2)$$

である。以上により、

$$L(R_m(T))f(t) = \sum_{k=1}^{\kappa} W_k(\mu t) \sum_{m=0}^{M-1} w(E_{M,k}, u_{m,k}; t) (-1)^{(\kappa-1)m} f(u_{m,k}), \quad (5-3-3)$$

となる。したがって、 T の要素数 κ が奇数のときは、

$$L(R_m(T))f(t) = \sum_{k=1}^{\kappa} W_k(\mu t) L(E_{M,k})f(t), \quad (5-3-4)$$

T の要素数 κ が偶数のときは、 $t \in E_{M,k}$, $m \in \mathbf{Z}$ のとき、 $\cos(\mu t - \tau_k/2) = (-1)^m$ であるから、

$$L(R_m(T))f(t) = \sum_{k=1}^{\kappa} W_k(\mu t) L(E_{M,k}) \left\{ \cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) f(t) \right\}, \quad (5-3-5)$$

が得られる。

ここで、

$$L(E_{M,k})f(t) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} C_{k,j} e^{ijt}, 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-6)$$

$$L(R_M(T))f(t) = \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\kappa\mu} c_l e^{ilt}, \quad (5-3-7)$$

とおく。 M は 2 の巾だから、式(5-3-6)の $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$, $1 \leq k \leq \kappa$ は、各 k につき、基数 2 の実FFTで求められ、その計算に要する実乗算の総数 m_{FFT} は、

$$m_{\text{FFT}} = \kappa(M \log_2 M + O(M)) = N \log_2 N + O(N), \quad (5-3-8)$$

である。ここで $N = \kappa M$ は標本点数である。

次に、式(5-3-4), (5-3-5)により、 $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$, $1 \leq k \leq \kappa$ から、 $L(R_M(T))f$ の係数 c_l , $0 \leq l \leq \kappa\mu$ の係数を合成する算法を示そう。

5-3.1 κ が奇数のときの合成則

式(5-3-2)の $W_k(t)$, $1 \leq k \leq \kappa$ は、

$$s(2t - \tau_j) = \frac{e^{-i\tau_j/2}}{2i} e^{it} - \frac{e^{i\tau_j/2}}{2i} e^{-it}, 1 \leq j \leq \kappa, \quad (5-3-9)$$

の偶数個の積の実数倍であるから、

$$W_k(t) = w_{k,0} + \sum_{l=1}^{(\kappa-1)/2} (w_{k,l} e^{2ilt} + w_{k,l} e^{-2ilt}), 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-10)$$

とかける。式(5-3-6), (5-3-10)を式(5-3-4)に代入して、求める結果

$$\begin{cases} c_{2l\mu+j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} C_{k,j}, & 0 \leq j \leq \mu-1, 0 \leq l \leq (\kappa-1)/2, \\ c_{2l\mu+\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\kappa} (w_{k,l} C_{k,\mu} + w_{k,l+1} \overline{C_{k,\mu}}), & 0 \leq l \leq (\kappa-3)/2, \\ c_{2l\mu-j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \overline{C_{k,j}}, & 1 \leq j \leq \mu-1, 1 \leq l \leq (\kappa-1)/2, \\ c_{\kappa\mu} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,(\kappa-1)/2} C_{k,\mu} \end{cases} \quad (5-3-11)$$

を得る。

5-3.2 κ が偶数のときの合成則

式(5-3-2)の $W_k(t)$, $1 \leq k \leq \kappa$ は、式(5-3-9)の $s(2t - \tau_j)$, $1 \leq j \leq \kappa$ の奇数個の積の実数倍であるから、

$$W_k(t) = \sum_{l=0}^{\kappa/2-1} (w_{k,l} e^{i(2l+1)t} + w_{k,l} e^{-i(2l+1)t}), 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-12)$$

とかける。式(5-2-8)より、

$$\alpha_k := e^{-i\tau_k/2} = \alpha(E_{M,k}), 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-13)$$

とすると、

$$\begin{cases} \cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) = \frac{1}{2} \alpha_k e^{i\mu t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{-i\mu t}, & 1 \leq k \leq \kappa, \\ e^{\pm iMt} = \alpha_k^{\mp 2}, & t \in E_{M,k}. \end{cases}$$

であるから、 $t \in E_{M,k}$, $1 \leq k \leq \kappa$ で、

$$\cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) e^{ijt} = \frac{1}{2} \alpha_k e^{i(j+\mu)t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t}$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_k \alpha_k^{-2} e^{i(j-\mu)t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t} \\ = \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t}, 0 \leq j \leq \mu,$$

同様に,

$$\cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) e^{-ijt} = \alpha_k e^{i(\mu-j)t}, 0 \leq j \leq \mu,$$

となる。これと、式(5-3-6)より、 $1 \leq k \leq \kappa$ で、

$$\cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) f(t) = \cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) L(E_{M,k}) f(t) \\ = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_k \overline{C_{k,\mu-j}} e^{ijt}, t \in E_{M,k}.$$

$C_{k,0} \in \mathbf{R}$ より、この式の最右辺の級数の $e^{i\mu t}$ の係数 $\alpha_k \overline{C_{k,0}}$ は $\alpha_k \mathbf{R}$ に属す。したがって、この級数は $\Pi(E_{M,k})$ に属し、補間の一意性より、

$$L(E_{M,k}) [\cos(\mu t - \frac{\tau_k}{2}) f(t)] = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_k \overline{C_{k,\mu-j}} e^{ijt}, 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-3-14)$$

である。式(5-3-6)、(5-3-14)を式(5-3-5)に代入して、結局、

$$\begin{cases} c_0 &= \sum_{k=1}^{\kappa} \operatorname{Re}(w_{k,0} \overline{\alpha_k}) C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \overline{\alpha_k} C_{k,j}, \quad 1 \leq j \leq \mu, \quad 0 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{2l\mu-j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \alpha_k \overline{C_{k,j}}, \quad 0 \leq j \leq \mu-1, \quad 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\kappa} (w_{k,l} \overline{\alpha_k} + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, \quad 1 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{\kappa\mu} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}. \end{cases} \quad (5-3-15)$$

を得る。

標本点数を $N = \kappa M$ とおくと、式(5-3-11)の右辺の計算には、複素乗算が総計 $\kappa N/2 + O(1)$ 回必要である。また、式(5-3-15)の右辺も、

$$w_{k,l} \alpha_k, w_{k,l} \overline{\alpha_k}, 0 \leq l \leq \mu, 1 \leq k \leq \kappa/2-1, \text{をあらかじめ計算しておけば、} \kappa N/2 + O(1)$$

回の複素乗算で計算できる。したがって、 $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$ から、 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$ を合成するのに要する実乗算回数 m_{syn} は、 κ の偶奇によらず

$$m_{\text{syn}} = 2\kappa N + O(1), \quad (5-3-16)$$

である。これと式(5-3-8)より、我々の算法に要求される実乗算回数 m_{total} は、

$$m_{\text{total}} = m_{\text{FFT}} + m_{\text{syn}} = N \log_2 N + O(N), \quad (5-3-17)$$

であり、通常の等間隔標本点上の実FFTの計算量とはほぼ等しい。

標本点数が N 個の三角多項式補間法を、簡単に N 点則と呼ぶことにしよう。我々の算法では、 $L(R_{2^m}(T))f$ の係数を計算する $\kappa 2^m$ 点則を、合成則(5-3-11)、(5-3-15)により、

$L(E_{2^m + \tau_k / 2^m})f, 1 \leq k \leq \kappa$ の係数を求める κ 個の等間隔 2^m 点則の問題に簡約した。

今まで記述してきた算法では、これを既成の基数2の実FFTにゆだねた。しかし、

$$E_{2^m + \frac{\tau}{2^m}} = (E_{2^{m-1} + \frac{\tau}{2^m}}) \cup (E_{2^{m-1} + \frac{\tau}{2^m} + \frac{\pi}{2^{m-1}}}) \\ = R_{2^{m-1}}(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} + \pi),$$

であるから、この κ 個の 2^m 点則は、合成則(5-3-15)を介して、 2κ 個の 2^{m-1} 点則に簡約される。この操作を繰り返して、結局、 $\kappa 2^m$ 点則は、 $2^{m-1} \kappa$ 個の 2 点則に帰着される。すなわち、 $2^{m-1} \kappa$ 個の 2 点則を、簡約の操作を逆にたどって合成して $\kappa 2^m$ 点則を得る。ここで、 $\kappa=1, T=\{0\}$ としたものは基数2の実FFTと一致する。

5-4. 偶関数と奇関数のための高速補間アルゴリズム

単位円周 \mathbf{S} 上の実軸対称集合 Z により定義された $T = \arg Z$ を1次元トーラス \mathbf{T} 上の対称集合とよぶ。 T が対称ならによる準等間隔集合 $R_M(T)$ も対称である。 T が対称であることと、 $t \in T \Rightarrow -t \in T$ であることは同値である。

この節では、対称な T を核とする準等間隔標本点集合 $R_M(T)$ 上における偶関数と奇関数の高速Fourier級数補間のアルゴリズムについて述べる。

等間隔集合で対称となるものは、 E_M と $E_M + \pi/M$ に限られる。これらの上の偶関数、奇関数の有限Fourier級数補間のアルゴリズムは、[Cooley1970, 鳥居1974a]などにより開発され、標本点上の関数値から係数の計算と、その逆変換である係数から標本点上の関数値の計算に要する演算量は、それぞれ実乗算で $\frac{1}{2} M \log M + O(M)$ 回である。

$T - \{0, \pi\} = \emptyset$ であるなら、 $R_M(T)$ は等間隔だから、新たな考察を必要としない。今、 $\tau \in T - \{0, \pi\}$ と T 上の関数 f に対して、

$$L(E_M + \tau/M)f(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\mu} C_k e^{ikt}, \quad \mu = M/2, \quad (5-4-1)$$

とする. f が偶関数のときは, 補間条件

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\mu} C_k e^{ik\theta} = f(\vartheta), \quad \vartheta \in E_M + \tau,$$

より,

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\mu} \bar{C}_k e^{ik\theta} = f(\vartheta), \quad -\vartheta \in E_M + \tau,$$

を得る. これより,

$$L(E_M - \tau/M)f(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\mu} \bar{C}_k e^{ikt}. \quad (5-4-2)$$

関数 f が奇関数のばあいも, 同様にして,

$$L(E_M - \tau/M)f(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\mu} -\bar{C}_k e^{ikt}, \quad (5-4-3)$$

を得る. このことは, 3節で構成したアルゴリズムにおいて, $\tau_k \neq 0, \pi$ であるなら,

$\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$ さえ求めれば, 対称点 $\tau_k \cdot = -\tau_k$ に対応する $\{C_{k',j}\}_{j=0}^{\mu}$ は求める必要がないというを示している.

最初で述べた様に, $\tau_k = 0, \pi$ なら $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$ は, 実乗算 $\frac{1}{2}M \log M + O(M)$ 回で求めることができる. ここで, $\beta = |T \cap \{0, \pi\}|$ とおくと, 3節のアルゴリズムで, 標本値から

$\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 0 \leq k \leq \kappa$, を求める部分の総乗算回数は,

$$m_{\text{FFT}} = \frac{\kappa - \beta}{2} M \log_2 M + \beta \frac{1}{2} M \log_2 M + O(M) = \frac{1}{2} N \log_2 N + O(N), \quad (5-4-4)$$

に減少する.

次に, T の対称性を考慮して, $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$, から, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$, を合成する算法を示そう.

4-5.1 κ が奇数のときの合成則

標本点集合 T の対称性より, κ が奇数のときは, T は 0 か π のいずれか一方のみを含み, $|T \cap \{0, \pi\}| = 1$ である. $\kappa' = (\kappa - 1)/2$ として, T の要素を $\tau_1 \in \{0, \pi\}, \tau_{\kappa'+k} = -\tau_k, 2 \leq k \leq \kappa' + 1$, となる様に並べる.

定義式(5-3-2)より, $W_1(t)$ が偶関数で, $W_{\kappa'+k}(t) = W_k(-t), 2 \leq k \leq \kappa' + 1$, であることがすぐ確かめられる. これより, 式(4-3-10)において,

$$\begin{cases} w_{1,l} \in \mathbf{R} & , 0 \leq l \leq \kappa', \\ w_{\kappa'+l,l} = \bar{w}_{k,l} & , 0 \leq l \leq \kappa', 2 \leq k \leq \kappa' + 1. \end{cases}$$

関数 f が偶関数のときは, $E_M, E_M + \pi/M$ の対称性より,

$$C_{1,j} \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq j \leq \mu,$$

また, 式(5-4-2)より,

$$C_{\kappa'+k,j} = \bar{C}_{k,j}, \quad 0 \leq l \leq \mu, 2 \leq k \leq \kappa' + 1,$$

となる. 以上より, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$, の合成則(5-3-11)は,

$$\begin{cases} c_{2l\mu+j} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,l} C_{k,j} & , 0 \leq j \leq \mu - 1, 0 \leq l \leq (\kappa - 1)/2, \\ c_{2l\mu+\mu} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} (w_{k,l} C_{k,\mu} + w_{k,l+1} \bar{C}_{k,\mu}) & , 0 \leq l \leq (\kappa - 3)/2, \\ c_{2l\mu-j} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,l} \bar{C}_{k,j} & , 1 \leq j \leq \mu - 1, 1 \leq l \leq (\kappa - 1)/2, \\ c_{\kappa\mu} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,(\kappa-1)/2} C_{k,\mu} \end{cases} \quad (5-4-5)$$

関数 f が奇関数のときは, $E_M, E_M + \pi/M$ の対称性より,

$$C_{1,j} \in i\mathbf{R}, \quad 0 \leq j \leq \mu,$$

また, 式(5-4-3)より,

$$C_{\kappa'+k,j} = -\bar{C}_{k,j}, \quad 0 \leq l \leq \mu, 2 \leq k \leq \kappa' + 1,$$

となる. 以上より, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$, の合成則(5-3-11)は,

$$\begin{cases} c_{2l\mu+j} = 2i\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,l} C_{k,j} & , 0 \leq j \leq \mu - 1, 0 \leq l \leq (\kappa - 1)/2, \\ c_{2l\mu+\mu} = i\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} (w_{k,l} C_{k,\mu} + w_{k,l+1} \bar{C}_{k,\mu}) & , 0 \leq l \leq (\kappa - 3)/2, \\ c_{2l\mu-j} = 2i\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,l} \bar{C}_{k,j} & , 1 \leq j \leq \mu - 1, 1 \leq l \leq (\kappa - 1)/2, \\ c_{\kappa\mu} = 2i\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+1} w_{k,(\kappa-1)/2} C_{k,\mu} \end{cases} \quad (5-4-6)$$

式(5-4-5,6)のいずれにおいても, 複素乗算はその実部, あるいは虚部のみを計算すればよく, 特に, 総和の第1項は実数と実数か純虚数の積となっている. このことより,

計算量は、式(5-3-11)の1/4となる。

5-4.2 κ が偶数で T が $0, \pi$ の両方を含むときの合成則

$$\kappa' = (\kappa - 2)/2 \text{ として, } T \text{ の要素を } \tau_1 = 0, \tau_{\kappa'+2} = \pi, \tau_{\kappa'+k} = -\tau_k, 2 \leq k \leq \kappa' + 1,$$

の様に並べる。

定義式(5-3-2)より, $W_1(t)$ が偶関数, $W_{\kappa'+2}(t)$ が奇関数, さらに $W_{\kappa'+k}(t) = W_k(-t)$, $2 \leq k \leq \kappa' + 1$, であることがすぐ確かめられる。これより, 式(5-3-12)において,

$$\begin{cases} w_{1,l} \in \mathbf{R} & , 0 \leq l \leq \kappa', \\ w_{\kappa'+2,l} \in i\mathbf{R} & , 0 \leq l \leq \kappa', \\ w_{\kappa'+1,l} = \bar{w}_{k,l} & , 0 \leq l \leq \kappa', 2 \leq k \leq \kappa' + 1. \end{cases}$$

また, $\alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_{\kappa'+2} \in i\mathbf{R}, \alpha_{\kappa'+k} = \alpha_k, 1 \leq k \leq \kappa' + 2$, であるから,

$$\begin{cases} w_{1,l} \alpha_1, w_{1,l} \bar{\alpha}_1 \in \mathbf{R}, 0 \leq l \leq \kappa', \\ w_{\kappa'+2,l} \alpha_{\kappa'+2}, w_{\kappa'+2,l} \bar{\alpha}_{\kappa'+2} \in \mathbf{R}, 0 \leq l \leq \kappa', \\ w_{\kappa'+1,l} \alpha_{\kappa'+k} = \bar{w}_{k,l} \bar{\alpha}_k, w_{\kappa'+1,l} \bar{\alpha}_{\kappa'+k} = \bar{w}_{k,l} \alpha_k, 0 \leq l \leq \kappa', 2 \leq k \leq \kappa' + 1. \end{cases}$$

関数 f が偶関数のときは, $E_M, E_M, +\pi/M$ の対称性より,

$$C_{1,j} \in \mathbf{R}, C_{\kappa'+2,j} \in \mathbf{R}, 0 \leq j \leq \mu,$$

また, 式(5-4-2)より,

$$C_{\kappa'+k,j} = \bar{C}_{k,j}, 0 \leq l \leq \mu, 2 \leq k \leq \kappa' + 1,$$

となる。以上より, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$,の合成則(5-3-15)は,

$$\begin{cases} c_0 & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,0} \bar{\alpha}_k C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,l} \bar{\alpha}_k C_{k,j}, \quad , 1 \leq j \leq \mu, \quad , 0 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{2l\mu-j} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,l} \alpha_k \bar{C}_{k,j}, \quad , 0 \leq j \leq \mu - 1, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} & = \text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} (w_{k,l} \bar{\alpha}_k + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{\kappa\mu} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}. \end{cases} \quad (5-4-7)$$

関数 f が奇関数のときは, $E_M, E_M, +\pi/M$ の対称性より,

$$C_{1,j}, C_{\kappa'+2,j} \in i\mathbf{R}, 0 \leq j \leq \mu,$$

また, 式(5-4-3)より,

$$C_{\kappa'+k,j} = -\bar{C}_{k,j}, 0 \leq l \leq \mu, 2 \leq k \leq \kappa' + 1,$$

となる。以上より, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$,の合成則(5-3-15)は,

$$\begin{cases} c_0 & = 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,0} \bar{\alpha}_k C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} & = 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,l} \bar{\alpha}_k C_{k,j}, \quad , 1 \leq j \leq \mu, \quad , 0 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{2l\mu-j} & = 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,l} \alpha_k \bar{C}_{k,j}, \quad , 0 \leq j \leq \mu - 1, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} & = \text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} (w_{k,l} \bar{\alpha}_k + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{\kappa\mu} & = 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'+2} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}. \end{cases} \quad (5-4-8)$$

式(5-4-7,8)のいずれにおいても, 複素乗算はその実部, あるいは虚部のみを計算すればよく, 特に, 総和の第1項と第 $\kappa' + 2$ 項は実数と実数か純虚数の積となっている。このことより, 計算量は, 式(5-3-15)の1/4となる。

5-4.3 κ が偶数で T が $0, \pi$ のいずれをも含まないときの合成則

$\kappa' = \kappa/2$ として, T の要素を $\tau_{\kappa'+k} = -\tau_k, 1 \leq k \leq \kappa'$, の様に並べる。

5-4.2節と同様にして,

$$w_{\kappa'+1,l} \alpha_{\kappa'+k} = \bar{w}_{k,l} \bar{\alpha}_k, w_{\kappa'+1,l} \bar{\alpha}_{\kappa'+k} = \bar{w}_{k,l} \alpha_k, 0 \leq l \leq \kappa' - 1, 1 \leq k \leq \kappa',$$

を得る。

関数 f が偶関数のときは, 式(5-5-2)より,

$$C_{\kappa'+k,j} = \bar{C}_{k,j}, 0 \leq l \leq \mu, 1 \leq k \leq \kappa',$$

となるから, $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$,の合成則(5-3-15)は,

$$\begin{cases} c_0 & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,0} \bar{\alpha}_k C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,l} \bar{\alpha}_k C_{k,j}, \quad , 1 \leq j \leq \mu, \quad , 0 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{2l\mu-j} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,l} \alpha_k \bar{C}_{k,j}, \quad , 0 \leq j \leq \mu - 1, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} & = \text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'} (w_{k,l} \bar{\alpha}_k + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, \quad , 1 \leq l \leq \kappa/2 - 1, \\ c_{\kappa\mu} & = 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}. \end{cases} \quad (5-4-9)$$

関数 f が奇関数のときは、式(5-5-3)より、

$$C_{\kappa'+k,j} = -\bar{C}_{k,j}, \quad 0 \leq l \leq \mu, 1 \leq k \leq \kappa',$$

となり、 $L(R_M(T))f$ の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$ の合成則(5-3-15)は、

$$\begin{cases} c_0 &= 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,0} \bar{\alpha}_k C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} &= 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,l} \bar{\alpha}_k C_{k,j}, \quad 1 \leq j \leq \mu, \quad 0 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{2l\mu-j} &= 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,l} \alpha_k \bar{C}_{k,j}, \quad 0 \leq j \leq \mu-1, 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} &= \text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'} (w_{k,l} \bar{\alpha}_k + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, \quad 1 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{\kappa\mu} &= 2\text{Im} \sum_{k=1}^{\kappa'} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}. \end{cases} \quad (5-4-10)$$

この場合も、計算量は式(4-3-15)の1/4となる。

以上5-4.1,2,3節より、 T が対称で f が偶関数あるいは奇関数の場合は、

$\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$ から、 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$ を合成するのに要する実乗算回数 m_{syn} は、 κ の偶奇によらず

$$m_{\text{syn}} = \frac{1}{2} \kappa N + O(1), \quad (5-4-11)$$

である。これと式(5-4-4)より、我々の算法に要求される実乗算回数 m_{total} は、

$$m_{\text{total}} = m_{\text{FFT}} + m_{\text{syn}} = \frac{1}{2} N \log_2 N + O(N), \quad (5-4-12)$$

であり、通常の等間隔標本点上の偶関数用、奇関数用のFFTの計算量とほぼ等しい。

5-5. 逆変換の高速アルゴリズム

この節では、実Fourier級数

$$f(t) = \text{Re} \sum_{k=0}^{\kappa\mu} c_k e^{ikt}, \quad (5-5-1)$$

の準等間隔集合 $R_M(T), M \geq 2$ における値をすべて求めるための高速アルゴリズムについて述べる。また、 T が対称で f が偶関数あるいは奇関数のときのアルゴリズムの効率化についても触れる。

これは、3節で述べた f の $R_M(T)$ における値から $L(R_M(T))f$ の係数を求める変換の、逆変換のアルゴリズムの問題である。 $T = \{\tau\}$ すなわち、 $R_M(T)$ が等間隔集合 $E_{M+\tau/M}$

のときには、実FFTの逆変換を用いて、 $M \log_2 M + O(M)$ 回の実乗算で計算できる。

絶対収束する無限実Fourier級数

$$f(t) = \text{Re} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (5-5-2)$$

に対して、

$$L(E_{M,\kappa})f(t) = \text{Re} \sum_{j=0}^{\mu} C_{k,j} e^{ijt}, 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-5-3)$$

とおくと、4章の補間係数とFourier係数に対する考察より、

$$\begin{cases} C_{k,0} &= 2\text{Re} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l\mu} e^{il\tau_k}, \\ C_{k,j} &= c_j + \sum_{l=1}^{\infty} \{c_{2l\mu+j} e^{il\tau_k} + \bar{c}_{2l\mu-j} e^{-il\tau_k}\}, \quad 0 < j < \mu, \\ C_{k,\mu} &= 2e^{i\tau_k/2} \text{Re} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l\mu+\mu} e^{i(l-\frac{1}{2})\tau_k} \end{cases} \quad (5-5-4)$$

を得る。 f を式(5-5-1)の有限級数で置き換えて、次の公式を得る。

(イ) κ が偶数のとき、

$$\begin{cases} C_{k,0} &= 2\text{Re} \sum_{l=0}^{\kappa/2} c_{2l\mu} e^{il\tau_k}, \\ C_{k,j} &= c_j + \sum_{l=1}^{\kappa/2-1} \{c_{2l\mu+j} e^{il\tau_k} + \bar{c}_{2l\mu-j} e^{-il\tau_k}\}, \quad 0 < j < \mu, \\ C_{k,\mu} &= 2e^{i\tau_k/2} \text{Re} \sum_{l=0}^{\kappa/2-1} c_{2l\mu+\mu} e^{i(l-\frac{1}{2})\tau_k}. \end{cases} \quad (5-5-5)$$

(ロ) κ が奇数のとき、

$$\begin{cases} C_{k,0} &= 2\text{Re} \sum_{l=0}^{(\kappa-1)/2} c_{2l\mu} e^{il\tau_k}, \\ C_{k,j} &= c_j + \sum_{l=1}^{(\kappa-1)/2} \{c_{2l\mu+j} e^{il\tau_k} + \bar{c}_{2l\mu-j} e^{-il\tau_k}\}, \quad 0 < j < \mu, \\ C_{k,\mu} &= 2e^{i\tau_k/2} \text{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{(\kappa-1)/2} c_{2l\mu+\mu} e^{i(l-\frac{1}{2})\tau_k} + \frac{1}{2} c_{\kappa\mu} e^{i\tau_k/2} \right\}. \end{cases} \quad (5-5-6)$$

式(5-5-5,6)ともすべての $1 \leq k \leq \kappa$ について、 $C_{k,j}, 0 \leq j \leq \mu$ を求めるのに要する複素乗算は、標本点数 $N = \kappa M$ に対して $\kappa N/2 + O(1)$ である。したがって、 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$ から

$\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$ を合成するのに要する実乗算回数 m_{dec} は、 κ の偶奇によらず

$$m_{\text{dec}} = 2\kappa N + O(1), \quad (5-5-7)$$

である。

さらに、

$$f(\tau) = L(R_M(T))f(\tau) = L(E_{M,k})f(\tau), \tau \in E_{M,k}, 1 \leq k \leq \kappa, \quad (5-5-8)$$

であり, $L(E_{M,k})f, 1 \leq k \leq \kappa$, の $E_{M,k}$ における値は, この節の最初で述べた様に実FFTの逆変換により各 k について $M \log_2 M + O(M)$ の実乗算回数で求められる. この段階に要する実乗算回数は総計 $m_{\text{IFFT}} = N \log_2 N + O(N)$ 回となる. これと式(5-5-7)より, 以上の算法に要求される実乗算回数 m_{total} は,

$$m_{\text{total}} = m_{\text{IFFT}} + m_{\text{dec}} = N \log_2 N + O(N), \quad (5-5-9)$$

であり, 通常の等間隔標本点上の実FFTの逆変換の計算量とはほぼ等しい.

次に, T が対称で f が偶関数あるいは奇関数の場合を考察しよう. 4節の最初で述べた様に, $\tau_k = 0, \pi$ なら $E_{M+\tau_k}/M$ 上の f のすべての関数値は $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$ から, 実乗算

$\frac{1}{2} M \log M + O(M)$ 回で求めることができる. さらに, $\tau_k \neq 0, \pi$ であるなら, その対称点 $\tau_k = -\tau_k$ として, $E_{M+\tau_k}/M = -(E_{M+\tau_k}/M)$, すなわち偶関数 f に対しては,

$$f(E_{M+\tau_k}/M) = f(E_{M+\tau_k}/M),$$

奇関数 f に対しては,

$$f(E_{M+\tau_k}/M) = -f(E_{M+\tau_k}/M),$$

が成り立つ. このことは, この節で構成したアルゴリズムにおいて, $\tau_k \neq 0, \pi$ であるなら, $f(E_{M+\tau_k}/M)$ さえ求めれば, 対称点 $\tau_k = -\tau_k$ に対応する $f(E_{M+\tau_k}/M)$ は求める必要がないということを示している. ここで, $\beta = |T \cap [0, \pi]|$ とおくと, この節のアルゴリズムで, $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 0 \leq k \leq \kappa$, から $f(E_{M+\tau_k}/M)$ を求める部分の総乗算回数は,

$$m_{\text{IFFT}} = \frac{\kappa - \beta}{2} M \log_2 M + \beta \frac{1}{2} M \log_2 M + O(M) = \frac{1}{2} N \log_2 N + O(N), \quad (5-5-10)$$

に減少する.

関数 f の係数 $c_l, 0 \leq l \leq \kappa \mu$, から $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$, を合成する段階においても, f が偶関数なら係数は実数, f が奇関数なら係数は純虚数であるから, 式(5-5-5,6)において, 計算量は半減する. $\tau_k = 0, \pi$ なら $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$ もまた関数 f の偶奇にしたがって実数あるいは純虚数であるから計算量は, さらに半減する.

以上の考察により,

$$m_{\text{dec}} = \frac{1}{2} \kappa N + O(1), \quad (5-5-11)$$

$$m_{\text{total}} = m_{\text{IFFT}} + m_{\text{dec}} = \frac{1}{2} N \log_2 N + O(N), \quad (5-5-12)$$

を得る.

5-6. 再利用可能標本点列

この節では, 1次元トーラス T 上の標本点集合の無限列, $\{U_n\}_{n \geq 0}$ とその上での三角多項式補間列を考える. 標本点集合列が,

$$U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots, \quad (5-6-1)$$

を満たすとき, この系列にしたがって, 標本点数を増加する際に, 以前の標本値が無駄なく再利用できる. 我々は, 式(5-6-1)を満たす標本点集合列を, 簡単に再利用可能とよぶ.

$U_n, n \geq 0$, を, 等間隔標本点集合に限定すれば, 再利用性を仮定すると, 相続く標本点集合の標本点数の比は2以上となり, 標本点数の増加率は大きくならざるを得ない. 特に, これを多次元の問題に直積として用いたときは, 標本点数の増加は急激である. 我々の準等間隔標本点集合を用いれば, 標本点集合列 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ の標本数の増加率を, 再利用性を保ちつつ, いくらでも小さくできる. 次の定理は, 定理2-6-1を1次元トーラス T 上の標本点集合列の問題に移したものである.

定理 5-6-1 : 1次元トーラス T 上の有限集合の列 $\{T_n\}_{0 \leq n \leq v-1}$ が,

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_{v-1} \subset R_2(T_0), \quad (5-6-2)$$

を満たせば, 標本点集合列,

$$U_{mv+k} := R_2^m(T_k), 0 \leq k \leq v-1, 0 \leq m, \quad (5-6-3)$$

は, 再利用可能である.

式(5-6-3)の $\{U_n\}_{n \geq 0}$ においては, n が v すすむごとに標本点数が倍増する. したがって, 標本点数の平均増加率は, $\sqrt[v]{2}$ である.

第3,4,5節で述べたように, 式(5-6-3)の準等間隔標本点集合列 $U_n, n \geq 0$, 上の三角多項式補間は, 効率的に計算できる.

例 5-6-2 : T_0 を等間隔標本点集合

$$T_0 = E_\rho, \rho \geq 2, \quad (5-6-4)$$

とすれば, $T_0 \subset E_{2\rho} = R_2(T_0)$ は自然に成り立つ. $T_1, T_1, \dots, T_{\nu-1}$ は, $E_{2\rho}$ の部分集合で E_ρ を含むものを(5-6-3) が成立するようにとればよい. 実際には, いくつかの可能性の中から, $U_n, n \geq 0$, 上の三角多項式補間の安定性, 精度に配慮して選択がなされるべきである.

5-7. 数値実験

第5節の式(5-6-4)で $\rho=3$ とし,

$$\tau_1 = 0, \tau_2 = \frac{2\pi}{3}, \tau_3 = \frac{4\pi}{3}, \tau_4 = \frac{\pi}{3}, \tau_5 = \frac{5\pi}{3}, \quad (5-7-1)$$

$$T_n = \{\tau_1, \dots, \tau_{n+3}\}, 0 \leq n \leq 2, \quad (5-7-2)$$

とする. $T_n, 0 \leq n \leq \nu-1, \nu=3$, は式(5-6-2)を満たすので, 式(5-6-3)で定義された標本点集合列 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ は, 再利用可能であり, その標本点数の平均増加率は $\sqrt[3]{2}$ である.

$T = T_n, 0 \leq n \leq 2$, について, 式(5-3-2)にしたがって, $W_k(t), 1 \leq k \leq \kappa = n+3$, を計算した結果を示す.

<a> $T=T_0 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ のとき,

$$\begin{cases} W_1(t) = (1 + 2\cos 2t) / 3, \\ W_2(t) = (1 + 2\cos(2t - \frac{2\pi}{3})) / 3, \\ W_3(t) = (1 + 2\cos(2t + \frac{2\pi}{3})) / 3. \end{cases} \quad (5-7-3)$$

 $T=T_1 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ のとき,

$$\begin{cases} W_1(t) = (2\cos t + 2\cos(3t + \frac{\pi}{3})) / 3, \\ W_2(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(3t + \frac{2\pi}{3})) / 3, \\ W_3(t) = (2\cos(t - \frac{2\pi}{3}) + 2\cos 3t) / 3, \\ W_4(t) = \cos(3t - \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (5-7-4)$$

<c> $T=T_2 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}$ のとき,

$$\begin{cases} W_1(t) = (1 + 2\cos 4t) / 3, \\ W_2(t) = (1 + \sqrt{3}\cos(2t - \frac{5\pi}{6}) + \cos(4t + \frac{\pi}{3})) / 3, \\ W_3(t) = (1 + \sqrt{3}\cos(2t + \frac{5\pi}{6}) + \cos(4t - \frac{\pi}{3})) / 3, \\ W_4(t) = (\sqrt{3}\cos(2t - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\cos(4t - \frac{5\pi}{6})) / 3, \\ W_5(t) = (\sqrt{3}\cos(2t + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\cos(4t + \frac{5\pi}{6})) / 3. \end{cases} \quad (5-7-5)$$

$T=T_0, T_2$ のときは, T の大きさ $\kappa=3, 5$ は奇数であり, 式(5-7-3), (5-7-5)より, 式(5-3-10)の右辺の係数 $w_{k,l}, 0 \leq l \leq (\kappa-1)/2, 1 \leq k \leq \kappa$, がわかる.

$T=T_1$ のときは, T の大きさ $\kappa=4$ は偶数であり, 式(5-7-4)より, 式(5-3-12)の右辺の係数 $w_{k,l}, 0 \leq l \leq \kappa/2-1, 1 \leq k \leq \kappa$, がわかる. また, 式(5-3-13)の $\alpha_k, 1 \leq k \leq \kappa$, も簡単に計算できる.

これらを使って, κ の偶奇にしたがって, 式(5-3-11)または(5-3-15)により, $L(E_{M,k})f, 1 \leq k \leq \kappa$, の係数から, $L(R_M(T))f$ の係数を合成できる.

実際に合成に要する実乗算回数 m_{syn} は, T_0, T_1, T_2 の特殊性から, (5-3-16)に示したもののより少なく, 標本点数 N に対して,

$$m_{syn} = \begin{cases} \frac{4}{3}N + O(1) & , T = T_0, \\ \frac{7}{4}N + O(1) & , T = T_1, \\ \frac{7}{5}N + O(1) & , T = T_2. \end{cases} \quad (5-7-6)$$

となった. ただし, 2進計算機の特性を考慮し, 2, 0.5 の乗算は m_{syn} に含めていない. 実際に, $T=T_0, T_1, T_2, M=2^m, 4 \leq m \leq 9$, について, $L(R_M(T))f$ の係数を求めた結果を次に示す.

テスト関数 f として, 周期 2π の実関数

$$f(t) := \frac{1 + 2a \sin t - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2} = 1 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1-i)a^n e^{int}, a = 0.95, \quad (5-7-7)$$

を採用し, 基数 2 の実FFTにより $L(E_{M,k})f, 1 \leq k \leq \kappa$, の係数を求め, $L(R_M(T))f$ の係数を式(5-3-11), (5-3-15)により合成した結果を, 図5-7-1に示す.

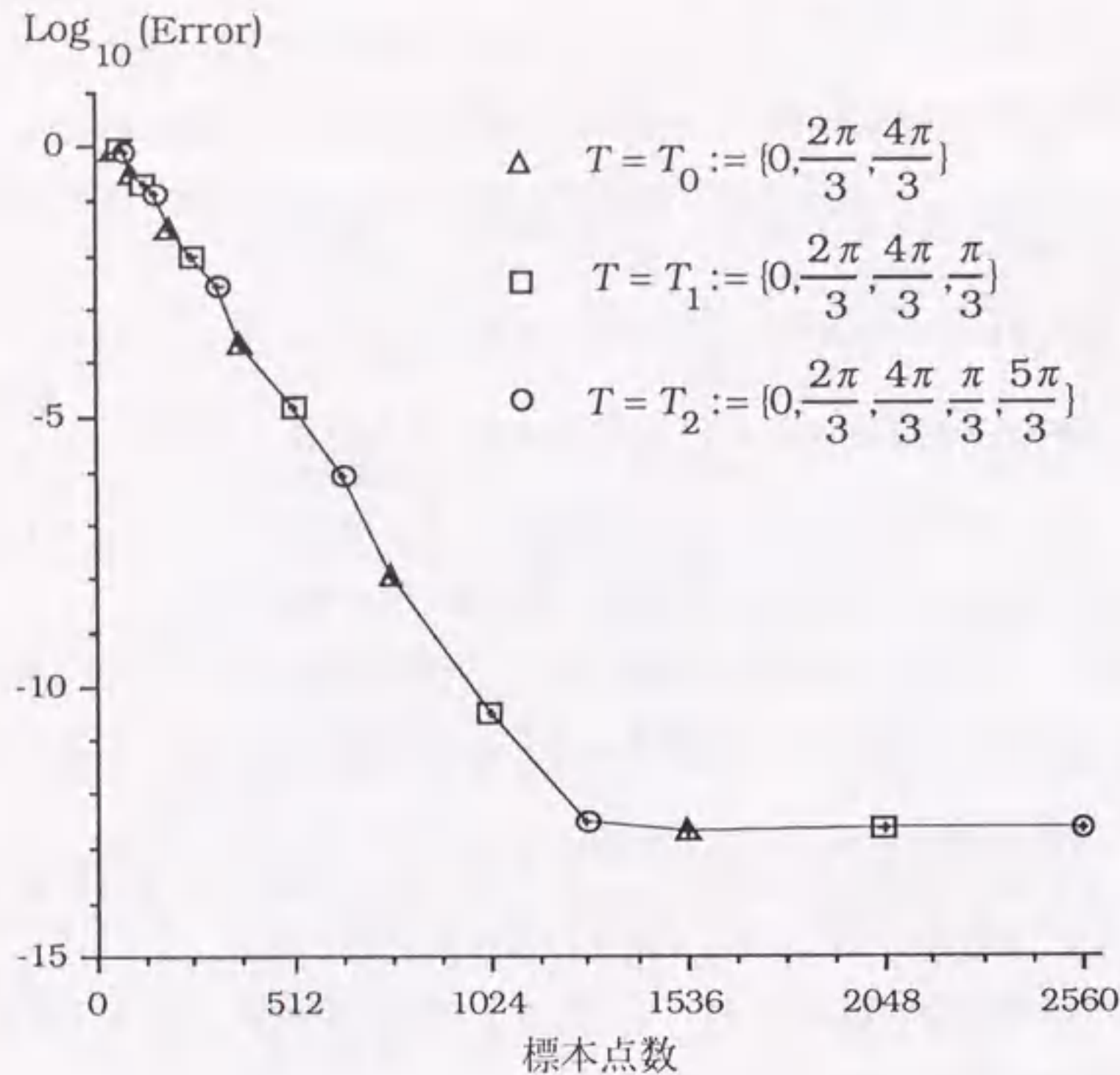


図5-7-1. 関数 $f(t) = \frac{1+2a\sin t - a^2}{1-2a\cos t + a^2}$, $a = 0.95$, に対する
準等間隔標本点上の補間係数の相対誤差.

図5-7-1のグラフでは、横軸に標本点数 N 、縦軸に誤差 ϵ の常用対数を示した。誤差 ϵ は、係数誤差の絶対値和を、真の係数の絶対値和 $=27.870\dots$ で割った相対誤差である。標本点数 $N = 48, \dots, 3 \times 2^m, \dots, 1536$ の場合は、 $T = T_0$ であり、 $R_{2^m}(T)$ は、等間隔標本点 $E_{3 \cdot 2^m}$ である。標本点数 $N = 64, \dots, 4 \times 2^m, \dots, 2048$ のときは $T = T_1$ 、 $N = 80, \dots, 5 \times 2^m, \dots, 2560$ のときは $T = T_2$ で、 $R_{2^m}(T)$ は、準等間隔であるが等間隔ではない。図5-7-1のグラフは、ほぼ直線的に降下し、 10^{-13} あたりで丸め誤差の限界に達しており、 $T = T_1$ 、 T_2 の場合についても、精度、安定性において目立った劣化はみられない。

数値実験は、名古屋大学大型計算機センターのFACOM M780上で、FORTRAN77の倍精度計算を用いておこなった。

6章 再利用可能標本点列

6-1. はじめに

2章6節の定理2-6-1で、準等間隔集合により、要素数が狭義単調増加し再利用性を持つ標本点集合列が構成することができることを示した。そのときに中心的な役割を果たすのが、モード2の自己再利用性を持つ集合 Y_0 であった。この章では、この自己再利用性を持つ Y_0 をすべて求める系統的な方法を示す。また、その特殊なしかし有用な例としてVan der Corput列の有限部分列を紹介し、詳しく分析する。

この節では、自己再利用性を1次元トーラス \mathbf{T} 上で考える。有限集合 $Y \subset \mathbf{T}$ が自己再利用可能な必要十分条件は、

$$Y \subset R_2(Y) \equiv \bigcup_{\eta \in Y} ((0, \pi) + \eta/2) = \frac{1}{2}Y \cup (\frac{1}{2}Y + \pi), \quad (6-1-1)$$

である。この問題を、1-1写像 $t \mapsto (t/2\pi \text{の小数部})$ で1次元トーラス \mathbf{T} から実数軸の有限区間 $[0, 1)$ 上に移して考える。区間 $[0, 1)$ の有限集合 X が自己再利用性を持つということを、 X が

$$X = \frac{1}{2}X \cup \frac{1}{2}(X+1), \quad (6-1-2)$$

を満たすことと定義する。このとき、 $2\pi X$ と $\exp(2\pi i X)$ はそれぞれ、1次元トーラス \mathbf{T} 上、単位円周 \mathbf{S} 上の自己再利用可能集合である。またその逆も真である。

$1/2$ を中心として対称な自己再利用可能集合の族を構成的に表現し、その要素である自己再利用可能集合をすべてを求めるという問題は、杉浦と櫻井により、適応型積分則に用いる高次積分公式の設計法の一部として、完全に解決されている[Sugiura 1989]。かれらは、積分公式の次数を上げるという目的から、問題を対称な $X \subset [0, 1)$ に限定した。これは、トーラス \mathbf{T} 上で $2\pi X$ が対称、あるいは、単位円周 \mathbf{S} 上で $\exp(2\pi i X)$ が実軸対称である場合に対応する。

この章の2節では、[Sugiura 1989]の論理をたどることにより、自己再利用可能集合全体からなる集合族に構成的な表現を与える。

3節では、自己再利用性を持つ集合の例としてVan der Corput列の有限部分列を紹介する。4章では、それらの上の補間において、補間係数の計算が安定であることを示す。5節では、補間作用素の精度を論ずる。ここでは、補間作用素の精度の基準として2章5節の式(2-5-4)で定義した ω を用いる。2~4章で示したように、単位円周上の有限集合 Z で $\omega(Z)$ が小さければ、補間作用素 $L(R_m(Z))$, $L^{(p)}(R_m(Z))$, $L_R(R_m(Z))$, $L_E(R_m(Z))$,

$L_0(R_m(Z))$, $m \geq 1$, 等の補間作用素は, いずれも精度の高い補間式を与える.

6-2. 自己再利用率

区間 $[0, 1]$ の有限集合を X とする. $[\]$ をGaussの記号として, 区間 $[0, 1]$ 上の関数 F を,

$$F(x) := 2x - [2x], \quad x \in [0, 1], \quad (6-2-1)$$

で定義すると, $x \in X$ が $R_2(X)$ に属する必要十分条件は,

$$x \in \frac{1}{2}X \cup \frac{1}{2}(X+1) \Leftrightarrow F(x) \in X,$$

したがって, X が自己再利用率可能であるための必要十分条件は,

$$F(X) \subset X, \quad (6-2-2)$$

である. $x \in [0, 1]$ の2進小数展開を $x = 0.\xi_1\xi_2\xi_3\cdots = \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l 2^{-l}$, とすると, $\xi_l, l \geq 1$ のすべては1ではない. また, $F(x) = 0.\xi_2\xi_3\cdots$, である.

以下, X を自己再利用率可能集合とする. $x \in X$ とすると, 無限数列 $F^k(x)$, $k \geq 0$, は X に入る. X は有限集合だから, ある $0 \leq k < l$ が存在して, $F^k(x) = F^l(x)$, すなわち,

$$0.\xi_{k+1}\xi_{k+2}\cdots = 0.\xi_{l+1}\xi_{l+2}\cdots.$$

となる. これより, $\xi_{k+j} = \xi_{l+j}, j \geq 1$, を得る. このことは, x が小数第 $k+1$ 桁以降より周期 $l-k$ の循環部を持つことを示す. この循環部の最小周期を $p(x)$, $\xi_{k+j} = \xi_{k+p(x)+j}, j \geq 1$, を満たす最小の k を $\kappa(x)$ と書くことにすると,

$$x = 0.\xi_1\xi_2\cdots\xi_{\kappa(x)} + 2^{-\kappa(x)}l(x), \quad \xi_{\kappa(x)} = \bar{\xi}_{\kappa(x)+p(x)},$$

$$l(x) := 0.\xi_{\kappa(x)+1}\cdots\xi_{\kappa(x)+p(x)} / (1 - 2^{-p(x)}),$$

となる. ここで, 桁 $\xi = 0, 1$ に対して, $\bar{\xi} = 1 - \xi = 1, 0$ とする. したがって, $x \in X$ はその2進小数展開の循環部 $l(x)$ によって分類できる. 区間 $[0, 1]$ の2進循環小数 x を

$$x = \langle \xi_1 \cdots \xi_{p(x)} \rangle := 0.\xi_1 \cdots \xi_{p(x)} \bar{\xi}_1 \cdots \bar{\xi}_{p(x)} \cdots / (1 - 2^{-p(x)}), \quad (6-2-3)$$

と表現する. 循環小数全体を P とし, 循環周期が n の循環小数全体を P_n とすると, 明らかに,

$$\bigcup_{k|n} P_k = \{l / (2^n - 1) : 0 \leq l < 2^n - 1\}, \quad (6-2-4)$$

である. ここで, $k|n$ は k が n を割り切ることを示す. したがって,

$$\sum_{k|n} |P_k| = 2^n - 1, \quad (6-2-5)$$

となり, P_n は有限集合である.

さて, 区間 $[0, 1]$ の有理数全体を \mathfrak{Q}_1 とすると, $P \subset \mathfrak{Q}_1$, したがって, $X \subset \mathfrak{Q}_1$ である. また,

$$X = \sum_{x \in Y \cap P} [l^{-1}(\{x\}) \cap X], \quad l^{-1}(\{x\}) := \{y : l(y) = x\}, \quad (6-2-6)$$

であることがわかる. ここで, Σ と $+$ は集合の重なりのない和を意味するものとする.

次に, $l^{-1}(\{x\}), x \in P$, について調べてみよう. 今,

$$r(x) := 0.\bar{\xi}_{p(x)} + \frac{1}{2}x, \quad (6-2-7)$$

とし, 任意の $y \in \mathfrak{Q}_1$ に対して,

$$C(y) := \{z \in \mathfrak{Q}_1 : \exists k \geq 0, F^k(z) = y\}, \quad (6-2-8)$$

とおくと,

これまでの考察より,

$$\begin{aligned} l^{-1}(\{x\}) &= \{x\} + \{y = 0.\eta_1\eta_2\cdots\eta_{\kappa(y)-1}\bar{\xi}_{p(x)} + 2^{-\kappa(y)}x : \kappa(y) \geq 1\} \\ &= \{x\} + C(r(x)), \end{aligned} \quad (6-2-9)$$

である. また, 任意の $y \in \mathfrak{Q}_1 - P$ で, $|F^{-1}(\{y\})| = |\{y/2, (y+1)/2\}| = 2, \kappa(F(y)) < \kappa(y)$, が成立するので, 関係 $y \mapsto F(y)$ により, \mathfrak{Q}_1 の部分集合に有向グラフの構造をいれると, $C(y)$ は, 完全2進木となる (図6-2-1).

さて, $x \in P$ について, 集合 $L(x) := \{F^k(x) : 0 \leq k < p(x)\}$ を, これもグラフの言葉を借りて, ループと呼ぶ (図6-2-2). $x \in X$ なら, もちろん $L(x) \subset X$ である. 以上の考察により, 自己再利用率を持つ有限集合 X に関して, $L(X)$ を X に含まれるループ全体とすると, 次の表現が成立する.

$$\sum_{L \in L(X)} [L + \sum_{x \in L} \{X \cap C(r(x))\}]. \quad (6-2-10)$$

この式で, $X \cap C(r(x))$ は完全2進木 $C(r(x))$ の $r(x)$ を根とする部分木となっている.

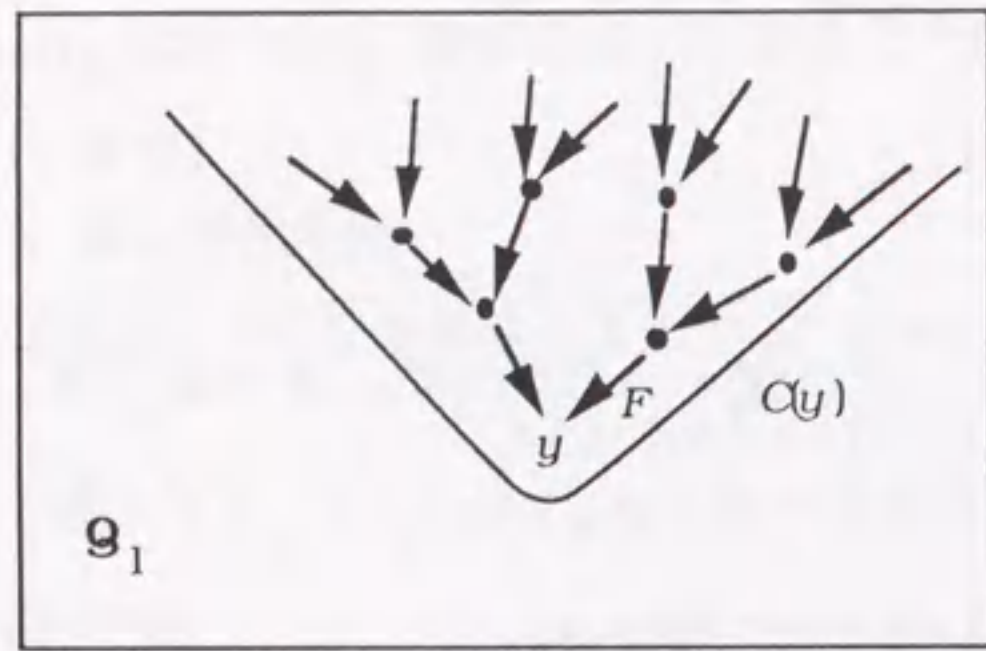


図6-2-1. 2進木 $C(y)$.

逆に, L をループの集合とし, $x \in L \in \mathcal{L}$ に対して, $T_{r(x)}$ を完全2進木 $C(r(x))$ の $r(x)$ を根とする部分木とするなら,

$$X = \sum_{L \in \mathcal{L}} [L + \sum_{x \in L} T_{r(x)}], \quad (6-2-11)$$

が自己再利用性を持つことは明らかである (図6-2-3).

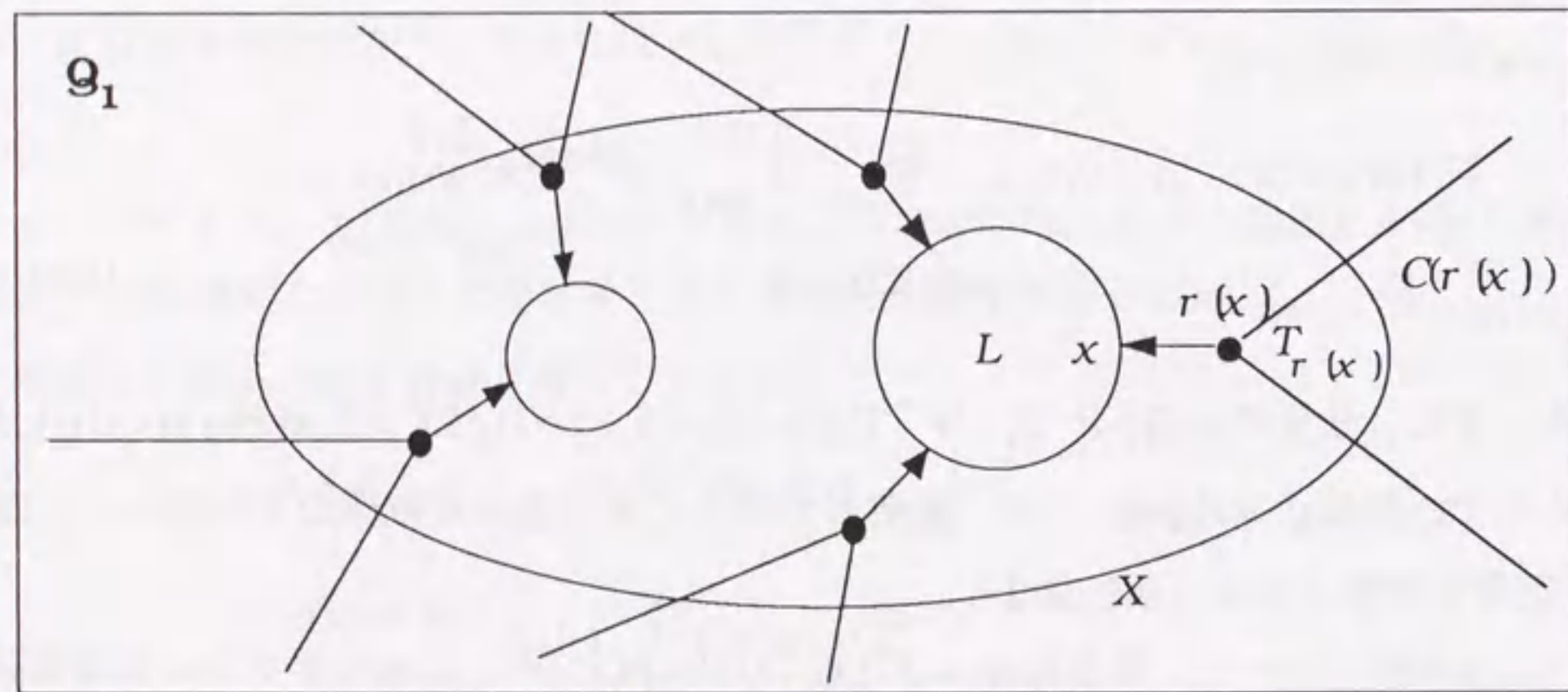


図6-2-3. 自己再利用可能集合 X の構造.

このことから, 要素数 n の自己再利用性を持つ集合の全体 I_n についての構造的な表現を与えることができる. いくつかの記号を用意する.

$$\mathcal{L}_n := \{\text{要素数}n\text{のループ全体}\},$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{L}_k,$$

$$\mathbf{L}_n := \{L \subset \tilde{\mathcal{L}}_n : \sum_{L \in \mathcal{L}} |L| \leq n\},$$

$$R(L) := \bigcup_{L \in \mathcal{L}} r(L), \quad L \in \mathbf{L}_n,$$

$$v(L) := n - \sum_{L \in \mathcal{L}} |L|, \quad L \in \mathbf{L}_n,$$

$$\mathcal{T}_k(r) := \{r \text{を根とする要素数}k\text{の}C(r)\text{部分木全体}\}, \quad r \in P.$$

また, 非負整数全体を \mathbf{Z}^+ とすると, 任意の集合 A と自然数 m に対して, A から \mathbf{Z}^+ への写像 $\delta : A \rightarrow \mathbf{Z}^+$ で $\sum_{a \in A} \delta(a) = m$ を満たすものを m の A への分配とよび, その全体を

$$\Delta_m(A) := \{\delta : A \rightarrow \mathbf{Z}^+ : \sum_{a \in A} \delta(a) = m\},$$

と書く. これらの記号により, I_n は,

$$I_n = \{ \sum_{L \in \mathcal{L}} (L + \sum_{r \in R(L)} \mathcal{T}_r) : \mathcal{T}_r \in \mathcal{T}_{\delta(r)}(r), \delta \in \Delta_{v(L)}(R(L)), L \in \mathbf{L}_n \}, \quad (6-2-12)$$

と構造的に表わすことができる.

式(6-2-4)より,

$$\sum_{k|n} k |\mathcal{L}_k| = 2^n - 1, \quad (6-2-13)$$

であり, 式(6-2-5)より, 集合 $\{l / (2^n - 1) : 0 \leq l < 2^n\}$ の要素によるループをすべて求めることにより, \mathcal{L}_n は n の小さい方から確定する. 例えば, 要素数 n のループの個数は下の表6-2-1のようになる.

表6-2-1. 要素数 n のループの個数

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ループ数	1	1	2	3	6	9	18	30	56	99

式(6-2-12)の表現より直ちに

$$I_n = \{X_1, X_2, \dots, X_K\}, \quad K = |I_n|,$$

を求める次のアルゴリズムを得る.

アルゴリズム 6-2-1:

```
begin
  Generate(  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  );
  Generate(  $\mathbf{L}_n$  );
```

```

k := 0 ; {set counter};
for all  $L \in \mathbf{L}_n$  do
  begin
    Generate(  $\Delta_{v(L)}(R(L))$  );
    for all  $\delta \in \Delta_{v(L)}(R(L))$  do
      begin
        for all  $r \in R(L)$  do Generate(  $\mathcal{T}_{\delta(r)}(r)$  );
        for all  $\{T_r\}_{r \in R(L)}$  such that  $T_r \in \mathcal{T}_{\delta(r)}(r)$  do
          begin
            k := k + 1;
             $X_k := \sum_{L \in \mathbf{L}} (L + \sum_{r \in R(L)} T_r)$ ;
          end
        end
      end
    end
  end
end.

```

Generate は、引数の集合族、関数族を生成する手続である。

6-3. Van der Corput列

2進有限小数は、循環部<0>を持つ2進小数である。その全体は、 $\{0\} \cup C(\frac{1}{2})$ であり、 $1/2$ は循環小数ではないので、2節で述べた様に $C(\frac{1}{2})$ は完全2進木になる(図6-3-1)。

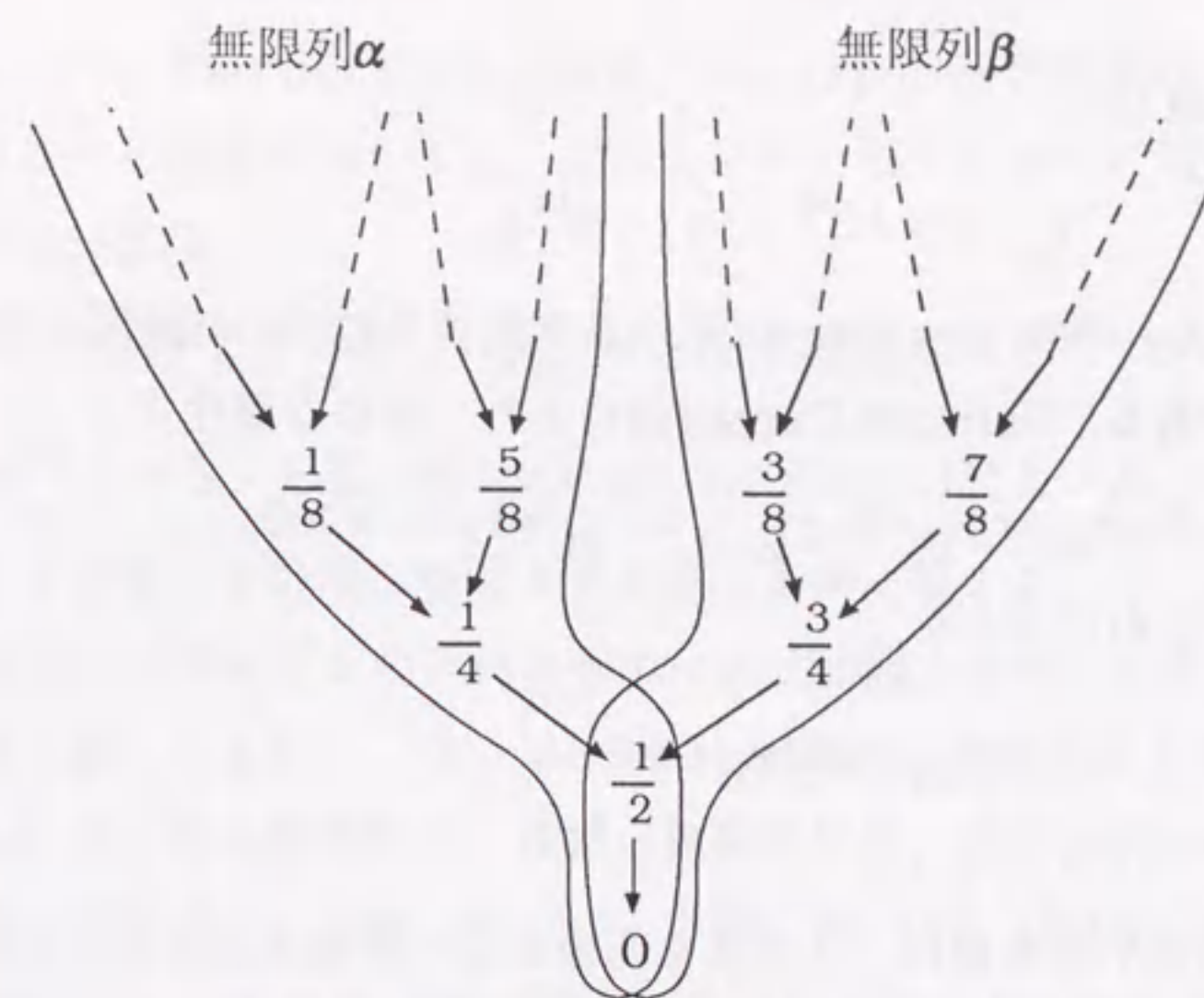


図6-3-1. Van der Corput列 γ のグラフ。

集合の要素に次のように完全順序 \ll を入れる。

$$\begin{cases}
 \kappa(x) < \kappa(y) & \Rightarrow x \ll y, \\
 \kappa(x) = \kappa(y), F(x) < F(y) & \Rightarrow x \ll y, \quad x, y \in \{0\} \cup C(1/2). \\
 \kappa(x) = \kappa(y), F(x) = F(y), x < y & \Rightarrow x \ll y,
 \end{cases} \quad (6-3-1)$$

この順序で $\{0\} \cup C(\frac{1}{2})$ の要素を整列させた無限列 $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ が、Van der Corput列である [Van der Corput 1935]。Van der Corput列は、 $\gamma_0 = 0$ から始まり、小数部の長さ $k(x)$ が小さいほうから順次2進木 $\{0\} \cup C(\frac{1}{2})$ を埋めてゆく。したがって、その有限部分列

$\gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=0}^{n-1}$, $n \geq 1$, は、有向グラフとしては0を根とする2進木であり、集合として自己再利用性を持つ。

Van der Corput列 $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ の要素 γ_k , $k \geq 0$, は k の2進展開を

$$k = (k_{v(k)} k_{v(k)-1} \dots k_1)_2 := \sum_{l=1}^{v(k)} k_l 2^{l-1}, \quad k_l = 0, 1, \quad 1 \leq l \leq v(k), \quad (6-3-2)$$

とすると、

$$\gamma_k = 0.k_1 k_2 \dots k_{v(k)}. \quad (6-3-3)$$

で表わされる有限2進小数である。ここで、 $v(k)$ は $2^{v(k)-1} \leq k < 2^{v(k)}$ を満たす非負整数で

ある。このことから直ちに

$$\gamma_{2^m} = \{l/2^m : 0 \leq l < 2^m\}, \quad (6-3-4)$$

が得られる。すなわち、Van der Corput列の要素数が2の中の有界部分列は区間[0, 1)の等間隔点集合である。Van der Corput列はまた、簡単な漸化式

$$\gamma_0 = 0, \gamma_{2k} = \gamma_k/2, \gamma_{2k+1} = \gamma_{2k} + 1/2, k \geq 0, \quad (6-3-5)$$

により生成できる。このことから、

$$\gamma_{2n} = R_2(\gamma_n), n \geq 1. \quad (6-3-6)$$

がわかる。

現代のほとんどの電子計算機は、2進法を基礎とした数値表現をとっているため、Van der Corput列 $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ の要素 γ_k は電子計算機の内部で正確に表現される数である。

Van der Corput列は元々その有界部分列の分布の一様性の高い数列として提案された [Van der Corput 1935]。区間[0, 1)の無限数列 $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ の有界部分列の一様性の指標として discrepancy [Kuipers 1974(p.88)]がある。区間[0, 1)の点集合 E に対して

$$A(E; N; \omega) := \left| \{ \omega_k \in E : 1 \leq k \leq N \} \right|, \quad (6-3-7)$$

を定義する。無限数列 ω の discrepancy は、

$$D_N = D_N(\omega) := \sup_{0 \leq \alpha < \beta \leq 1} \left| \frac{A([\alpha, \beta); N, \omega)}{N} - (\beta - \alpha) \right|, \quad (6-3-8)$$

で定義される量であり、 $D_N(\omega)$ が小さいことは、無限数列 ω の有界部分列 $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $N \geq 1$, に大きな分布の偏りがないことを示す。この意味で、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\omega) = 0, \quad (6-3-9)$$

を満たすとき、無限数列 ω は一様分布するという。Van der Corput列は、

$$D_N(\gamma) \leq \frac{2 \log_2(N+1)}{3N}, N \geq 1, \quad (6-3-10)$$

を満たす一様分布列である。一般の無限列について、

$$D_N \geq O\left(\frac{\log N}{N}\right), N \rightarrow \infty, \quad (6-3-11)$$

が知られているので、Van der Corput列は、discrepancyの収束のオーダーに関しては最良である。またその係数においても、現在知られる限りにおいて最良である [Kuipers 1974(p.127)]。

Van der Corput列 γ とその部分列 γ_n , $n \geq 1$, を写像 $x \mapsto e^{2\pi i x}$ で単位円周 S に写像したものを $\gamma^{(S)}$, $\gamma_n^{(S)}$ とかき、単位円周上のVan der Corput列とよぶ。以下では、混乱のない限り、数列とそのすべての項を要素とする集合を同一視する。

鳥居は、FFTのアルゴリズムの分析とその一般化の観点からこの数列を再発見し、長谷川、二宮、杉浦、孫らとともに、Van der Corput列の有界部分列上の中級数補間アルゴリズム、それを応用した自動補間法、各種の自動積分法、積分公式の生成アルゴリズムを発表した [長谷川 1983, 84a, 84b, 85, 87a, 85b, 88, 90], [孫 1990], [鳥居 1978, 83a, 83b, 84]。それらのいくつかは、FORTRANサブルーチンとして名古屋大学大型計算機センターのライブラリ NUMPAC に登録され、実用に供されている。

単位円周上のVan der Corput列の部分列の自己再利用性を利用して、定理 2-6-1 で

$$Y_0 = \gamma_2^{(S)}, Y_1 = \gamma_3^{(S)}, \alpha = 2, \quad (6-3-12)$$

$$Y_0 = \gamma_3^{(S)}, Y_1 = \gamma_4^{(S)}, Y_1 = \gamma_5^{(S)}, \alpha = 3, \quad (6-3-13)$$

としたものが、例 2-6-2, 3 の再活用可能標本点集合列である。式 (6-3-6) からわかるように、これら2つの集合列の項はすべて Van der Corput列の有界部分列である。

4章で述べたように、単位円周上の対称関数の補間には、実軸対称の標本点集合を用いている。4章で、実軸対称集合 Y に対して、共役対称関数のための実質標本点集合 Y_E と共役歪対称関数のための実質標本点集合 Y_O を定義したが、 Y の要素で実部のことなるものを1つずつもれなく集めたものを Y_E としても実質的には不都合はない。 Y_O についても同様で、-1, 1 を含まないことだけが異なる。逆に、 Y_E を実部のすべて異なる点の集合、 Y_O を同じ条件を満たし -1, 1 を含まない集合と規定し、単位円周上に配置される標本点全体 Y を $Y_E \cup \overline{Y_E}$ もしくは、 $Y_O \cup \overline{Y_O}$ に適宜 -1, 1 を加えたものとして考えることができる。

このような Y_E, Y_O を $\exp(2\pi i X)$, $X \in [0, 1)$, として生成するための条件は Y_E に関しては、

$$X \cap (1-X) \subset \{0, \frac{1}{2}\}, \quad (6-3-14)$$

Y_0 に関しては,

$$X \cap (1-X) = \emptyset, \quad (6-3-15)$$

である.

長谷川, 鳥居, 二宮は, 上の目的のために次の漸化式で定義される区間 $[0, 1)$ の無限数列 $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=-1}^{\infty}$ を提案し, その部分列上の cosine 級数補間アルゴリズムと, それを用いた Clenshaw-Curtis 型自動積分法を發表している [鳥居1978, 長谷川1983].

$$\alpha_{-1} = 0, \alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_{2k} = \alpha_k / 2, \alpha_{2k+1} = \alpha_{2k} + \frac{1}{2}, k \geq 1. \quad (6-3-16)$$

この構成法からわかるように, α は Van der Corput 列の部分列で, 集合としては

$\{0, \frac{1}{2}\} \cup C(\frac{1}{4})$ となりグラフとしては 2 進木となる (図6-3-1). α はその 2 進木を下のほ

うから順に埋めてゆく数列である. ゆえに, その部分列 $\alpha_n = \{\alpha_k\}_{k=-1}^{n-1}$ もまた 2 進木となり, 集合として自己再利用率を持つ. 容易にわかるように, $\alpha_n, n \geq 1$, の 2 進有限小数の末尾は 01 で終わる. したがって, $1 - \alpha_n$ の 2 進有限小数は, α_n と同じ桁数で, 末尾は

11 で終わる. したがって, 無限数列 α とその部分列 $\alpha_n = \{\alpha_k\}_{k=-1}^{n-1}$ は, 式(6-3-14)の条

件を満たす. また, 部分列 $\alpha'_n = \{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ は, 式(6-3-15)の条件を満たす.

長谷川, 鳥居, 杉浦は, 同様の目的のために次の漸化式で定義される区間 $[0, 1)$ の無限数列 $\beta = \{\beta_k\}_{k=-1}^{\infty}$ を提案している [Hasegawa1990].

$$\beta_{-1} = 0, \beta_0 = \frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{3}{4}, \beta_{2k} = \beta_k / 2, \beta_{2k+1} = \beta_{2k} + \frac{1}{2}, k \geq 1. \quad (6-3-17)$$

この構成法からわかるように, β も Van der Corput 列の部分列で, 集合としては

$\{0, \frac{1}{2}\} \cup C(\frac{3}{4})$ となる (図6-3-1). $\beta_n, n \geq 1$, の 2 進有限小数の末尾は 11 で終わる. した

がって, 無限数列 β の部分列 $\beta_n = \{\beta_k\}_{k=-1}^{n-1}$ は, 自己再利用率可能で式(6-3-14)の条件を満

たす. また, 部分列 $\beta'_n = \{\beta_k\}_{k=1}^{n-1}$ は, 式(6-3-15)の条件を満たす.

以下の 2 つの節では, 単位円周 S 上の Van der Corput 列 $\gamma^{(S)} = \{\gamma_k^{(S)}\}_{k=0}^{\infty}$ の部分列

$\gamma_n = \{\gamma_k^{(S)}\}_{k=0}^{n-1}, n \geq 1$, を標本点とする多項式補間の精度と安定性について述べる. こ

こで, $\gamma_k^{(S)} = \exp(2\pi i \gamma_k), k \geq 0$, である. 4 節では, 多項式係数の計算における安定性を調べる. 5 節では, 精度の基準として式(2-5-4)で定義した打ち切り誤差誤差の拡大率について述べる. 4, 5 節は, 論文 [鳥居1984] の内容を基礎としている. 4 節の内容については, 最近 Córdova [1990] らによって再発見されている.

6-4. Van der Corput 列上の補間の安定性

この節では, 単位円周 S 上の Van der Corput 列の部分列 $\gamma_n = \{\gamma_k^{(S)}\}_{k=0}^{n-1}, n \geq 1$, を標本点とする多項式補間における補間係数計算の数値的安定性について述べる. 安定性の指標として, 2 章の式(2-4-3)で定義した, 関数値から係数への変換行列

$$W_n := W(\gamma_n^{(S)}), n \geq 1, \quad (6-4-1)$$

のスペクトルノルムによる条件数を採用する. このことについて次の定理が成り立つ.

定理 6-4-1: 次の等式が成り立つ.

$$\text{cond}(W(\gamma_{2n}^{(S)})) = \text{cond}(W(\gamma_n^{(S)})), n \geq 1, \quad (6-4-2)$$

(証明) 5 節で述べた様に, $\gamma_n = \{\gamma_k^{(S)}\}_{k=0}^{n-1}, n \geq 1$, は自己再利用率可能で, 式(6-3-6)より,

$$\gamma_{2n}^{(S)} = R_2(\gamma_n^{(S)}), n \geq 1,$$

を満たす. このことと定理 2-4-11 より, 式(6-4-2)を得る. //

この定理より, n が偶数のときは, 問題は $n/2$ の場合に帰着する. n が奇数のときには, 次の定理が成り立つ.

定理 6-4-2: $n \geq 1$ が奇数のとき,

$$\begin{cases} \text{cond}(W(\gamma_1^{(S)})) = 1, \\ \text{cond}(W(\gamma_n^{(S)})) = 2^{v(n)/2} < \sqrt{2n}, n \geq 3. \end{cases} \quad (6-4-3)$$

ここで、 $v(k)$ は $2^{v(k)-1} \leq k < 2^{v(k)}$ を満たす非負整数である。

2つの定理から、例えば $n \leq 1000$ なら、 $\text{cond}(W(\gamma_n^{(S)}))$ は $\sqrt{2000} < 45$ 以下で、条件数はほぼ実用的なレベルに抑えられていることがわかる。

定理6-4-2の証明で用いる行列の特異値分解について、いくつかの定理と補題を用意する。

定理 6-4-3: 任意の $m \times n$ 複素行列 A に対して、 $m \times m$ ユニタリ行列 U と $n \times n$ ユニタリ行列 V が存在して、

$$U^*AV = A := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & | & \\ & \ddots & & | & 0 \\ 0 & & \sigma_r & | & \\ \hline & & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, r = \min\{m, n\}, \quad (6-4-4)$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ とできる。 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ は、行列 A における固有の量であり、特異値とよばれる。特に $m \times m$ 複素正則行列 A に対して

$$\text{cond}(A) = \sigma_1 / \sigma_m, \quad (6-4-5)$$

となる。

式(6-4-4)による行列 A の分解 $A = UAV^*$ を特異値分解という。この定理の証明は、[伊理1977]などを参照されたい。ただし、われわれは議論を簡単にするために特異値として0をも含める立場をとる。この定理より直ちに次の系を得る。

系 6-4-4: 任意の $m \times n$ 複素行列 A 、 $m \times m$ ユニタリ行列 U と $n \times n$ ユニタリ行列 V について、行列 A の特異値の列と行列 U^*A 、 AV 、 \bar{A} の特異値の列は等しい。

補題 6-4-5: $m \times n$ 複素行列 A の行ベクトルをスペクトルノルムの大きい順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ とする。相異なる行ベクトルの内積 $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^*$ 、 $1 \leq i < j \leq m$ 、がすべて0なら、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 、 $r = \min\{m, n\}$ 、のノルム $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ が、 A の特異値である。

また、行列 A の列ベクトルをスペクトルノルムの大きい順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ とし、相異なる列ベクトルの内積 $\mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j$ 、 $1 \leq i < j \leq n$ 、がすべて0なら、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 、 $r = \min\{m, n\}$ 、のノルム $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ が、 A の特異値である。

(証明) 行置換行列は、ユニタリだから、系6-4-4より行列 A の行ベクトルが上から \mathbf{a}_1 、

$\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ と並んでいるものとして一般性を失わない。 $\mathbf{a}_l \neq \mathbf{0}$ 、 $1 \leq l \leq l$ 、 $\mathbf{a}_l = \mathbf{0}$ 、 $l+1 \leq i \leq m$ 、として、 n 次元列ベクトルによる正規直交系 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ を、

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i^* / \sigma_i, 1 \leq i \leq l, \\ \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq i, l < i \leq n, \end{cases}$$

の様に構成し、 $U = I_m$ 、 $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ として、式(6-4-4)を得る。後半の証明も同様である。//

補題 6-4-6: 自然数 $m \geq n$ について $m \times m$ 複素行列 A 、 $n \times n$ 複素行列 B 、 $n \times m$ 複素行列 C 、 $m \times n$ 複素行列 D とする。 $(m+n) \times (m+n)$ 行列

$$W = \begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix},$$

のすべての行ベクトルのノルムが r であり、相異なる行ベクトルの内積が0であるなら、 A の特異値 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m \geq 0$ 、 B の特異値 $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq 0$ について、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} \alpha_k = r & , 1 \leq k \leq m-n, \\ \alpha_k = \beta_{k-m+n} & , m-n < k \leq m. \end{cases} \quad (6-4-8)$$

すなわち、 A の特異値列の小さなほうから n 個は B の特異値列と一致する。

(証明) 補題6-4-5より、 W/r はその特異値がすべて1であり、ユニタリ行列である。行列 C の特異値 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n \geq 0$ とし、

$$U_C^* C V_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 & | & \\ & \ddots & & | & 0 \\ 0 & & \gamma_n & | & \\ \hline & & & | & \overbrace{0}^{m-n} \end{pmatrix},$$

とする。ここで、 U_C, V_C はそれぞれ $n \times n$ 、 $m \times m$ ユニタリ行列である。 $n \times (m+n)$ 行列 (CB) のすべての行ベクトルのノルムは r であり、相異なる行ベクトルの内積は0である。ゆえに、その両側からユニタリ行列を掛けた、

$$U_C^*(CB) \begin{pmatrix} V_C & O \\ O & I_n \end{pmatrix} V_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 & \overbrace{\quad}^{m-n} & \overbrace{\quad}^n \\ & \ddots & & O & U_C^* B \\ 0 & & \gamma_n & & \end{pmatrix},$$

においても、すべての行ベクトルのノルムは r であり、相異なる行ベクトルの内積は0である。このことから、 $n \times n$ 行列 $U_C^* B$ の相異なる行ベクトルの内積は0で、行ベクトルのノルムは $\sqrt{r^2 - \gamma_1^2}, \sqrt{r^2 - \gamma_2^2}, \dots, \sqrt{r^2 - \gamma_n^2}$ となる。ゆえに、補題6-4-5, 系6-4-4より、 B の特異値は、

$$\beta_k = \sqrt{r^2 - \gamma_{n+1-k}^2}, 1 \leq k \leq n,$$

となる。

また、 $(m+n) \times n$ 行列 $(A^T C^T)^T$ のすべての列ベクトルのノルムは r であり、相異なる列ベクトルの内積は0である。ゆえに、その両側からユニタリ行列を掛けた、

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ O & U_C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} V_C = \left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^{AV_C} & & & \\ \gamma_1 & & 0 & \overbrace{\quad}^{m-n} \\ & \ddots & & O \\ 0 & & \gamma_n & \end{pmatrix} \right\}^m$$

のすべての列ベクトルのノルムは r であり、相異なる列ベクトルの内積は0である。このことから、 $m \times m$ 行列 AV_C の相異なる列ベクトルの内積は0であり、列ベクトルのノルムは $\sqrt{r^2 - \gamma_1^2}, \sqrt{r^2 - \gamma_2^2}, \dots, \sqrt{r^2 - \gamma_n^2}$ と $m-n$ 個の r である。ゆえに、補題6-4-5より、 AV_C の特異値すなわち A の特異値は

$$\alpha_k = r, 1 \leq k \leq m-n, \alpha_k = \sqrt{r^2 - \gamma_{m-k+1}^2}, m-n < k \leq m,$$

となる。これらにより式(6-4-8)を得る。//

正則な正方行列 A のスペクトルノルムに対する条件数 $\text{cond}(A)$ は、

$$\text{cond}(A) \equiv \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2,$$

であったから、 $W(\gamma_n^{(S)})$ の条件数は、その逆行列である Van der Monde 行列

$$V_n := V(\gamma_n^{(S)}) := \{(\gamma_k^{(S)})^l\}_{0 \leq k, l < n}, n \geq 1, \quad (6-4-9)$$

の条件数と等しい。このことと定理6-4-3の式(6-4-5)より定理6-4-2は次の定理から直ちに導かれる。

定理 6-4-7 : 1以上の奇数 n について V_n の最小特異値は1である。 V_1 の最大特異値は1であり、3以上の奇数 n について V_n の最大特異値は、 $2^{v(n)/2}$ である。

(証明) n に関する帰納法による。 $V_1 = (1)$ であるから $n=1$ のときは定理の主張は正しい。3以上の奇数 n について、 n 未満の奇数について定理の主張は正しいものとする。

$N = 2^{v(n)}, m = N - n$ とすると、式(6-5-4)より $\gamma_N^{(S)}$ は等間隔点集合である。ゆえに、

主張2-4-10の証明より、 $\sqrt{N} W(\gamma_N^{(S)})$ はユニタリだから、 V_N の相異なる行ベクトルの内積は0で、行ベクトルのノルムはすべて $\sqrt{N} = 2^{v(n)/2}$ である。 V_n は V_N の主小行列であるから、

$$V_N = \begin{pmatrix} V_n & D \\ C & B \end{pmatrix}, \quad (6-4-10)$$

とおく。ここで C は $m \times n$ 行列、 D は $n \times m$ 行列であり、

$$B = (\beta_{kl}), \beta_{kl} = e^{2\pi i(n+l)\gamma_{n+k}}, 0 \leq k, l < m, \quad (6-4-11)$$

である。式(6-5-2)より、 $N\gamma_k, 0 \leq k < N$, は整数である。また、 $N-1$ は2進表現するとすべての桁が1であるから、

$$\gamma_{N-1-k} = \gamma_{N-1} - \gamma_k, 0 \leq k < N, \quad (6-4-12)$$

このことから、

$$\begin{aligned} \beta_{m-k-1, m-l-1} &= e^{2\pi i(N-l-1)\gamma_{N-k-1}} \\ &= e^{2\pi i\gamma_k \{\gamma_k^{(S)}\}^l} e^{-2\pi i(l+1)\gamma_{N-1}}, 0 \leq k, l < m, \end{aligned} \quad (6-4-13)$$

となる。これは、 $m \times m$ 置換行列

$$P_m := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix},$$

と $m \times m$ ユニタリ行列 $D_1 = \text{diag}(e^{2\pi i \gamma_k})_{k=0}^{m-1}$, $D_2 = \text{diag}(e^{-2\pi i(l+1)\gamma_{N-1}})_{k=0}^{m-1}$, によって,

$$P_m B P_m = D_1 V_m D_2,$$

が成立することを示す. $m < n$ であるから, 帰納法の仮定より, V_m の最小特異値は 1 で最大特異値は $\sqrt{N} = 2^{v(n)/2}$ 未満である. これと, 定理 6-4-4, 補題 6-4-6 より, V_n は最大特異値として, $n-m$ 個の $\sqrt{N} = 2^{v(n)/2}$ をもち, 最小特異値が 1 であることがわかる. //

6-7. Van der Corput 列上の補間の精度

2~4 章でみたように, 単位円周 \mathbf{S} の関数族, $\alpha(\mathbf{S})$, $C_R(\mathbf{S})$, $C_E(\mathbf{S})$, $C_O(\mathbf{S})$ における標本点集合 $Z \subset \mathbf{S}$ 上の補間の誤差特性を決定する 1 つの重要な要素は, 式(2-5-4)で定義された打ち切り誤差の拡大率 $\omega(Z)$ であった.

この節では, 単位円周 \mathbf{S} 上の Van der Corput 列の部分列 $\gamma_n = \{\gamma_k^{(\mathbf{S})}\}_{k=0}^{n-1}$, $n \geq 1$, について $\omega(\gamma_n^{(\mathbf{S})})$ を調べる. このことについて次の定理が成り立つ.

定理 6-5-1: 自然数 n の 2 進展開を $n = \sum_{l=1}^{v(n)} n_l 2^{l-1}$ とし, 数字が 1 となっている桁の数を

$$\|n\| := \sum_{l=1}^{v(n)} n_l, \quad (6-5-1)$$

で表わすと,

$$\omega(\gamma_n^{(\mathbf{S})}) = 2^{\|n\|} - 1, \quad n \geq 1, \quad (6-5-2)$$

となる.

この定理の証明のためにいくつか補助定理を証明する. 単位円周 \mathbf{S} 上の有限点集合を Z とするとき,

$$\psi_\alpha(Z; z) := L(Z)(z^\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{Z}, \quad (6-5-3)$$

とする. また, 多項式 $\psi_\alpha(Z; z)$ の巾級数展開係数の絶対値和を $\Psi_\alpha(Z)$ で表わすことにする. この記号により, ω の定義式 2-5-4 は,

$$\omega(Z) := \sup_{\alpha \geq |Z|} \Psi_\alpha(Z) = \sup_{\alpha \geq 0} \Psi_\alpha(Z), \quad (6-5-4)$$

とかける. 2 番目の等式は, $\Psi_\alpha(Z) = 1$, $0 \leq \alpha < |Z|$, と定理 2-5-1 の $\omega(Z) \geq 1$ より来る. 次の定理でわかるように, 標本点集合の原点を中心とした回転は ω の値を保存する.

定理 6-5-2: 単位円周 \mathbf{S} 上の有限集合と任意の $\tau \in \mathbf{S}$ に対して, $\omega(\tau Z) = \omega(Z)$.

(証明) 整数 α について

$$\psi_\alpha(Z; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k, \quad n = |Z|,$$

とおくと, 補間条件から,

$$\tau^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} c_k \tau^{-k} (\tau \zeta)^k = (\tau \zeta)^\alpha, \quad \zeta \in Z,$$

となる. すなわち,

$$\psi_\alpha(\tau Z; z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\tau^{\alpha-k} c_k) z^k,$$

である. これより直ちに,

$$\Psi_\alpha(\tau Z) = \Psi_\alpha(Z), \quad \alpha \in \mathbf{Z}, \quad (6-5-5)$$

$$\omega(\tau Z) = \sup_{\alpha \geq 0} \Psi_\alpha(\tau Z) = \sup_{\alpha \geq 0} \Psi_\alpha(Z) = \omega(Z),$$

を得る. //

系 6-5-3: 単位円周 \mathbf{S} 上の n 点集合 Z に対してある $\tau \in \mathbf{S}$ が存在し, τZ の要素がすべて 1 の m 乗根なら任意の整数 L に対して,

$$\omega(Z) = \sup_{Lm+n \leq \alpha < (L+1)m} \Psi_\alpha(Z), \quad (6-5-6)$$

である.

(証明) τZ の要素がすべて 1 の m 乗根なら

$$z^{\alpha+km} \equiv z^\alpha \pmod{\varphi(\tau Z; z)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

これより,

$$\psi_{\alpha+km}(\tau Z; z) = \psi_\alpha(\tau Z; z), \quad k \in \mathbf{Z},$$

を得る. これと式(6-5-5)より,

$$\Psi_{\alpha+km}(Z) = \Psi_{\alpha}(Z), k \in \mathbf{Z},$$

となり, $\Psi_{\alpha}(Z)$ は α について周期 m を持つ. さらに, 定理2-5-1より $\omega(Z) \geq 1$ で, 補間条件より $\Psi_{\alpha}(Z) = 1, 0 \leq \alpha < n$. このことから式(6-5-6)を得る. //

定理 6-5-4: 自然数 n の 2 進展開を $n = \sum_{l=1}^{v(n)} n_l 2^{l-1}$ とすると,

$$\varphi(\gamma_n^{(S)}; z) = \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)} (z^{2^l} + \{\gamma_n^{(S)}\}^{2^l}), \quad (6-5-7)$$

となる.

(証明) 自然数 n に関する帰納法を用いる.

$$\varphi(\gamma_n^{(S)}; z) = \varphi(\gamma_M^{(S)}; z) \varphi(\gamma_n^{(S)} - \gamma_M^{(S)}; z), M = 2^{v(n)-1}, \quad (6-5-8)$$

とすると, 式(6-5-4)より $\gamma_M^{(S)}$ は 1 含む等間隔点集合だから, $\varphi(\gamma_M^{(S)}; z) = z^M - 1$ であるが,

$$\{\gamma_n^{(S)}\}^M = \exp(2^{v(n)-1} 2\pi i \gamma_n) = \exp(2\pi i \frac{1}{2} n_{v(n)}) = -1,$$

より,

$$\varphi(\gamma_M^{(S)}; z) = z^M + \{\gamma_n^{(S)}\}^M = z^M - 1, \quad (6-5-9)$$

となる. すなわち, n が 2 の巾の場合には定理は成立する. n が 2 の巾でないとき,

$$n - M = \sum_{l=1}^{v(n)-1} n_l 2^{l-1} \text{ である. また, 式(6-3-3)より,}$$

$$\gamma_k = \gamma_{k-M} + 2^{-v(n)}, M \leq k < n < 2M,$$

すなわち,

$$\gamma_n^{(S)} - \gamma_M^{(S)} = \exp(2^{-v(n)+1} \pi i) \gamma_{n-M}^{(S)}, \quad (6-5-10)$$

が成立する. 一方, 帰納法の仮定より,

$$\varphi(\gamma_{n-M}^{(S)}; z) = \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)-1} (z^{2^l} + \{\gamma_{n-M}^{(S)}\}^{2^l}),$$

であるから, 式(6-5-10)より,

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_n^{(S)} - \gamma_M^{(S)}; z) &= \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)-1} (z^{2^l} + \{\exp(2^{-v(n)+1} \pi i) \gamma_{n-M}^{(S)}\}^{2^l}), \\ &= \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)-1} (z^{2^l} + \{\gamma_{n-M}^{(S)}\}^{2^l}), \end{aligned}$$

を得る. この式と式(6-5-8,9)より式(6-5-7)が示される. //

以上の準備により, 定理6-5-1を証明しよう.

(定理6-5-1の証明) 定理6-5-2より $Z_n := \gamma_n^{(S)} / \gamma_n^{(S)}, n \geq 1$, について

$$\omega(Z_n) = 2^{\|n\|} - 1, \quad (6-5-11)$$

を示せばよい. 自然数 n に関する帰納法を用いる. n が 2 の巾のときは, $\gamma_n^{(S)}$ と Z_n はともに等間隔点集合だから, 定理2-5-2より定理が成り立つことがわかる. 定理6-5-4より,

$$\varphi(Z_n; z) = \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)} (z^{2^l} + 1), n \geq 1,$$

である. $M = 2^{v(n)-1}$ とすると, $\gamma_n^{(S)}$ の要素はすべて 1 の $2M$ 乗根であるから, 系6-5-3より,

$$\omega(Z_n) = \sup_{0 \leq \alpha < 2M} \Psi_{\alpha}(Z_n), \quad (6-5-12)$$

となる. 同く $m = n - M < M$ に関して, 系6-5-3を適用して,

$$\omega(Z_m) = \sup_{n \leq \alpha < 2M} \Psi_{\alpha}(Z_m), \quad (6-5-13)$$

を得る. さて,

$$\varphi(Z_n; z) = (z^M + 1) \varphi(Z_m; z),$$

で, $n \leq \alpha \leq 2M$ に対して,

$$z^{\alpha} \equiv -z^{\alpha-M} \pmod{z^M + 1},$$

$$z^{\alpha} \equiv \Psi_{\alpha}(Z_m; z) \pmod{\varphi(Z_m; z)},$$

である. さらに,

$$z^M + 1 \equiv 2 \pmod{\varphi(Z_m; z)}, \equiv 0 \pmod{z^M + 1},$$

$$z^M - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(Z_m; z)}, \equiv -2 \pmod{z^M + 1},$$

であるから,

$$z^\alpha \equiv \frac{1}{2}(z^M - 1)z^{\alpha-M} + \frac{1}{2}(z^M + 1)\psi_\alpha(Z_m; z) \pmod{\varphi(Z_n; z)}, n \leq \alpha < 2M,$$

となる. これより,

$$z^\alpha \equiv -z^{\alpha-M} + (z^M + 1)\psi_\alpha(Z_m; z) \pmod{\varphi(Z_n; z)}, n \leq \alpha < 2M,$$

を得るが, 右辺の次数は, n 未満であるから,

$$\psi_\alpha(Z_n; z) = \psi_\alpha(Z_m; z) - z^{\alpha-M} + z^M \psi_\alpha(Z_m; z), n \leq \alpha < 2M,$$

となる. この式の右辺の3つの項は, それぞれ, $\psi_\alpha(Z_n; z)$ の巾級数展開の $0 \sim m-1$ 次, $\alpha-M$ 次, $M \sim M+m-1$ 次の項の和となっている. このことから,

$$\Psi_\alpha(Z_n) = 2\Psi_\alpha(Z_m) + 1, n \leq \alpha < 2M,$$

となる. したがって,

$$\omega(Z_n) = \sup_{n \leq \alpha < 2M} \Psi_\alpha(Z_n) = 1 + 2 \sup_{n \leq \alpha < 2M} \Psi_\alpha(Z_m) = 1 + 2\omega(Z_m).$$

この式及び, $m < n, \|n\| = \|m\| + 1$, と帰納法の仮定より式(6-5-11)を得る. //

注意: 1章3節の式(1-3-14, 15)より, 絶対収束する巾級数

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k,$$

に対する Z 上の補間多項式の誤差評価

$$\|L(Z)f - f\| \leq (1 + \omega(Z)) \sum_{k \geq n} |c_k|. \quad (6-5-14)$$

は一般には最良ではない. しかし, $Z = Z_n, n \geq 1$, とすると, 不等式(6-5-14)は最良である.

なぜなら, $f(z) = z^n$ とすると, $L(Z_n)f(z) = z^n - \varphi(Z_n; z)$ であるから,

$$\|L(Z_n)f - f\| = \|\varphi(Z_n; z)\| = \max_{z \in S} \left| \prod_{n_{l+1}=1, 0 \leq l < v(n)} (z^{2^l} + 1) \right| = \varphi(Z_n; 1) = 2^{\|n\|},$$

となり, 式(6-5-14)で等号が成立するからである. $Z = \gamma_n^{(s)}, n \geq 1$, でも, 不等式(6-5-

14)が最良であることも同じように証明できる.

結論

周期関数の補間近似には、これまで等間隔標本点集合がもっぱら用いられ詳しく研究されてきた。しかし、近似精度を上げるためには、標本点数を倍々にせざるを得ずきめ細かい精度コントロールができなかった。この論文では、任意に低い増加率で標本点数を増やし精度を上げてゆく計算効率の良い方法を提案した。すなわち、準等間隔点集合による再利用可能標本点集合列上の補間法である。従来の等間隔標本点集合を用いる方法は、われわれの方法に特殊例として含まれる。すなわち、我々がこの論文で準等間隔点集合の核とよんだ有限集合が、1点集合の場合である。

2章では、単位円周上の複素関数に対する多項式補間について述べた。

2章3節では、補間作用素の安定性と精度及び収束性の指標としてLebesgue定数について述べた。準等間隔標本点上の補間作用素のLebesgue定数は、標本点数 n に対して $O(\log n)$ であり、そのオーダーにおいて等間隔標本点上のLebesgue定数と一致することを証明した。このことは、我々の補間法の安定性と収束性を保証する。

2章4節では、準等間隔標本点上の多項式補間係数を求める高速アルゴリズムを導きその数値的安定性を解析した。我々のアルゴリズムは、等間隔標本点上の補間係数を求めるFFTの拡張になっておりそれに要する複素乗算回数は $\frac{1}{2}n \log_2 n + O(n)$ で、その主要項

$\frac{1}{2}n \log_2 n$ はFFTに要する複素乗算回数の主要項と完全に一致する。補間係数の計算は、関数標本値から補間多項式係数への線形変換であり、その数値的安定性は条件数により決定される。準等間隔標本点上の補間においては、条件数は標本点数によらず一定でその核によってのみ決まる。したがって、補間係数は標本点数によらず安定に計算できる。

2章5節では、関数のTaylor展開係数による補間誤差の評価を与えた。一般に、 $n-1$ 次補間多項式の誤差は、被近似関数の n 次以上のTaylor展開係数の絶対値和の定数倍で抑えられる。準等間隔標本点上の補間においては、この定数が標本点数によらず一定でその核によってのみ決まる。このことから、補間係数を用いた実用的な誤差評価法が与えられる。

2章6節では、準等間隔点集合を用いた再利用可能標本点集合列の構成法を提案した。この方法により、任意に低い増加率で標本点を増加させ精度を上げてゆく自動補間システムが設計できる。

3章では、2章の結果を単位円周上の複素関数の中級数補間に適用して同様の結果を得

た。この問題においても準等間隔標本点上の補間法は、良い安定性、精度、収束性を持ち、補間中級数の係数は高速かつ安定に計算できる。また、2章と同様に補間係数を用いた実用的な誤差評価法を示した。

4章では、単位円周上の実関数、実共役対称関数、実共役歪対称関数の中級数補間問題を扱った。これらの問題は、それぞれ実周期関数のFourier級数補間、実周期偶関数のcosine級数補間、実周期奇関数のsine級数補間の問題と等価であり、実周期偶関数のcosine級数補間の問題は、有限区間の実関数のChebyshev級数補間の問題と等価である。これらの問題においても、準等間隔標本点集合の補間法は、良い安定性、精度、収束性を持ち、補間中級数の係数は高速かつ安定に計算できる。また、補間係数を用いた実用的な誤差評価法が可能である。

5章では、4章の関数族に対して、その特殊性を考慮した高速補間アルゴリズムを導いた。実周期関数に対しては、その実数性を考慮することにより、計算量を半減させるアルゴリズムを構成した。実周期奇関数、実周期偶関数に対しては、その対称性を利用して計算量はさらに半減させることができた。

2、3、5章では、逆変換すなわち補間係数から関数標本値を復元する高速算法もそれぞれの関数族に対して構成した。

6章では、2章で示したさい利用可能標本点集合列を構成する再にも中心的な役割をはたす自己再利用性をもつ核を系統的に求める方法を示した。また、その特殊な、しかし有用な例としてVan der Corput列の有限部分列について詳しく分析した。

この論文では、単位円周上の関数近似を中心に準等間隔標本点集合上の補間法の特性を調べた。我々の補間法は、いろいろな面で等間隔標本点集合上の補間法の自然な拡張になっており、およそ等間隔標本点集合上の補間法が有効であるような分野においては等しく有効であると思われる。作用素近似法及び関数方程式の解法への応用はこれからの大きな課題である。また、この補間法を、より一般的な複素領域の関数近似の問題に拡張することも1つの発展方向である。

謝辞

本研究の遂行にあたり、多大なる御指導を賜りました名古屋大学工学部教授・鳥居達生先生に深甚なる感謝の意を表明します。

本論文の作成にあたり、有益な御助言をいただいた名古屋大学工学部助教授・三井斌友先生、名古屋大学工学部教授・細江繁幸先生に厚くお礼申し上げます。

また、著者を数値解析の分野に導いて下さった名古屋大学工学部名誉教授・二宮市三先生に深く感謝します。

本論文の重要な構成部分の共同開発者であり、著者の研究の全般にわたり協力していただいた櫻井鉄也名古屋大学工学部助手に心から感謝します。

参考文献

この文献表の文献は、本文から[第一著者 発表年度]の形で引用されている。同一著者同一年度の論文が複数ある場合には[第一著者 発表年度a],[第一著者 発表年度b]の様に年度の後には英字を添えて区別している。

- Bergland, G.D. (1968a) : A Fast Fourier Transform Algorithm Using Base 8 Iterations, *Math.Comp.* 22, pp.275-279.
- Bergland, G.D. (1968b) : A Fast Fourier Transform Algorithm for Real-Valued Series, *Comm. ACM*, Vol.11, No.10, pp.703-710.
- Brutman, L. and Pinkus, A. (1980) : On the Erdős Conjecture Concerning Minimal Norm Interpolation on the Unit Circle, *SIAM J.Numer.Anal.*, Vol.17, No.3, pp.373-375.
- Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R. (1960) : A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, *Numer. Math.*, Vol.23, pp.197-205 .
- Cooley, J.W. and Tukey, J.W. (1965) : An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Math. Comp.*, Vol.19, No.90, pp.297-301.
- Cooley, J.W., Lewis, P.A.W. and Welch, P.D. (1970) : The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Considerations in the Calculation of Sine, Cosine and Laplace Transforms, *J. Sound Vib.*, 12(3), pp.315-337.
- Córdova, A., Gautchi, W. and Rusheweyh, S. (1990) : Vandermonde Matrices on the Circle: Spectral Properties and Conditioning, *Numer. Math.* Vol.57, pp.577-591.
- de Boor, C. and Pinkus, A. (1978) : Proof of the Conjectures of Bernstein and Erdős Concerning the Optimal Nodes for Polynomial Interpolation, *J. Approx. Th.* 24, pp.289-303.
- Delves, L.M., Abd-Elal, L.F. and Hendry, J.A. (1979) : A Fast Galerkin Algorithm for Singular Integral Equations, *J. Inst. Maths Applics*, Vol.2, pp.139-166.
- Gentleman, W.M. (1972) : Implementing Clensaw-Curtis Quadrature, I. Methodology and Experience, *Comm.ACM* 15, pp.337-342.

- Gutknecht, M.H. (1979) : Fast Algorithms for the Conjugate Periodic Function, Computing, Vol.22, No.1, pp.79-91.
- Gutknecht, M.H. (1981) : Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, Numer. Math., Vol.36, No.4, pp.406-429.
- Haar, A. (1918) : Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an Stetige Funktionen, Math. Ann. 78, pp.294-311.
- Hasegawa, T., Torii, T. and Ninomiya, I. (1983) : Generalized Chebyshev Interpolation and Its Application to Automatic Quadrature, Math. Comp., Vol.41, No.164, pp.537-553.
- 長谷川武光, 鳥居達生 (1984a) : 激しい振動積分の自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.1, pp.116-124.
- 長谷川武光, 鳥居達生 (1984b) : コーシーの主値積分に対する自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.5, pp.857-863.
- 長谷川武光, 鳥居達生 (1985) : チェビシェフ級数展開と加速法による半無限振動積分, 情報処理学会論文誌, Vol.26, No.6, pp.985-993.
- Hasegawa, T. and Torii, T. (1987a) : Indefinite Integration of Oscillatory Functions by the Chebyshev Series Expansion, J. Comp. Appl. Math., Vol.17, No.1&2, pp.21-29 .
- 長谷川武光, 鳥居達生 (1987b) : 対数特異性をもつ関数の不定積分に対する自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol.28, No.9, pp.907-913.
- Hasegawa, T. and Torii, T. (1988) : Indefinite Integration of Function Involving Logarithmic Singularity by the Chebyshev Expansion, in International Series of Numerical Mathematics, Vol.86(Ed.), pp.193-200, Birkhäuser Verlag Basel.
- Hasegawa, T., Torii, T. and Sugiura, H. (1990) : An Algorithm Based on the FFT for a Generalized Chebyshev Interpolation, Math. Comp., Vol.54, No.189, pp.195-210.
- 伊理正夫, 韓太舜 (1977) : 線形代数, 教育出版.
- Jackson, D. (1930) : The Theory of Approximation, American Mathematical Society, Colloquium Publications, New York.

- Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1982) : Functional Analysis: Second Edition, Pergamon Press, Oxford, p.203.
- Kilgore, T.A. (1978) : A Characterization of the Lagrange Interpolating Projection with Minimal Tchebysheff Norm, J. Approx. Th. 24, pp.273-288.
- Kuipers, L. and Niederreiter, H. (1974) : Uniform Distribution of Sequences, John Wiley & Sons, New York.
- Kolmogoroff, A.N. (1948) : A Remark Concerning the Polynomials of P. L. Tchebysheff which Deviate the Least from a Given Function (Russian), Uspekhi Math. Nauk 3, pp.216-221.
- Meinardus, G. (1967) : Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods, Springer-Verlag, Berlin.
- Morgan, P. (1986) : An Introduction to Fast Fourier Transform Methods for Partial Differential Equations, with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- Oliver, J. (1972) : A Doubly-Adaptive Clenshaw-Curtis Quadrature Method, The Computer Journal, Vol.15, No.2, pp.141-147.
- Piessens, R., deDoncker-Kapenga, E., Überhuber, C.W. and Kahaner, D.K. (1983) : QUADPACK, A Subroutine Package for Automatic Integration, Springer-Verlag, Berlin.
- Reichel, L. (1989) : Fast Solution Methods for Fredholm Integral Equations of the Second Kind, Numer. Math. Vol.57, pp.719-736.
- Rivlin, T.J. (1974) : The Chebyshev Polynomials, John Wiley & Sons, New York.
- Sloan, I.H. and Smith, W.E. (1978) : Product-Integration with the Clenshaw-Curtis and Related Points: Convergence Property, Numer. Math., Vol.30, pp.415-428 .
- 宋殷志, 杉浦洋, 櫻井鉄也 (1989) : 数値等角写像におけるTheodorsen方程式の解法, 情報処理学会論文誌, Vol.30, No.4, pp.393-401.
- 孫春蘭, 鳥居達生 (1990) : 高橋, 森の数値積分理論のFFTによる実現, 情報処理学会論文誌, Vol.31, No.1, pp.10-15.
- Sugiura, H. and Sakurai, T. (1989) : On the Construction of High-Order

- Integration Formulae for the Adaptive Quadrature Method, J. Comp. Appl. Math., Vol.28, pp.367-381.
- Sugiura,H. and Torii,T.: Quasi-Stable Interpolation Process, (submitted).
- 杉浦洋、鳥居達生：準等間隔標本点上の三角多項式補間, 情報処理学会論文誌, Vol.32, No.2, 掲載予定.
- 杉浦洋、鳥居達生：準等間隔標本点上の実高速フーリエ変換, 情報処理学会論文誌, Vol.31, No.12, 掲載予定.
- Swarztrauber, P.N. (1985) : Symmetric FFTs, Math. Comp., Vol.47, No.175, pp.323-346.
- 鳥居達生 (1974a) : 高速sine変換, cosine変換とその数値積分への応用, 情報処理, Vol.15, No.9, pp.670-679.
- 鳥居達生 (1974b) : 離散型フーリエ変換の算法とその応用に関する研究, 大阪大学工学部博士論文.
- 鳥居達生, 長谷川武光, 二宮市三 (1978) : 等差数列的に標本数を増す補間的自動積分法, 情報処理, Vol.19, No.3, pp.248-255.
- 鳥居達生, 長谷川武光 (1983a) : 標本点数を低倍率で漸増させる実関数のFFT, 情報処理学会論文誌, Vol.24, No.3, pp.343-350.
- 鳥居達生, 長谷川武光 (1983b) : $\sqrt{2}$ 倍的に標本数を増す複素関数入力のFFT, 情報処理学会論文誌, Vol.24, No.6, pp.807-811.
- 鳥居達生, 杉浦洋 (1984) : 基数2のFFTに基づく任意項数の離散型Fourier変換, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.1, pp.30-36.
- Van der Corput, J.D.(1935) : Verteilungsfunktionen I-VIII, Proc. Akad. Amsterdam Vol.38, 813-821, 1058-1066(1935); Vol.39, 10-19, 19-26, 149-153, 339-344, 489-494, 579-590(1936)
- Vértesi, P. (1986) : On the Optimal Lebesgue Constants for Polynomial Interpolation, Acta Math. Hugar., 47, pp.165-178.
- Walsh, J.L. (1969) : Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. XX, American Mathematical Society(Fifth edition).
- Wegmann,R. (1978) : Ein Iterationsverfahren zur Konformen Abbildung, Numer. Math., Vol.30, No.4, pp.453-466.

- Wegmann,R. (1990) : Discretized Versions of Newton Type Iterative Methods for Conformal Mapping, J. Comp. Appl. Math., Vol.29, pp.207-224.
- Zygmund, A. (1959) : Trigonometric Series , 2nd ed., Vol.2, Cambridge University Press, London.

