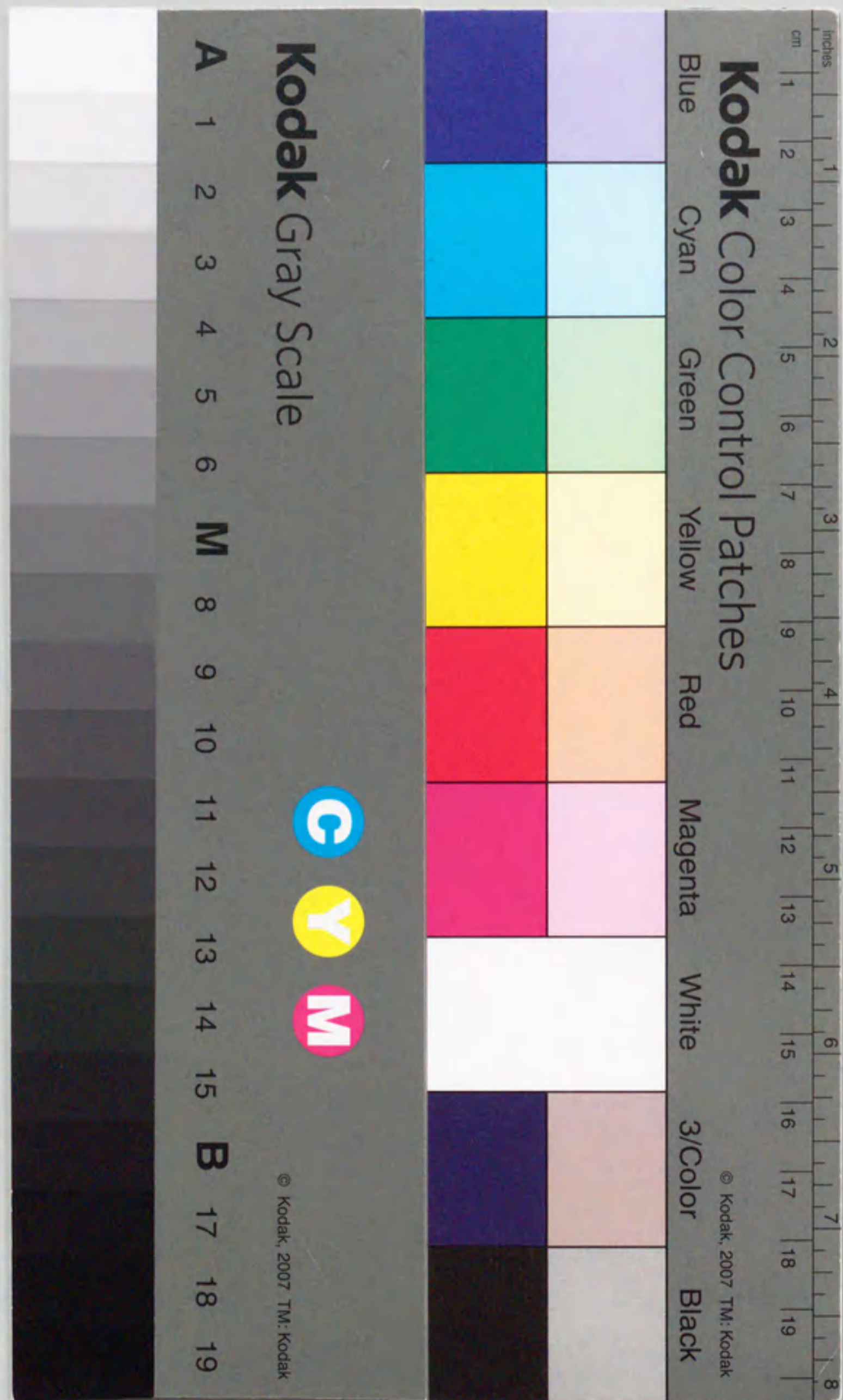


学位論文

複素 Ginzburg-Landau 方程式の渦力学

1993 年

松岡千博



1

# 複素 Ginzburg-Landau 方程式の渦力学

松岡千博

化学反応系や生態系などの非平衡散逸系に生じるパターンに、スパイラルと呼ばれる二次元位相渦がある。スパイラルは渦場の位相が渦半径に依存する渦で、その中心部分に場の振幅が0になる点があり、そこでは位相を定義することができない。この位相特異点は topological defect と呼ばれ、その点を内部に含むような閉曲線に沿って位相勾配を（線）積分すると、 $2\pi$ の整数倍だけの跳びが生じる。この整数は topological charge と呼ばれ、系の保存量である。

本論文では、スパイラルパターンを記述する、代表的な式である複素 Ginzburg-Landau 方程式を基本方程式として採用し、この topological defect を点渦として取り扱い、そのダイナミクスを議論した。まず空間を defect 近傍 (core region) と、defect から遠く離れた領域 (far field) とに分け、それぞれの領域で別々にもとの方程式の摂動展開を行った。その際、far field における場の変化はゆるやかなものであるとして、ゆっくり変化する時間、空間変数を導入すると、位相が Burgers 方程式に従って発展することが導かれた。

こうして導かれた far field の解ともとの方程式の時間、空間変数をそのまま用いて作った core region の解を、defect のまわりを回ると位相勾配の（線）積分に  $2\pi$ の整数倍だけの跳びが生じるという topological な境界条件の下に接続してやる。そうしてその可解条件から、渦の移動度テンソル及び運動方程式が得られた。

得られた方程式を用いて、二個の渦の安定性が調べられた。その結果、二個の渦は、charge の絶対値が等しく同符号の場合には、剛体回転をすることがわかった。しかしながら、この二個の渦は不安定であり、互いに反発し合って離れていこ

うとする。また、charge の絶対値が等しく異符号の場合には、この渦対は一定の  
スピードで渦どうしを結ぶ直線に垂直方向に伝播するという結果が得られた。同符  
号の場合と違い、異符号の場合には渦対の初期位置によっては安定な bound state  
を作る領域が存在することが示された。これは数値実験で得られた結果を定性的  
に説明するものであり、bound state の存在の有無に対する論争に理論的な解答を  
与えたものである。Bound state が形成されると、二個の渦は一定の渦間距離を保  
ちながら一方向に一定速度でドリフトする。これは実係数の Ginzburg-Landau 方  
程式の渦には見られない性質であり、スパイラル渦に特徴的なものであって、非平  
衡散逸系における安定な構造を与えるものとして大変興味深い。

bound state を作る  
なくともそういっ

領域の明示

## 目次

1. 緒論	4
2. 複素 Ginzburg-Landau 方程式の定常解	11
3. Outer 領域	14
4. Core 領域	19
5. 運動方程式の導出	23
6. 渦の線形安定性	26
7. 結論	27
参考文献	30
図説明	32

## 1. 緒論

高次元の非線形散逸系に生じる topological singularity を解析することは、系の振舞いを知る上で非常に重要である。Topological singularity は例えば interface[1] や kink[2]、渦 [3] といった形で現れる。これらの topological singularity は相転移の力学とも密接に関係しており、それらが生じた近傍で系はその様子を劇的に変化させる。上記の singularity のうち渦は特に topological defect (欠陥) と呼ばれる。この topological defect は二次元の系では点欠陥として、三次元の系では線欠陥として現れることが群論的考察からわかっている [4]。本論文ではこれらの topological defect のうち、特に二次元非平衡散逸系における渦を取り上げ、その力学を考察する。

二次元非平衡散逸系に生じる、回転するスパイラルパターンを記述する式として、複素係数を持った Ginzburg-Landau 方程式がある。この方程式は最初、分散関係式  $D(\omega, k, |\psi|^2) = 0$  ( $\omega$ : 振動数、 $k$ : 波数、 $\psi$ : 場の量) において、振動数  $\omega = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$  の虚数部分  $\omega_i$  が負 (安定モード) から正 (不安定モード) へと符号を変える近傍の流体力学的モード (Hopf bifurcation 近傍の流体力学的モード) を記述する式として導かれた。今、波数  $k = k_0$  における  $\omega_r = \omega_r(k_0, |\psi|^2 = 0) = \omega_0$ ,  $\omega_i = \omega_i(k_0, |\psi|^2 = 0) = \mu$ ,  $\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0}$  とし、 $k$  が  $k_0$  から

$\Delta k$  ( $\Delta k \ll 1$ ) だけずれたときの  $\omega$  の値を考える。 $\omega$  を  $k_0$  のまわりで Taylor 展開してやると

$$\omega \sim \omega(k_0, 0) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} \Delta k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{k_0} (\Delta k)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2} |\psi|^2 + \dots,$$

となるが、これは  $\omega(k_0, 0) = \omega_0 + i\mu$  を用いると

$$\omega - \omega_0 \simeq v_{g0} \Delta k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} \right) \Delta k^2 + \frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2} |\psi|^2 + i\mu,$$

と書ける。ここで  $v_{g0} = \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial k} \right)_{k_0}$  は一種の群速度に対応する。今、波として  $\psi(x, t)e^{i(k_0 x - \omega t)}$  なる形のものを考え、 $\omega - \omega_0 \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\Delta k \Rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$  と変換してやると、上式から

$$\left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (\omega_r'' + i\omega_i'') \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2} |\psi|^2 + i\mu \right] \psi = 0,$$

なる振幅方程式が得られる。ここでプライムは  $k$  微分を表わす。この式を二次元に拡張し、適当にスケールリングしてやると、複素 Ginzburg-Landau 方程式:

$$i\psi_t + p\Delta\psi + q|\psi|^2\psi = i\mu\psi,$$

が得られる。この方程式は、超伝導や超流動 ( $^3\text{He}$ ) 中に生じる渦を記述する実係数 Ginzburg-Landau 方程式及び、液晶 (nematic liquid crystal) 中の渦を記述する非線形 Schrödinger 方程式を特別な場合として含んでおり、その解の性質も両方の方程式の性質を反映したもの

となっている。複素 Ginzburg-Landau 方程式は Hopf bifurcation 後の非線形非平衡散逸系で生じる振動、回転といった、ほとんどの運動を記述することが可能であり、その汎用性から化学反応系や生態系におけるパターンのダイナミクスを記述する基本的な方程式として、多くの研究者によって採用されてきた [5-8]。

スパイラル渦は通常の渦と違い、渦場の位相が渦半径に依存するという性質を持つ。従って、渦巻線 (arm) は閉じないで無限遠まで伸びてゆくが、このスパイラルの中心に場の振幅が 0 になる点がある。これが defect の core に相当する部分である。この点を内部に含むような閉曲線に沿って位相勾配を積分してやると、位相に  $2\pi$  の整数倍だけの跳びが生じる。これは渦度が量子化されているということを意味しており、この整数は保存量であって、topological charge または winding number と呼ばれている。本論文では、この core に相当する部分を point vortex として取り扱い、そのダイナミクスを議論する。

外場が全くない場合、初期に置かれた一個の渦は、いつまでも静止しつづけるだろう。この状況に対応する stationary な数値厳密解は Greenberg[5] によって得られている。しかしながら、渦が多数存在する場合にはそれらは互いに相互作用し合い、複雑な時間発展をしてゆく。これら多数の渦の運動を無限次元の自由度を持った場の

量を直接計算することによって解析することは容易ではない。渦を point vortex 近似するということは、無限個の自由度を持った力学系を、離散的で有限自由度を持った力学系に reduce するということに対応しており、渦の運動は通常  $N$  階 ( $N$  は系に生じる渦の総数) の常微分方程式を解いて、個々の渦の位置座標を与えることによって決定できる。この渦の運動方程式を導くのに、ここでは漸近的な手法を用いる。渦核近傍においては系は複雑な振舞いをするが、core から遠く離れた領域においては場の変化はゆるやかなものであろう。従って、core 領域 (inner region) と core から離れた領域 (far field or outer region) とで時間、空間スケールを変えてやる、すなわち、far field においては場を記述するのにゆっくり変化する時間、空間変数を導入する。そしてそれぞれの領域 (inner region 及び outer region) で別々に構成した解を、適当な境界条件の下で '漸近的に' 接続してやる。この手法を通常 'matched asymptotic expansion' と呼ぶ。inner region と outer region の解はそれぞれ独立に作ったものであるから、一般には摂動展開が高次まで矛盾なく定まるという保証はない。解が逐次定まっていく為の条件を可解条件 (solvability condition) といい、この可解条件から、渦の移動度テンソル及び運動方程式が得られる。

第二章では、基本方程式となる複素 Ginzburg-Landau 方程式が与えられ、摂動展開の 0 次を用いられる代表的な定常解 (スパイラ

ルパターン解)の形が示される。

第三章では、ゆっくり変化する時間、空間変数を導入して、outer region (far field) における摂動展開を行う。ここで用いられる展開パラメーター $\epsilon$ は core 領域の大きさを特徴づける微小量である。

方程式の従属変数、すなわち場の量を、振幅と位相とに分け、それぞれを記述する方程式を導くと、outer region においては leading order では振幅は一定であり、位相は Burgers 方程式を満たすということが示される。位相には上述のように、defect の周りを一周すると、 $2\pi$ の整数倍だけの跳びが生じるという境界条件が付加されているが、この境界条件を考慮して Burgers 方程式のような、非線形方程式を解くことは容易ではない。そこで、方程式中の非線形項の係数が展開パラメーター $\epsilon$ よりさらに小さいという仮定をし、Burgers 方程式を拡散方程式に reduction して位相を求める。この reduction により、位相の関数形が解析的に求まる。その際、渦どうしの相互作用は弱いとし、渦のスピードは小さいと仮定すると、位相勾配が無窮遠での系の波数ベクトルに等しいという結果が得られる。位相勾配というのはすなわち、ポテンシャル勾配であるから、これは渦間に働く力(一種の摩擦力)を与えているものとみなすこともできる。

第四章では、core 領域における展開がなされる。core 領域では、もとの非線形方程式を直接解かねばならないので、explicit に解を求

めることは容易ではない。そこで outer 領域の解と漸近的につながるような matching condition を用いて、第五章では outer 領域における解と inner 領域の解との接続を行い、その可解条件から渦の移動度テンソル及び運動方程式を導く。実係数 Ginzburg-Landau 方程式及び非線形 Schrödinger 方程式の渦の運動方程式に関しては既にいくつか研究があるが [18][21]、複素係数 Ginzburg-Landau 方程式の渦の運動方程式を位相関数の解析的表示を使ってあらわに求めたものはこれまでなかった。これは、core 領域において摂動の一次の式を記述する微分演算子が、複素係数になると self-adjoint でなくなる為、可解条件を計算する際に空間積分が実行できないという難点があったからである。この数学的な困難さは、outer 領域の位相を Burgers 方程式から拡散方程式に reduction したことによって取り除かれる。こうして、可解条件を決定する積分を実行してやると、個々の渦の運動方程式がこの近似内においては積分定数まで含めて厳密に決定できる。得られた方程式は速度について非線形であって、通常の Euler 方程式あるいは非線形 Schrödinger 方程式の point vortex の運動方程式と異なり、Hamilton 形式に書くことはできない。

第六章では、渦の数が二個の場合について、その線形安定性が議論される。複素 Ginzburg-Landau 方程式の渦は、非線形 Schrödinger 方程式の渦と非線形拡散方程式の渦の両方を含んでいるので、その

運動も両者の性質を反映したものとなっている。二個の渦の charge が同符号の場合、渦どうしは剛体回転するが、この回転運動は不安定であり、二個の渦は反発し合って互いに離れていこうとすることが示される。前者は非線形 Schrödinger 方程式（あるいは Euler 方程式）の渦に固有の性質であり、後者は非線形拡散方程式の渦の性質を反映したものである。

また、二個の渦が異符号の場合、それらは一定のスピードで伝播し、互いに引き合おうとする傾向があることが示される。前者は非線形 Schrödinger 方程式の渦の持っている性質であり、後者は非線形拡散方程式の渦の持っている性質である。しかしながら、異符号の場合には、渦対の初期位置によっては、安定な bound state を形成する領域がある。この状態になると、二個の渦は一定の距離を保ったまま一方方向に一定速度でドリフトする。これは非線形 Schrödinger 渦と非線形拡散渦の効果のつりあったところであると考えられ、超伝導中などに生じる実係数の Ginzburg-Landau 方程式の渦にはない性質である。この bound state は数値実験で見つかった複素 Ginzburg-Landau 方程式の渦に固有のものであり [11]、その存在の信憑性については長い間論争がなされてきた。方程式の解が解析的に求まらないこともあって、これまで bound state の存在の有無は数値実験の結果から判断することに終始していたが、本論文はその存在を理論的に支持し

たものであるといえる。

第七章で結論を述べる。

## 2. 複素 Ginzburg-Landau 方程式の定常解

化学反応系や生態系などの非平衡な系に生じる二次元渦に、スパイラルと呼ばれる、渦場の位相が渦の半径に依存するようなパターンがある [9-11]。このようなスパイラルパターンにおいては、スパイラルの中心部分に場の振幅が 0 になる点があり、この点では位相が定義できない。この phase singularity point は一種の topological defect であり、その点を回ると位相に  $2\pi$  の整数倍だけの跳びが生じる。Topological defect のダイナミクスを知ることは、系の振舞いを理解する上で非常に重要である。

二次元のスパイラルパターンを記述する式として、複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGLE):

$$i\psi_t + p\Delta\psi + q|\psi|^2\psi = i\mu\psi, \quad (2.1)$$

がある。ここで  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$  は複素場、 $\mu$  は一種の bifurcation parameter で実数、 $p$  と  $q$  は  $p = p_r + ip_i$ 、 $q = q_r + iq_i$  で与えられる複素数である。 $\psi$  を

$$\psi = A(\mathbf{r}, t)\exp(i\omega t)$$

とにおいて、 $r, A$  を

$$r \rightarrow rL, \quad A \rightarrow A_0 A$$

とスケールし直すと、(2.1) は

$$\Delta A + (1 + i\delta')A - (1 + i\delta)|A|^2 A = -i\gamma A_t, \quad (2.2)$$

となる。ここで

$$\delta = (p_r q_i - p_i q_r) / (p_r q_r + p_i q_i),$$

$$\delta' = (p_r \mu - p_i \omega) / (p_r \omega + p_i \mu),$$

$$\gamma = L^2 (p_r - i p_i) / |p|^2,$$

$$A_0^2 = -|p|^2 / L^2 (p_r q_r + p_i q_i),$$

$$L^2 = -|p|^2 / (p_r \omega + p_i \mu),$$

であり、 $p_r q_r + p_i q_i$ 、 $p_r \omega + p_i \mu$  は負であると仮定する。特に、方程式 (2.2) において  $\delta = 0$  とし、 $\gamma$  の実数部分=0 とおくと、実係数 Ginzburg-Landau 方程式が、また、 $\gamma$  の虚数部分=0 とおくと、非線形 Schrödinger 方程式が得られる。

方程式 (2.2) は定常的なスパイラルパターン解を持ち、それは二次元極座標  $r = (r, \phi)$  を用いて

$$A = \rho(r) \exp(i n \phi - i \theta(r)), \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで振幅 $\rho(r)$ 、位相 $\theta(r)$ の漸近的な振舞いは

$$\rho(r) \rightarrow \alpha r^{|n|}, \quad \theta_r(r) \rightarrow 0,; \quad (r \rightarrow 0)$$

$$\rho(r) \rightarrow (1 - k^2)^{1/2}, \quad \theta_r(r) \rightarrow k; \quad (r \rightarrow \infty),$$

であり [12]、 $k$  は  $k^2 = 1 - \delta'/\delta$  を満たす定数、 $\alpha$  は実数、 $n$  は topological charge と呼ばれる整数である。 $|n| \geq 2$  の渦は力学的に不安定である (時間が経つと  $|n| = 1$  の複数個の渦に分裂し、互いに相互作用を始める) ということが分かっているので [12]、以下では  $|n| = 1$  の場合を取り扱う。振動数  $\omega$  (あるいは  $\delta'$ ) は  $r \rightarrow \infty$  における漸近的な波数  $k = k(\delta)$  を満たすように決められる。

このような系における渦どうしの相互作用は、様々な近似方法によって定性的に調べられてきたが [13-17]、渦の運動方程式をあらわに書き下したものはない。この論文ではスパイラルパターンの渦核 (core)、すなわち singular point を point vortex とみなし、個々の渦の運動方程式を与えてそのダイナミクスを議論した。我々は渦の運動方程式を導くのに、matched asymptotic expansion と呼ばれる摂動法を用いた。これは考える領域を inner region と outer region (core から遠く離れた領域) とに分け、それぞれの領域で構成した解を接続してやるもので、その可解条件から渦の運動方程式が求められた。

### 3. Outer 領域

第二章で述べた漸近的な手法を適用する上で、渦どうしの距離は  $O(1/\epsilon)$  であると仮定する。ここで  $\epsilon$  は core 領域の大きさを特徴づける微小 parameter であり、 $k^{-1}$ ,  $\delta^{-1}$  よりはるかに小さい、すなわち  $\delta \ll \epsilon \ll 1$  が成り立っているものとする。Outer region は inner region に比べ時間、空間変化がゆっくりであるとして次のようなスケールされた変数

$$\mathbf{X} = \epsilon \mathbf{x}, \quad T = \epsilon^2 t, \quad (3.1)$$

を導入する。

方程式 (2.2) の  $A$  を (2.3) の形におき、変数 (3.1) を用いると、 $A$  の振幅  $\rho$  と位相  $\Theta \equiv n\phi - \theta$  を記述する式は

$$\Delta \rho - \rho |\nabla \Theta|^2 + \epsilon^{-2} \rho (1 - \rho^2) = \gamma_i \rho_T + \gamma_r \rho \Theta_T, \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \rho \Delta \Theta + 2 \nabla \rho \cdot \nabla \Theta - \epsilon^{-2} \delta \rho (\rho^2 - 1 + k^2) \\ = -\gamma_r \rho_T + \gamma_i \rho \Theta_T, \end{aligned} \quad (3.2b)$$

で与えられる。ここで空間微分は  $\mathbf{X}$  についてとられている。さらに  $\rho$  と  $\Theta$  を

$$\rho = \rho^0 + \epsilon^2 \rho^2 + \dots, \quad (3.3a)$$

$$\Theta = \Theta^0 + \epsilon^2 \Theta^2 + \dots \quad (3.3b)$$

と $\epsilon$ で展開しておく。(3.3)を(3.2)に代入すると $\rho$ は

$$\rho = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.5)$$

で与えられることが分かる。位相 $\Theta$ はleading orderで

$$\Delta\Theta^0 + \delta|\nabla\Theta^0|^2 = (\gamma_i - \delta\gamma_r)\Theta_T^0 = 0, \quad (3.6)$$

なる Burgers タイプの方程式を満たす。今、 $\delta \ll \epsilon$ と仮定されているので、以下の解析では(3.6)をさらに

$$\Delta\Theta^0 - \gamma_i\Theta_T^0 = 0, \quad (3.7)$$

と近似する。以上よりleading orderにおけるouter regionの解 $A = A_o$ は

$$A_o = e^{i\Theta^0}, \quad (3.8)$$

で与えられることが分かる。

$N$ 個の渦の軌道を

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_j(T); \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

で表わし、

$$\Theta^0 = \Theta^0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_j(T)), \quad (3.9)$$

の形の(3.7)の解を探す。位相 $\Theta^0$ は

$$\oint_{C_j} \nabla\Theta^0 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n_j, \quad (3.10)$$

なる境界条件を満たす。ここで  $C_j$  は  $j$  番目の渦核をその内部に含む閉じた曲線であり、 $n_j$  は  $j$  番目の渦の charge で  $+1$  あるいは  $-1$  の値をとる。条件 (3.10) は、渦核のまわりを一周すると位相に  $2\pi$  (あるいは  $-2\pi$ ) だけの跳びが生じることを意味しており、これから渦核は singular point となっていることが分かる。

(3.9) の形から  $\theta^0$  の時間微分は

$$\theta_T^0 = -\dot{\mathbf{X}}_j \cdot \nabla \theta^0, \quad (3.11)$$

と書き換えられる。今、渦が  $Y$  方向に伝播しているとする、方程式 (3.7) は (3.11) を用いて

$$\Delta \theta^0 + V_j \theta_Y^0 = 0, \quad (3.12)$$

と書ける。ここで  $V_j = \gamma_i |\dot{\mathbf{X}}_j|$  は渦の伝播速度を表わす。位相  $\theta^0$  を

$$\theta^0 = \sum_j \theta_j^0, \quad (3.13)$$

と個々の渦場の和の形におくと、各  $\theta_j^0$  は

$$\Delta \theta_j^0 + V_j \theta_{jY}^0 = 0, \quad (3.14)$$

を満たす。条件 (3.10) を満たす (3.14) の解を求めることは容易ではない。従って、直接 (3.14) を解くかわりにここでは

$$\Phi_Y + V\Phi = -\Theta_X, \quad \Phi_X = \Theta_Y, \quad (3.15a)$$

$$V\Phi_Y + \Delta\Phi = 2\pi n\delta(X)\delta(Y), \quad (3.15b)$$

なる関係を満たす補助関数 $\Phi$ を導入し、 $\Phi$ について解を求め、(3.15a)を使ってそれを $\Theta$ に変換してやることを考える[18]。尚、簡単のためここでは $\Theta$ の添字 $j, 0$ を落とした。(3.15)が(3.10)を満たす(3.14)の解を求めることと等価であるということは

$$\Theta_{XX} + \Theta_{YY} = -\Phi_{YX} - V\Phi_X + \Phi_{XY} = -V\Theta_Y,$$

$$\begin{aligned} \oint_C \nabla\Theta \cdot d\mathbf{l} &= \oint \Theta_X dX + \Theta_Y dY = \int \int (-\Theta_{XY} + \Theta_{YX}) dX dY \\ &= \int \int (\Phi_{YY} + V\Phi_Y + \Phi_{XX}) dX dY = 2\pi \int \int \delta(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 2\pi n, \end{aligned}$$

よりただちに分かる。方程式(3.15b)の解 $\Phi$ は

$$\Phi = -n \exp\left(-\frac{VR\sin\phi}{2}\right) K_0\left(\frac{|V|R}{2}\right), \quad (3.16)$$

で与えられる。ここで $K_0$ は零次の変形ベッセル関数であり、 $(R, \phi)$ なる極座標を用いた。(3.15a)と(3.16)より

$$\begin{aligned} \Theta_X &= -(\Phi_Y + V\Phi) \\ &= \frac{n}{2} \exp\left(-\frac{VR\sin\phi}{2}\right) \left[ V K_0\left(\frac{|V|R}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - |V| \sin\phi K_1\left(\frac{|V|R}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \Theta_Y &= \Phi_X \\ &= \frac{n|V|}{2} \exp\left(-\frac{VR\sin\phi}{2}\right) \cos\phi K_1\left(\frac{|V|R}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.17b)$$

となる。ここで  $K_1$  は一次の変形ベッセル関数である。(3.17) を用いると  $\Theta$  は

$$\begin{aligned}\Theta &= \int \Theta_X dX + \Theta_Y dY \\ &= \frac{nVR}{2} \cos\phi \left(1 - c - \ln \frac{|V|R}{4}\right) + n\phi + f(T),\end{aligned}\quad (3.18)$$

で与えられる。ここで  $c$  は Euler 定数で  $\sim 0.577\dots$  であり、 $f(T)$  は時間のみの関数である。また、(3.18) を計算するにあたって

$$\begin{aligned}K_0\left(\frac{|V|R}{2}\right) &\sim -\left(c + \ln \frac{|V|R}{4}\right), \quad (R \rightarrow 0), \\ K_1\left(\frac{|V|R}{2}\right) &\sim \frac{2}{|V|R}, \quad (R \rightarrow 0),\end{aligned}$$

なる関係を用いた。渦の伝播方向が任意であるとし、(3.13) を考慮すると  $\Theta^0$  は結局

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \sum_j \Theta_j^0 = \sum_j \left[ n_j \phi_j + \frac{n_j}{2} J \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{R}_j \left( \ln \frac{V_j R_j}{4} + c - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + N_j \cdot \mathbf{R}_j + f_j(T) \right],\end{aligned}\quad (3.19)$$

で与えられる。ここで

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{X} - \mathbf{X}_j, \quad \mathbf{V}_j = \gamma_i \dot{\mathbf{X}}_j, \quad V_j = |\mathbf{V}_j|, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

であり、 $f_j(T)$  は具体的には

$$f_j(T) = \sum_{k \neq j} \Theta_j^0(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k),$$

で与えられる。また、(2.5b)を考慮して $\nabla\theta^0$ は $R \rightarrow \infty$ で定数ベクトル $N_j$ に近づくという条件が付け加えられている。ここで $N_j$ は

$$N_j = \left( \sum_{k \neq j} \nabla \theta_k^0 (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_j}, \quad (3.20)$$

であり、 $\theta_j^0$ を $\mathbf{X} = \mathbf{X}_j$ のまわりで展開したときの一次の係数となっている。

#### 4. Core 領域

今度は core 領域を考えよう。 $A = A(\mathbf{x}, T)$ を

$$A = A^0 + \epsilon A^1 + \dots,$$

と展開し、方程式(2.2)に代入すると、 $A^0$ について

$$\Delta A^0 + A^0 - |A^0|^2 A^0 = 0, \quad (4.1)$$

なる式が得られる。 $r \rightarrow \infty$ としたとき outer region につながるような(4.1)の渦解は Greenberg の解として知られており [19]、

$$A^0 \equiv A_G = \rho_G e^{in_j \phi_j} \sim \left( 1 - \frac{n_j^2}{2r^2} \right) e^{in_j \phi_j} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (4.2)$$

なる形をしている。 $A^1$ は

$$L A^1 = i \gamma \hat{x}_j \cdot \nabla A_G. \quad (4.3)$$

を満たす。ここで  $L$  は任意関数  $u$  について

$$Lu = \Delta u + u - 2|A_G|^2 u - A_G^2 \bar{u}, \quad (4.4)$$

で与えられる演算子である。

次に、outer 領域における leading order 展開  $A_o$  と core 領域における展開  $A_G + \epsilon A^1$  とが  $1 \ll r_j \ll 1/\epsilon$  なる領域で漸近的に matching するという条件を課す。すなわち

$$A_G + \epsilon A^1 - A_o = \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

ここで  $r_j$  は  $r_j = x - \frac{X_j}{\epsilon} = x - x_j$  である。位相  $\Theta$  を (3.1) を用いて inner 領域における座標に書き換えると

$$\begin{aligned} \Theta^0 = \sum_j \Theta_j^0 = \sum_j \left[ n_j \phi_j + \frac{n_j}{2} J \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_j \left( \ln \frac{v_j r_j}{4} + c - 1 \right) \right. \\ \left. + N_j \cdot \mathbf{r}_j \right] + \text{higher order}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。ここで

$$\mathbf{v}_j = \gamma_i \hat{\mathbf{x}}_j; \quad v_j = |\mathbf{v}_j|,$$

である。(4.2) と (4.6) より matching condition は

$$A^1 = i e^{i n_j \phi_j} \left[ \frac{n_j}{2} J \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_j \left( \ln \frac{v_j r_j}{4} + c - 1 \right) + N_j \cdot \mathbf{r}_j \right], \quad (4.7)$$

で与えられる。

## 5. 運動方程式の導出

今度は非同次問題 (4.3) の可解条件を考えよう。同次方程式

$$Lu = 0,$$

の解は

$$u = \hat{e} \cdot \nabla A_G, \quad (5.1)$$

で与えられる。ここで  $\hat{e}$  は任意の単位ベクトルである。渦の運動方程式は一般化された Green の公式

$$\int \int_S \text{Re}(u \overline{LA^1} - A^1 \overline{Lu}) dS = \oint_\Gamma \text{Re}(u \overline{\partial_n A^1} - A^1 \overline{\partial_n u}) dl, \quad (5.2)$$

に (4.7)、(5.1) を代入し、(5.2) が恒等的に成り立つという条件（可解条件）から得られる。ここで  $S$  は  $j$  番目の渦核をその内部に含む二次元領域であり、 $\Gamma$  は  $S$  の境界を表わす。また、 $\partial_n$  は  $\Gamma$  上での法線方向の微分であり、外向きを正とする。 $dl$  は  $\Gamma$  に沿った線要素である。(5.2) の積分を実行すると、可解条件から渦の運動方程式は

$$2N_j = M_j v_j, \quad (5.3)$$

で与えられることが分かる。ここで  $M_j$  は

$$M_j = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & n_j \ln \frac{v_j}{v_0} \\ -n_j \ln \frac{v_j}{v_0} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma} = \gamma_r / \gamma_i,$$

$$v_0 = 4 \exp\left(\frac{\alpha_j}{n_j^2} + \frac{1}{2} - c\right),$$

$$\alpha_j = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{r_0} \left( \rho_{Gr}^2 + \frac{n_j^2 \rho_G^2}{r^2} \right) r dr - n_j^2 \ln r_0 \right],$$

である。尚、 $v_0$ ,  $\alpha_j$  は  $|n_j| = 1$  の場合には

$$v_0 \sim 3.29,$$

$$\alpha_j \sim -0.12,$$

で与えられることがわかっている [18, 20]。

関係式 (3.20) を使うと、運動方程式 (5.3) は

$$M_j \mathbf{v}_j = \sum_{k \neq j} n_k \exp\left(-\frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_{jk}}{2}\right) J \left[ v_k \frac{r_{jk}}{r_{jk}} K_1\left(\frac{v_k}{2} r_{jk}\right) - v_k K_0\left(\frac{v_k}{2} r_{jk}\right) \right], \quad (5.4)$$

と書くことができる。ここで

$$\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k; \quad r_{jk} = |\mathbf{r}_{jk}|$$

である。 $\gamma_i = 0$  とすると、方程式 (5.4) の  $M_j$  は

$$M_j = \gamma_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

の形の対角行列となり、 $\gamma_r = 0$  とすると

$$M_j = -n_j \ln \frac{v_j}{v_0} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -n_j \ln \frac{v_j}{v_0} J, \quad (5.6)$$

となる。方程式(2.2)から $\gamma_i = 0$ の時CGLEは非線形Schödinger方程式となり、 $\gamma_r = 0$ の時、非線形拡散方程式(通常のTime Dependent Ginzburg-Landau方程式; TDGL)となることが分かる。運動方程式(5.4)はこの二つの場合を拡張したものとなっており、Neu[21]が導いた非線形Schödinger方程式と非線形拡散方程式の渦の運動方程式を、特別な場合として含んでいる。

$N = 2$ の場合には、方程式(5.4)は

$$\tilde{\gamma}v_{1\parallel} + n_1 \ln \frac{v_1}{v_0} v_{1\perp} = n_2 \exp\left(-\frac{r}{2}v_{2\parallel}\right) K_0\left(\frac{|v_2|}{2}r\right) v_{2\perp}, \quad (5.7a)$$

$$\tilde{\gamma}v_{2\parallel} + n_2 \ln \frac{v_2}{v_0} v_{2\perp} = n_1 \exp\left(\frac{r}{2}v_{1\parallel}\right) K_0\left(\frac{|v_1|}{2}r\right) v_{1\perp}, \quad (5.7b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}v_{1\perp} - n_1 \ln \frac{v_1}{v_0} v_{1\parallel} &= n_2 \exp\left(-\frac{r}{2}v_{2\parallel}\right) \left[ K_1\left(\frac{|v_2|}{2}r\right) |v_2| \right. \\ &\quad \left. - K_0\left(\frac{|v_2|}{2}r\right) v_{2\parallel} \right], \end{aligned} \quad (5.7c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}v_{2\perp} - n_2 \ln \frac{v_2}{v_0} v_{2\parallel} &= -n_1 \exp\left(-\frac{r}{2}v_{1\parallel}\right) \left[ K_1\left(\frac{|v_1|}{2}r\right) |v_1| \right. \\ &\quad \left. + K_0\left(\frac{|v_1|}{2}r\right) v_{1\parallel} \right], \end{aligned} \quad (5.7d)$$

となる。ここで

$$r = |\mathbf{r}_{12}|; \quad v_{j\parallel} = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_{12}/r, \quad v_{j\perp} = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{J}\mathbf{r}_{12}/r,$$

であり、 $v_{j\parallel}$ は二個の渦を結ぶ直線に平行な速度成分を、 $v_{j\perp}$ はそれに垂直な方向の速度成分を表わしている。

## 6. 渦の線形安定性

このセクションでは、二個の渦の安定性を議論する。その為にまず、方程式 (5.7) において  $r = \text{constant} \equiv l$  となるような解を探す。 $n_1 n_2 = 1$ 、すなわち二個の渦が同符号の場合には、方程式 (5.7) は

$$v_{1\parallel} = v_{2\parallel} = 0, \quad v_{1\perp} = -v_{2\perp} \equiv V, \quad (6.1)$$

なる解を持つ。ここで  $V$  は定数である。 $v_{j\parallel}$ 、 $v_{j\perp}$  の定義より、(6.1) はある固定点のまわりに一定速度  $V$  で回転している解を表わしていることが分かる。 $n_1 n_2 = -1$ 、すなわち二個の渦が異符号の場合は、方程式 (5.7) は

$$v_{1\parallel} = v_{2\parallel} = 0 \quad v_{1\perp} = v_{2\perp} = V', \quad (6.2)$$

なる解を持つ。ここで  $V'$  は定数であり、(6.2) は二個の渦が一定速度  $V'$  で、それらを結ぶ直線に垂直な方向に伝播している解を表わしている。今  $V = V'$  とし、解 (6.1)、(6.2) を方程式 (5.7) に代入すると

$$\ln \frac{|V|}{v_0} = -K_0(z), \quad z = K_1^{-1}(|\tilde{\gamma}|); \quad z = \frac{l|V|}{2}. \quad (6.3)$$

なる関係が得られる。以下では解 (6.1)、(6.2) を零次にとって、その線形安定性を調べてみよう。

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}^0 + \tilde{\mathbf{r}}; \quad |\mathbf{r}^0| = l,$$

$$v_j = v_j^0 + \tilde{v}_j,$$

とおき、(5.7)に代入する。ここで $\sim$ は摂動を表わす。

同符号の場合には

$$\tilde{v}_{1\parallel} = -\tilde{v}_{2\parallel}, \quad \tilde{v}_{1\perp} = -\tilde{v}_{2\perp}; \quad \tilde{r} = \tilde{r}_0 \exp(\alpha t), \quad (6.4)$$

$$\tilde{r} \propto \tilde{v}_{j\parallel}, \quad \tilde{r} \propto \tilde{v}_{j\perp}; \quad (j = 1, 2), \quad (6.5)$$

なる結果が得られる。ここで $\tilde{v}_j = |\tilde{v}_j|$  ( $j = 1, 2$ )、 $\tilde{r} = |\tilde{r}|$ であり、 $\tilde{r}_0$ は定数である。また、 $\alpha$ は

$$\alpha = \frac{2z|V|}{Dl} [K_1(K_1 - zK_0) - K_1'(1 - zK_1)], \quad (6.6)$$

$$D = -(K_0^2 + K_1^2)z^2 + zK_1 + K_1^2, \quad (6.7)$$

で与えられる。ここで $K_j$  ( $j = 1, 2$ )の引数は(6.3)で与えられている $z$ であり、プライムは $z$ 微分を表わす。(6.5)を用いて $\alpha$ を $z$ の関数として表わした結果を図1に示す。 $z \rightarrow +0$ で $\alpha \rightarrow +0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で $\alpha \rightarrow \frac{2|V|}{l}$ であり、 $0 < z < \infty$ で $\alpha$ は常に正、従って解(6.1)は不安定である。また、(6.4)の $\tilde{v}_{1\parallel}$ と $\tilde{v}_{2\parallel}$ の関係から、二個の渦は互いに反発しあうということが分かる。

異符号の場合には

$$\tilde{r} = \tilde{r}_0' \exp(\beta t), \quad (6.8)$$

$$\tilde{r} \propto \tilde{v}_{j\parallel}, \quad \tilde{r} \propto \tilde{v}_{j\perp}; \quad (j = 1, 2), \quad (6.9)$$



1870-1871  
1872-1873

1874-1875  
1876-1877

1878-1879  
1880-1881

1882-1883  
1884-1885

1886-1887  
1888-1889

1890-1891  
1892-1893

$$\beta = -\frac{2z|V|}{Bl(K_0 + zK_1)^2} [K_1'(K_1^2 - z^2K_0^2 + zK_1 - zK_0K_1) \times \\ (zK_1 + 1 - K_0) + (K_0 + zK_1^2)^2], \quad (6.10)$$

$$B = -\frac{1}{K_0 + zK_1} \left[ [zK_1'(zK_0 - K_1) - (1 - K_0)(zK_1 + 2K_0)] \times \right. \\ \left. (K_1^2 - z^2K_0^2 + zK_1 - zK_0K_1) + (K_0 + zK_1)^2 \right], \quad (6.11)$$

となる。ここで  $\tilde{r}'_0$  は定数である。 $\beta$  を  $z$  の関数として表わした結果を図 2 に示す。 $z \rightarrow +0$  で  $\beta \rightarrow -0$ 、 $z \rightarrow \infty$  で  $\beta \rightarrow \infty$  であり、ある  $z$  の値で  $\beta$  の正負が変わる。 $\beta$  が負の時は摂動は成長しないから、渦対は初期に与えた渦間距離を保ち続ける。すなわち、渦どうしを結ぶ直線に平行な方向の速度成分は存在しない。これは一種の bound state を形成していることに相当している。この時 (6.3) より、渦対には一定速度  $V$  のドリフトがあることが分かる。 $V$  は  $l$  の関数であり、 $l$  は  $\tilde{\gamma} = \gamma_r/\gamma_i$  (方程式の係数) を変えると変わるが、(6.3) より、一つ  $\tilde{\gamma}$  を決めてやると、速度の平行成分を 0 にする  $l$  の値 (すなわち bound state を作る  $l$  の値) は、その値については必ず一つ定まることが分かる。これは Aranson 等の結果 [16] と定性的に等しい。



## 7. 結論

非線形非平衡散逸系に現れる topological defect は、系におけるパターンの構造形成に重要な役割を果たす。これらは topological な保存量を持つ為に多くの場合安定であり、そのダイナミクスを調べるにより、系の長時間にわたる振舞いを知ることができる。

本論文では、化学反応系や生態系などの非平衡な系に生じる、二次元のスパイラル渦を記述する式として複素 Ginzburg-Landau 方程式を取り上げ、漸近的な手法を用いて、その渦の運動を議論した。ここで用いた摂動法は 'matched asymptotic expansion' と呼ばれるもので、考えている系がある狭い領域でのみ劇的に変化し、それ以外の領域では変化がゆるやかであるような場合に特に有効な手法である。この手法を使って、系を変化の激しい領域 (core 領域) と、変化のゆるやかな領域 (outer 領域) とに分け、それぞれの領域で解を構成してやり、その二つの解がなめらかにつながるように接続した。さらに、解の可解条件から、渦の移動度及び運動方程式を与える式を導いた。これらは複素係数の Ginzburg-Landau 方程式に関しては、初めて explicit に与えられたものである。

特に、二個の渦の場合についてその安定性が議論され、その結果、二個の渦の topological charge の符号が同じで大きさが等しい場合に

は、渦は不安定であり、互いに剛体回転をしながら反発し合うということがわかった。また、異符号の場合（渦対の場合）には、二個の渦は一定速度で一方向にドリフトし、一般には引き合って不安定だが、渦の初期配置によっては安定な bound state を生じることがあることがわかった。Bound state が形成されると、渦対は一定の渦間隔を保って一定方向に伝播する。これは複素 Ginzburg-Landau 方程式が非線形 Schrödinger 方程式の性質を含んでいることの反映であり、超伝導中の defect を記述する実係数の Ginzburg-Landau 方程式の渦の場合と大きく異なる点である。二個の渦が同符号の場合には不安定であり、異符号の場合には安定である、ということについての定性的な結果は Rica と Tirapegui によっても与えられた [22]。しかしながら、彼らの採った手法はかなり直感的なものであり、異符号の渦対は常に安定であると結論付けていて、bound state の存在が方程式の係数によるかどうかに関する詳細な議論は行っていない。本論文では、渦の運動方程式を解くことによりこの bound state の存在を理論的に導いた。これは非平衡散逸系においても安定な構造が存在し得るという、興味深い結果を与えるものとなっている。

## 謝辞

本研究を、名古屋大学大学院理学研究科博士課程後期の大学院生として始めて以来、御指導ならびに御助言を頂きました非線形物理研究室の野崎一洋助教授に感謝致します。

また研究室の研究活動を通じての様々な議論に対して、研究室の構成員の各氏（小西哲郎、森口博文、石井雅治、山田裕康、林浩）に感謝致します。

参考文献

- [1] K. Kawasaki and T. Ohta: Prog. Theor. Phys. **62** (1982), 147.
- [2] K. Kawasaki and T. Ohta: Physica A **116** (1982), 573.
- [3] K. Kawasaki: Physica A **119** (1983), 17.
- [4] N. D. Mermin: Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 591.
- [5] J. M. Greenberg: SIAM J. Appl. Math. **30** (1976), 199.
- [6] Y. Kuramoto and T. Yamada: Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 679.
- [7] Y. Kuramoto and T. Yamada: Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 724.
- [8] D. S. Cohen, J. C. Neu and R. R. Rosales: SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 536.
- [9] A. N. Zaikin and A. M. Zhabotinsky: Nature **225** (1970), 535.
- [10] Y. Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulences*, Synergetics vol. **19** (springer, 1984).

- [11] H. Sakaguchi: Prog. Theor. Phys. **82** (1989), 7.
- [12] P. S. Hagan: SIAM J. Appl. Math. **42** (1982) 762.
- [13] S. Rica and E. Tirapegui: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 878.
- [14] S. Rica and E. Tirapegui: Physica D **48** (1991) 396.
- [15] L. M. Pismen and A. A. Nepomnyashchy: Phys. Rev. A **44** (1991) R2243.
- [16] I. S. Aranson, L. Kramer and A. Weber: Physica D **53** (1991) 376.
- [17] C. Elphick and E. Meron: Physica D **53** (1991) 385.
- [18] L. M. Pismen and J. D. Rodriguez: Phys. Rev. A **42** (1990) R2471.
- [19] J. M. Greenberg: SIAM J. Appl. Math. **39** (1980) 301.
- [20] E. Bodenschatz, W. Pesch and L. Kramer: Physica D **32** (1988) 135.
- [21] J. C. Neu: Physica D **43** (1990) 385.
- [22] S. Rica and E. Tirapegui: Phys. Lett. A **161** (1991) 53.

図説明

図1: 同符号の場合 (式 (6.6) における $\alpha$ ) ;  $z \rightarrow +0$  で  $\alpha \rightarrow +0$ 、 $z \rightarrow \infty$  で  $\alpha \rightarrow \frac{2|V|}{l}$ .

図2: 異符号の場合 (式 (6.10) における $\beta$ ) ;  $z \rightarrow +0$  で  $\beta \rightarrow -0$ 、 $z \rightarrow \infty$  で  $\beta \rightarrow \infty$ .

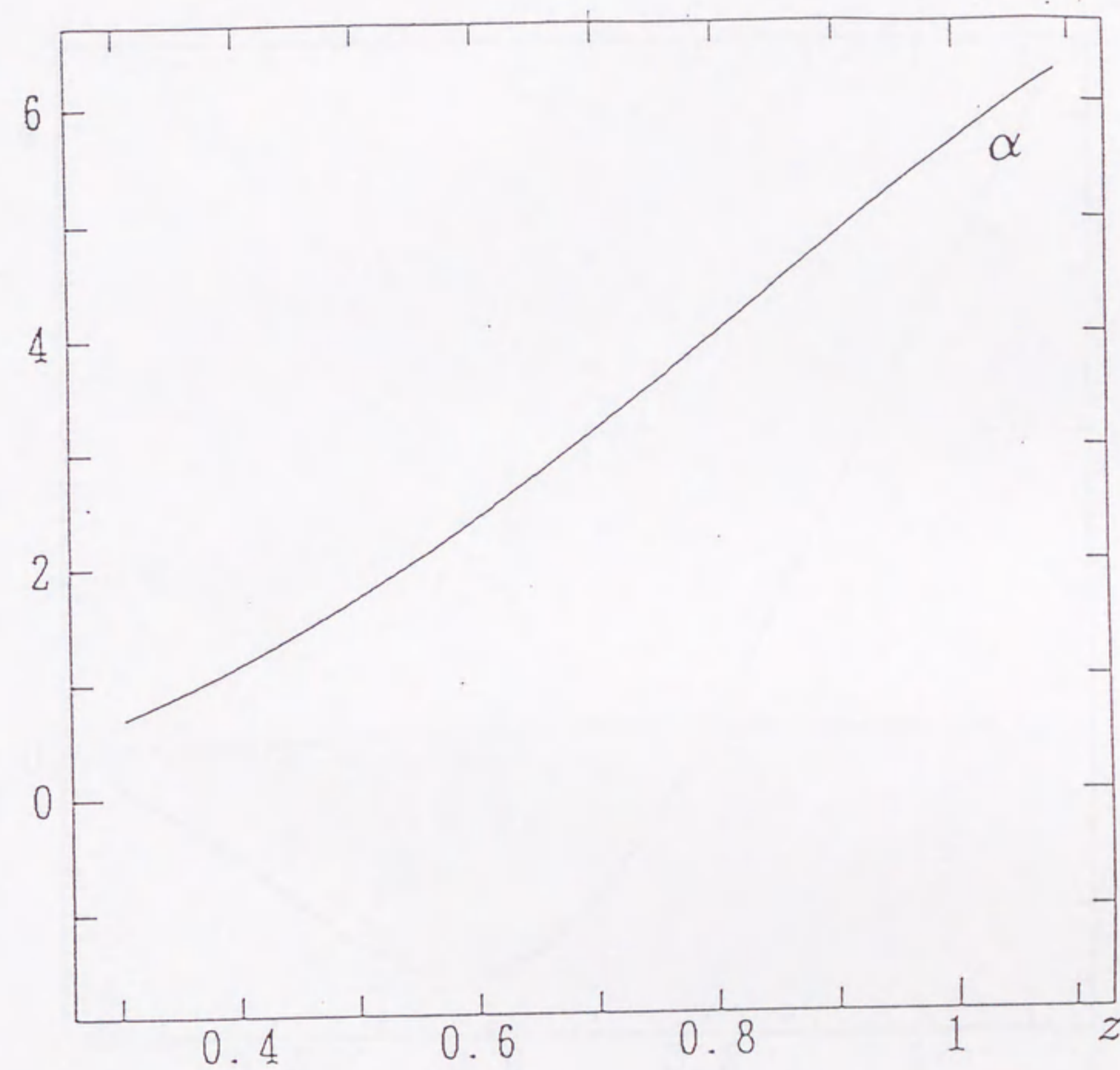


图 1

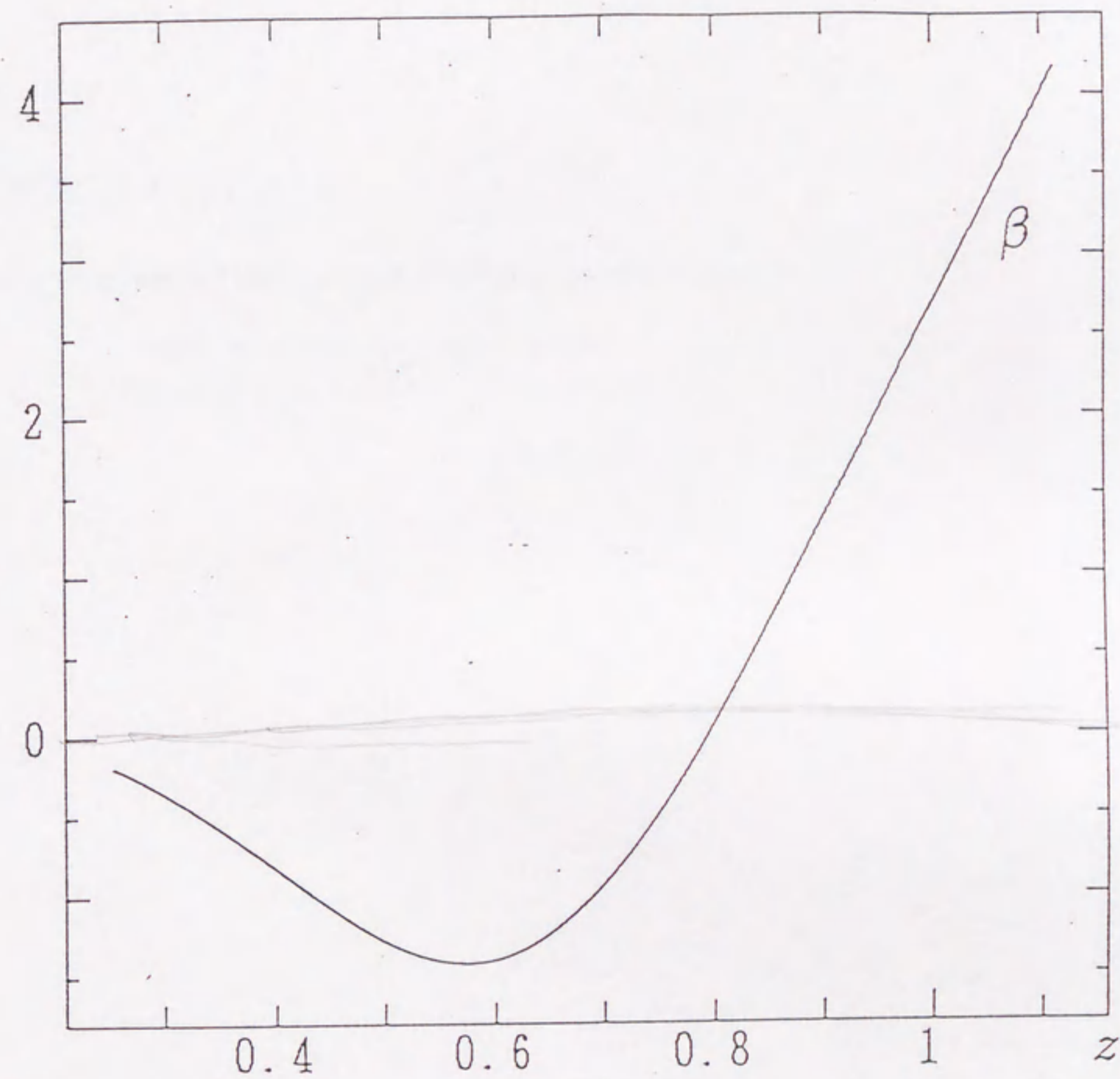
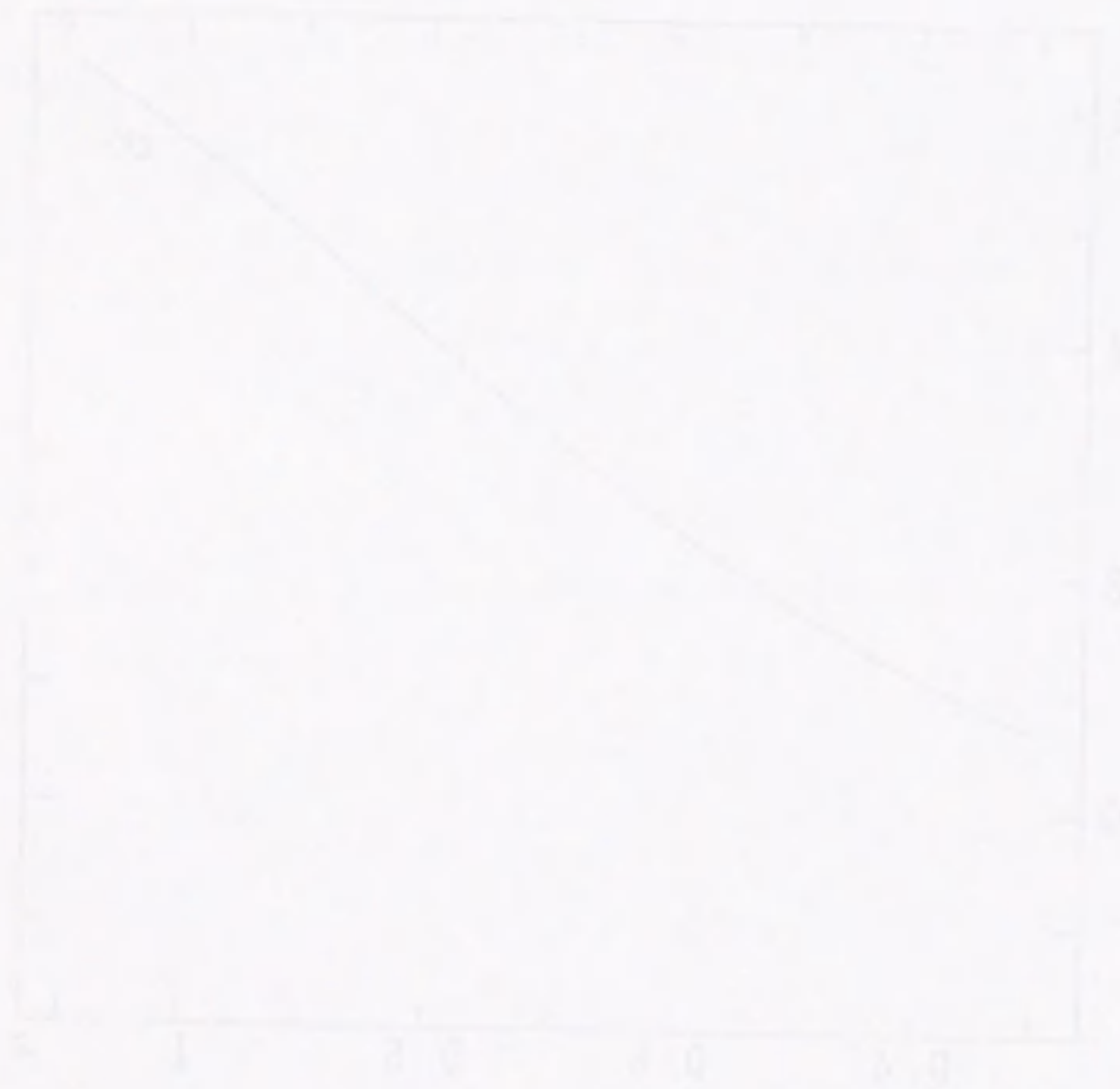


图 2

$$z = \frac{\lambda |v|}{2}$$

一定速度  $v$  时  
回弹距离

$\ell$ : 滑回距离

$$v = v' \text{ 或 } v' \text{ 或 } v''$$