4924
報告番号 甲第 ~~4925~~ 号

学位論文

IIB 行列模型の相関関数のN依存性

２０００年

狐崎 直文

①

報告番号 甲第 号

IIB 行列模型の相関関数の N 依存性

狐崎直文*

*Email address: kitsune@eken.phys.nagoya-u.ac.jp

Abstract

IIB matrix model は超弦理論を非摂動的に定式化した理論だと考えられている。このことが正しくて、さらに我々の知っている物理の理論が本当に超弦理論の有効理論として導くことができるのであれば、IIB matrix model の有効理論として素粒子の標準理論や Einstein の重力理論を導くことができると期待される。しかしながら、いまだに IIB matrix model の真空がどのようなものかが解っていないため IIB matrix model の有効理論を具体的に作る方法が解かっていない。我々は、定式化の方法が真空を探す為には IIB matrix model と等価ではあるがよりふさわしい定式化ができないものかを考えた。そもそも、IIB matrix model は、有限サイズ N の行列理論の large N 極限を取ったもので定義される。すなわち、何かある無限自由度の系を有限自由度である有限サイズ N の行列で正則化したものである。我々は、この無限自由度の系を具体的に書き下すために、有限サイズ N の IIB matrix model が $N \times N$ サイトの 2 次元の非可換周期格子上の場の理論と等価になる事実からスタートした。この等価な場の理論の非可換性は large N limit では消えるので、一見 large N limit を取った IIB matrix model は可換トーラス上の場の理論になると思える。しかしながら一般に非可換な場の理論の可換極限の理論と元の可換な理論とは違ったものになる。我々の非可換周期格子上の場の理論についても同じことが言えて、正則化する前の無限自由度の場の理論を書き下すことはできなかった。相関関数の N 依存性は非可換周期格子上の場の理論を使うと、簡単な order counting だけで計算できてしまうことを発見した。この N 依存性は無限自由度の場の理論を推察するための重要なヒントになる。また、我々は相関関数を有限にとどめて計算するためには IIB matrix model で g^2N を一定にしなければならないことも見つけた。

Contents

1 Introduction

ここ数年の間に超弦理論を large N matrix model を使って定式化すると言う提案が幾つかなされた [1, 2, 3, 4]。そのうちの 1 つである IIB matrix model は 10 次元 SU(N) super Yang-Mills theory の zero volume limit を取った理論の large N limit を取る事で定義される。IIB matrix model によって超弦理論が非摂動的に定義されているのであれば、これまでの Polyakov 等による摂動的定式化による超弦理論では導くことのできなかった超弦理論の低エネルギーの有効理論としての標準理論や Einstein の重力理論なりを導くことができると期待されている。

IIB matrix model は時空そのもののダイナミクスを扱っていると考えられている。実際に、IIB matrix model の bosonic な行列は $N \times N$ の行列だが、この行列の固有値は時空を現す座標と解釈される。この固有値は、あらゆる実数を取りうるので、IIB matrix model は一般に開いた時空を記述していると考えられる。IIB matrix model で使われる Hermite matrices を Unitary matrices にする事で自然に固有値に周期境界条件を入れて、閉じた時空を記述する研究も幾つか行われている [6]。$N = 2$ の時は、fermion の自由度を手で積分しきる事ができて、boson だけの自由度を持つ model として解析的に調べる事ができる [19]。しかしながら、この方法では $N > 2$ の場合を調べる事はほとんど不可能である。

あとで見るように、IIB matrix model は非常に簡単な格好をしている。そのために IIB matrix model の真空を求め、その真空の周りの摂動展開をすることにより低エネルギーの有効作用を求めることはさほど難しいことではないと傍目には見える。しかしながら、先にも書いたように $N > 2$ の場合に fermion の自由度を解析的に積分することに成功していないために、いまだに真空がわかっておらず、例えば、このモデルから時空が本当に 4 次元に拡がるか否かすら解かっていない。

IIB matrix model では自由度を担う行列そのものが時空を記述し、一般には、この時空の座標の交換関係は自明なものではない。例えば、

$$[x^\mu, x^\nu] = i, \tag{1}$$

なる交換関係があれば、量子力学の不確定性関係を導く議論をそのまま使うことで時空の不確定性関係と呼ぶべきものが導かれる [8] 。文献 [7] では bosonic matrix A^μ に同値関係 $U^\mu A^\mu U^{\mu\dagger} = A^\mu + R^\mu \mathbf{1}$ を課すことで周期境界条件をを課し、$U^\mu U^\nu \neq U^\nu U^\mu, (\mu \neq \nu)$ とすることで時空の非可換性を作り出す研究が成された [7]。この研究は (1) なる非可換な時空の交換関係をもつ非可換時空上の弦理論や場の理論の研究のさきがけとなった。

非可換時空上の場の交換関係は supermembranes の議論をする時に調べられた U(N) の代数の交換関係に非常によく似ている [9, 10, 11, 14] 。実際に、$N \times N$ の行列を使った matrix model と 2 次元のトーラス状

の $N \times N$ site の非可換周期格子 (Non-Commutative Periodic Lattice, NCPL) 上の場の理論との間に厳密な 1 対 1 対応を構成できる事が知られている [15]。以降、この NCPL を $\mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}$ と書くことにする [15, 16, 17]。この対応を使うと、我々の知りたい IIB matrix model も場の理論であると解釈しなおすことができる。

NCPL 上の座標の交換関係が $\frac{1}{N}$ に比例するので、large N 極限では matrix model は普通の可換でかつ連続なトーラス上の場の理論と等価になると期待できる。もしこの期待が正しいものであれば、large N limit の IIB matrix model の解析に通常の場の理論で使われるテクニックを応用できることになる。さらに、最終的にえられる結果が通常の場の理論のように正則化の方法によらなければ、真空を探すのに都合のよい正則化の方法を見つけることができることも期待できる。しかしながら、IIB matrix model の相関関数の N 依存性と、これに等価な非可換周期格子上の場の理論を $\frac{1}{N}$ 展開して leading だけを残した相関関数の N 依存性は違う。今期待している可換でかつ連続な場の理論は $\frac{1}{N}$ 展開した leading の理論の $N \to \infty$ 極限でしか作ることができないので、この連続な場の理論は IIB matrix model とは等価ではありえない [24]。

IIB matrix model を naive に large N 極限を取ると Schild action [18] になる。従って、このトーラス上の Schild actin は IIB matrix model の large N 極限を表す作用としては最も有力なものである。しかしながら、我々は IIB matrix model の相関関数の N 依存性は Schild action をトーラス状の $N \times N$ 格子上に正則化したものの相関関数の N 依存性とが違ったものである事を発見した [24, 25]。通常、無限自由度の系を考える時に場の理論を使うが、large N 極限の IIB matrix model も無限自由度になるので、large N 極限の IIB matrix model も場の理論の形で書けると考えるのは自然である。この論文の最後に、この様な場の理論の候補の 1 つを提案した。

我々は、IIB matrix model の N 依存性を NCPL 上の場の理論として書き換えたものを使って調べた。その結果、IIB matrix model の相関関数のうち、以前に Monte Carlo simulation を使って計算されたものが我々の計算と一致した。更に、我々は $g^2 N \sim O(N^0)$ を要求する時に限り、large N 極限で

$$\left\langle \frac{1}{N} Tr F(A^\mu, \Psi) \right\rangle, \tag{2}$$

なる相関関数が非自明な値を持ちうる事を示した。IIB matrix model で Wilson loop を定義し、その Wilson loop の Hamiltonian が $g^2 N \sim O(N^0)$ のときに Green-Schwarz の超弦理論の Hamiltonian と一致するという議論があるが [3]、この意味において我々の得た結果は IIB matrix model が超弦理論を記述しているという仮説を支持している。

この論文は以下のように構成されている。Section2では、我々の論文の背景となっている IIB matrix model について review する。IIB matrix model の boson の自由度は時空を表すと解釈できるのであるが、現在のところ、boson の自由度のどこが実際に時空の自由度を担っているのかは定かではない。しかしながら、IIB matrix model が持つ fermionic な対象性は $\mathcal{N}=2$ の supersymmetry だと考える事がでる。そこで、この対象性を supersymmetry だと解釈する事にすると、supersymmetry は時空の対象性を含んでいるので、IIB matrix model は時空の自由度を含んでいると結論できる。そして、詳しくは section2でやるが、bosonic な自由度 A^μ があたかも terget space の座標の自由度のように見えるのである [2] 。

また、IIB matrix model で light-cone 座標を組み、Wilson loop の相関関数を調べると、超弦場の理論を記述しているようにも見える [3]。Section3では U(N) matrix model を周期境界条件を持った $N\times N$ 非可換格子空間 $\mathbb{T}^2_{N^2}$ への同型写像について簡単に review する。Section4では large N limit の IIB matrix model の action を NCPL 上の action として書き下し、相関関数の N 依存性を議論する。Section5では large N 極限の IIB matrix model を記述する場の理論について議論する。この節で IIB matrix model から直接 Schild action[18] を導く事ができない事を示す。最後の section6で我々の得た結論を述べる。

2 IIB matrix model

IIB matrix model は 10 次元の $\mathcal{N}=1$SU(N) superYang-Mills 理論,

$$S=-\frac{1}{g^2}\int d^{10}xTr\left\{\frac{1}{4}[D_\mu(x),D_\nu(x)]^2+\frac{i}{2}\overline{\Psi}(x)\not{D}(x)\Psi(x)\right\}, \tag{3}$$
$$D_\mu(x)=\partial_\mu+iA_\mu(x),$$

の 0 体積極限、すなわち 0 次元まで dimensional reduction した理論の N を無限大に飛ばした極限を取ったものとして定義される [2]。具体的には、$A^\mu,(\mu=1,\cdots,10)$ を $N\times N$ の traceless な Hermite 行列、Ψ を 16 個の成分を持つ、10 次元の Majorana-Weyl fermion で、各 fermion 成分は $N\times N$ の traceless な Hermite 行列であり、action は

$$S=-\frac{1}{g^2}Tr\left\{\frac{1}{4}[A^\mu,A^\nu]^2+\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu,\Psi]\right\}, \tag{4}$$

と書かれる。この model は、$\mathcal{N}=2$ の supersymmetry を持ち、この supersymmetry から A^μ は 10 次元の時空の自由度を担っていると考えられる。更に、A^μ の時空の自由度以外の自由度はゲージ場の自由度だと考える事ができるという指摘もある。[26] このため、IIB matrix model は時空と場両方を記述する理論となっていると考えられおり、精力的に研究されている。また、この model は元々Type IIB 型の超弦理論を非摂動的に定義する model として提案された。[2] 実際に、IIB matrix model で Wilson loop を作り、Wilson loop の相関関数に対する Schwinger-Dyson 方程式 (loop 方程式) から導かれる free の light-cone Hamiltonian が type IIB Green-Schwarz superstring action と関連付ける事ができるという研究もある [3]。

この節では、これらの研究について review する。

2.1 Generation of Space-Time

IIB matrix model の A^μ が時空の自由度を担っていると言う事の根拠は、IIB matrix model には以下の 2 つの fermionic な対象性があると言う事実に負っている。

1. 10 次元の $\mathcal{N}=1$ supersymmetry の名残:
$$\begin{aligned}\delta^1_\varepsilon A^\mu &= i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi,\\ \delta^1_\varepsilon\Psi &= \tfrac{i}{2}[A^\mu,A^\nu]\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon,\end{aligned} \tag{5}$$
$$\Gamma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu].$$
2. Fermion のずらし:
$$\begin{aligned}\delta^2_\xi A^\mu &= 0,\\ \delta^2_\xi\Psi &= \xi\mathbf{1}.\end{aligned} \tag{6}$$

これら 2 つの対称性 (5, 6) を

$$\tilde{\delta}^1_\varepsilon = i(\delta^1_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon), \tag{7}$$
$$\tilde{\delta}^2_\varepsilon = \delta^1_\varepsilon - \delta^2_\varepsilon, \tag{8}$$

と組み合わせると、

$$\begin{aligned} &[\tilde{\delta}^a_\varepsilon, \tilde{\delta}^b_\xi]A^\mu = 2i\delta^{ab}\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\xi + \text{gauge 変換} \\ &[\tilde{\delta}^a_\varepsilon, \tilde{\delta}^b_\xi]\Psi = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

が導かれる。(see Appendix A). 一般に、 super 変換は

$$[\tilde{\delta}^a_\varepsilon, \tilde{\delta}^b_\xi] = 2i\delta^{ab}\not{p}\xi \tag{10}$$

と書かれるので、A^μ を座標を表す自由度だと解釈すると (9) は $\mathcal{N}=2$ の super 変換そのものになっている。

次に、この座標が A^μ を使ってどのように表されるのかを考える事にする。よく使われるのは、 IIB matrix model の古典解、

$$[A^\nu, [A_\mu, A_\nu]] - \bar{\Psi}\Gamma_\mu\Psi = 0, \tag{11}$$
$$\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi] = 0, \tag{12}$$

のうち、$\Psi = 0$ で、A^μ に対し $[A^\mu, A^\nu] = 0$, すなわち、

$$A^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^\mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_N^\mu \end{pmatrix}, \tag{13}$$
$$\Psi = 0, \tag{14}$$

である。この picture では、N が有限の時は時空は N この点から成っており、例えば i 番目の点は 10 次元時空中の ${}^t(x_i^1, \cdots, x_i^{10})$ の位置にある。N が無限大の極限ではこの点の集合は何かある多様体を形成する事を期待されている。実際に、 IIB matrix model の非対角成分を積分する事で x_i^μ 達が感じる potential を計算したら、x_i^μ 達が 4 次元に分布する時が最もエネルギーが低くなる可能性について論じた研究が幾つかある [6, 4, 27]。

このような picture が正しかったとすると、 A^μ の非対角成分はどの様な自由度を担っているのかが疑問に思える。文献 [26] ではこの非対角成分の役割が U(n) の gauge 場である可能性について論じられている。この論文によると、まず A^μ の古典解として、対角成分が n 個

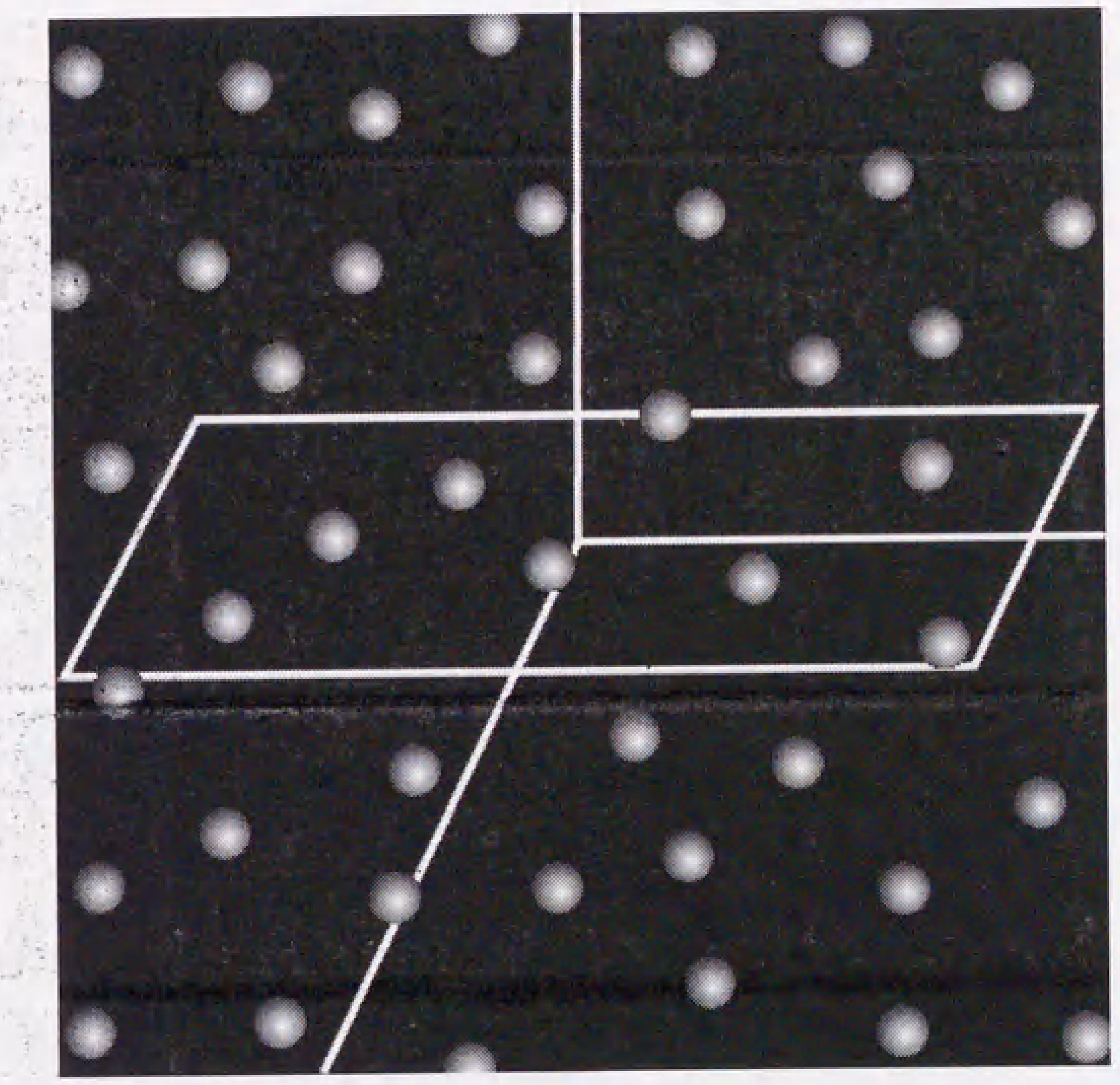

Figure 1: Image of space-time

ずつ縮退したもの,

$$A^\mu_{\text{cl}} = \begin{pmatrix} x_1^\mu \mathbf{1}_{n\times n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^\mu \mathbf{1}_{n\times n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_m^\mu \mathbf{1}_{n\times n} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

を選ぶ。但し、$nm = N$ となるように m, N を選んであるとする。そして、A^μ を、

$$A^\mu = \left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1^\mu \mathbf{1}_{n\times n} & a_{12}^\mu & \cdots & a_{1m}^\mu \\ \hline a_{21}^\mu & x_2^\mu \mathbf{1}_{n\times n} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1\,m}^\mu \\ \hline a_{m1}^\mu & \cdots & a_{m\,m-1}^\mu & x_m^\mu \mathbf{1}_{n\times n} \end{array}\right), \tag{16}$$

と block 化する。このとき、真空として A^{μ}_{cl} を選ぶ事により、$U(N)$ の対称性を $U(n)^m$ に破っている。すなわち、もとの $U(N)$ の変換に対して、 A^{μ} は

$$A^{\mu} \mapsto U A^{\mu} U^{\dagger}, \tag{17}$$

と変換していた。これが $U(n)^m$ に破れる事で、A^{μ} の非対角 block a^{μ}_{ij} は、

$$a^{\mu}_{ij} \mapsto U_i a^{\mu}_{ij} U^{\dagger}_j, \tag{18}$$

と変換する。この変換は、i, j が格子の site を表すと思った時のリンク変数、すなわちゲージ場の変換そのものになっている。しかしながら、今各リンク $\langle ij \rangle$ に対して 10 個の場 a^{μ} があるのに対して、ゲージ変換は 1 種類しか存在しない。そこで、 a^{μ}_{ij} をユニタリー行列 $\tilde{u}^{\mu}_{ij}$ とエルミート行列 h^{μ}_{ij} を使って、 $a^{\mu}_{ij} = u^{\mu}_{ij} h^{\mu}_{ij}$ と一意的に曲分解出来る事に注目する。この $\tilde{u}^{\mu}_{ij}$ は無理矢理に全ての μ に共通な行列 u_{ij} とおつり g^{μ}_{ij} に $\tilde{u}^{\mu}_{ij} = u_{ij} g^{\mu}_{ij}$ に分解できて、結局

$$a^{\mu}_{ij} = u_{ij} g^{\mu}_{ij} h^{\mu}_{ij}, \tag{19}$$

と書き直すことが出来る。

一方で、 IIB matrix model を (16) の形で古典解+量子場 a^{μ}_{ij} の形

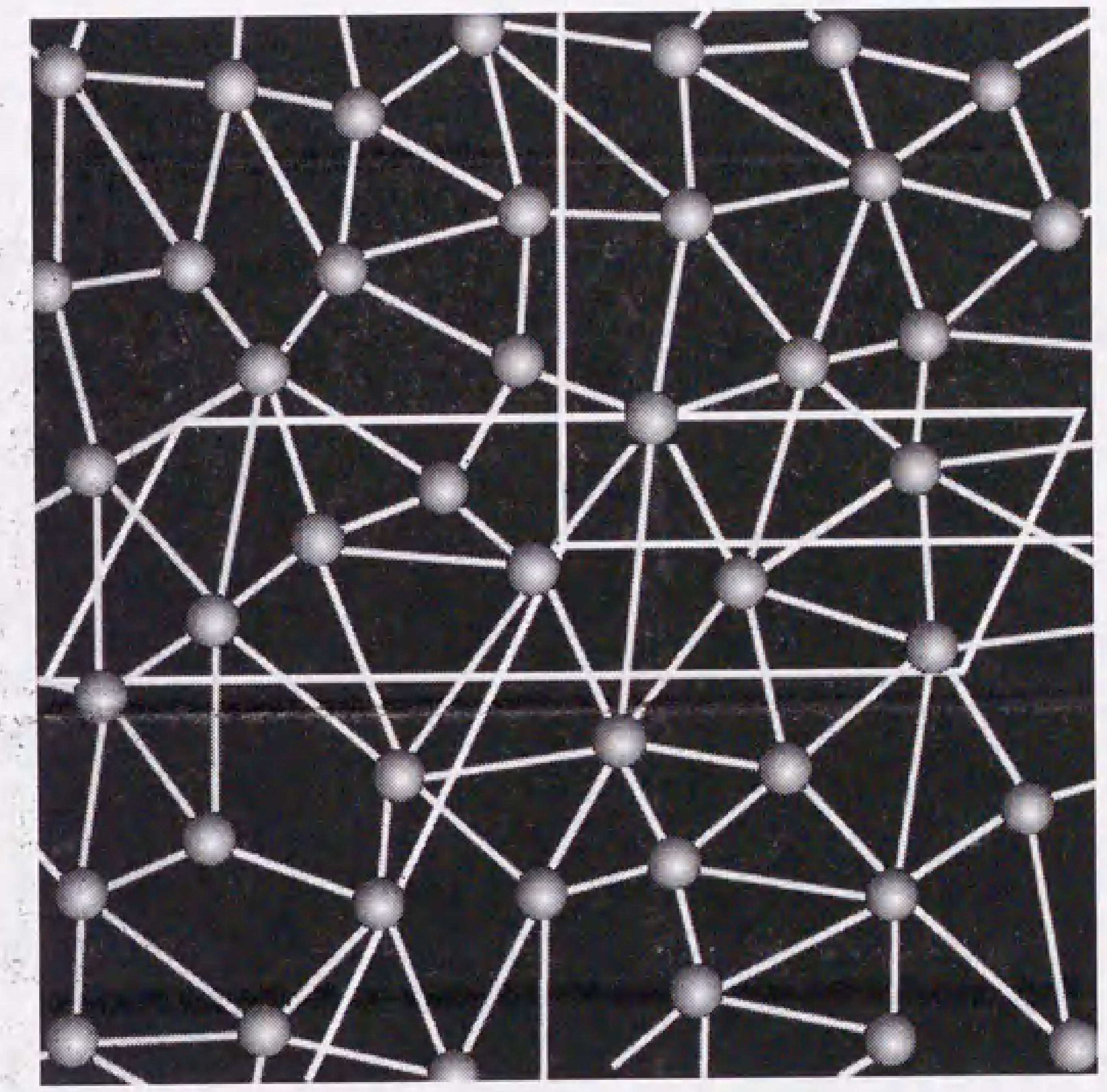

Figure 2: Image of generation of gage field

で書くと boson だけの項は、

$$-\frac{1}{4g^2} Tr \left[\begin{pmatrix} x^{\mu}_1 \mathbf{1} & a^{\mu}_{12} & \cdots & a^{\mu}_{1m} \\ a^{\mu}_{21} & x^{\mu}_2 \mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a^{\mu}_{m-1\,m} \\ a^{\mu}_{m1} & \cdots & a^{\mu}_{m\,m-1} & x^{\mu}_m \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{\nu}_1 \mathbf{1} & a^{\nu}_{12} & \cdots & a^{\nu}_{1m} \\ a^{\nu}_{21} & x^{\nu}_2 \mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a^{\nu}_{m-1\,m} \\ a^{\nu}_{m1} & \cdots & a^{\nu}_{m\,m-1} & x^{\nu}_m \mathbf{1} \end{pmatrix} \right]^2,$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4g^2} \sum_{ij} Tr \Big(\big((x^{\mu}_i - x^{\mu}_j) a^{\nu}_{ij} - (x^{\nu}_i - x^{\nu}_j) a^{\mu}_{ij} \\ &\qquad + \sum_k (a^{\mu}_{ik} a^{\nu}_{kj} - a^{\nu}_{ik} a^{\mu}_{kj}) \big) \\ &\qquad \times \big((x_{\mu\,j} - x_{\mu\,i}) a_{\nu\,ji} - (x_{\nu\,j} - x_{\nu\,i}) a_{\mu\,ji} \\ &\qquad + \sum_k (a_{\mu\,jk} a_{\nu\,ki} - a_{\nu\,jk} a_{\mu\,ki}) \big) \Big), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2g^2} \sum_{ij} Tr \Big((x^{\mu}_i - x^{\mu}_j)^2 a^{\nu}_{ij} a_{\nu\,ji} \\ &\qquad - \big((x^{\mu}_i - x^{\mu}_j) a_{\mu\,ij} \big) \big((x^{\nu}_i - x^{\nu}_j) a_{\nu\,ji} \big) \\ &\qquad + 2 \sum_k (x^{\mu}_i - x^{\mu}_j) a^{\nu}_{ij} (a_{\mu\,jk} a_{\nu\,ki} - a_{\nu\,jk} a_{\mu\,ki}) \\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{kl} (a^{\mu}_{ik} a^{\nu}_{kj} - a^{\nu}_{ik} a^{\mu}_{kj}) (a_{\mu\,jl} a_{\nu\,li} - a_{\nu\,jl} a_{\mu\,li}) \Big), \end{aligned} \tag{21}$$

となり、特に a^{μ}_{ij} の 4 次の項は

$$\frac{1}{2g^2}\sum_{i\neq j\neq k\neq l} Tr\Big(\big(a^{\mu}_{ij}a^{\nu}_{jk} - a^{\nu}_{ij}a^{\mu}_{jk}\big)a^{\mu}_{kl}a^{\nu}_{li}\Big), \tag{22}$$

となるので、(22) に (19) を代入して $g^{\mu}_{ij}, h^{\mu}_{ij}$ の自由度について積分すると、格子ゲージ理論でお馴染みの plaqette action,

$$S \sim \sum_{i\neq j\neq k\neq l} Tr\big(u_{ij}u_{jk}u_{kl}u_{li}\big), \tag{23}$$

を導く可能性について議論している。

このような議論により、IIB matrix model は時空の生成とその時空上での場の理論を含んだ理論だと考えられている。このような時空と場を統一的に扱う理論としては、超弦理論がよく知られているが、IIB matrix model はそもそも超弦理論を非摂動的に定式化するモデルの候補として提案されたものである [2]。次の小節では、超弦理論と IIB matrix model の関係について記述する。

2.2 超弦理論と IIB matrix model との関係

弦理論と IIB martrix model との関係を議論する時によく言われる最も簡単なものは、弦理論を記述する Polyakov action と少なくとも古典的には等価な Schild action を行列で正則化したものが IIB matrix model であると言う事である [2]。この議論は以下のようにして行われる。まず、Polyakov action,

$$S_{\mathrm{Polyakov}} = \int d^2\sigma\sqrt{-g(\sigma)}g^{\mu\nu}(\sigma)\partial_a X^{\mu}\partial_b X_{\mu}, \tag{24}$$

の metric $g_{\mu\nu}(\sigma)$ についての運動方程式は

$$\partial_a X^{\mu}(\sigma)\partial_b X_{\mu}(\sigma) - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\partial_c X^{\mu}(\sigma)\partial_d X_{\mu}(\sigma) = 0, \tag{25}$$

となる。この解 (25) を Polyakov action (24) に代入すると、南部・後藤の作用、

$$S_{\text{南部・後藤}} = \int d^2\sigma\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^{\mu}(\sigma)\partial_b X_{\mu}(\sigma))^2}, \tag{26}$$

になる。一方、Schild action,

$$S_{\mathrm{Schild}} = \int d^2\sigma\sqrt{-g(\sigma)}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{-g(\sigma)}}\epsilon^{ab}\partial_a X^{\mu}(\sigma)\partial_b X^{\nu}(\sigma)\right)^2 + 1\right], \tag{27}$$

については、$\sqrt{-g}$ について運動方程式を解くと、

$$-\frac{1}{-g}(\epsilon^{ab}\partial_a X^{\mu}\partial_b X_{\nu})^2 + 1 = 0, \tag{28}$$

となる。(28) を $\sqrt{-g}$ について解いてやり、その結果を Schild action (27) に代入するとやはり南部・後藤の作用 (26) になる。こうして、Polyakov action (24) と Schild action (27) は少なくとも古典的には等価なものになる。Schild action で metric $g_{\mu\nu}(\sigma)$ を

$$g_{\mu\nu}(\sigma) = \eta_{\mu\nu}, \tag{29}$$

とゲージ固定する事が出来る。このゲージ固定された作用は

$$S = \int d^2\sigma(\epsilon^{ab}\partial_a X^{\mu}\partial_b X_{\mu})^2, \tag{30}$$

となり、特に面積を保存する一般座標変換 (area preserving diffeomorophism, APD) に対して不変である。この APD は一般座標変換 $\delta\sigma^1, \delta\sigma^2$ の内、

$$\begin{aligned}
0 &= d(\sigma^1+\delta\sigma^1)\wedge d(\sigma^2+\delta\sigma^2) - d\sigma^1\wedge d\sigma^2, &(31)\\
&= (d\sigma^1+\partial_a\delta\sigma^1 d\sigma^a)\wedge(d\sigma^2+\partial_b\delta\sigma^2 d\sigma^b) - d\sigma^1\wedge d\sigma^2, &(32)\\
&= \big((1+\partial_1\delta\sigma^1)d\sigma^1+\partial_2\delta\sigma^2 d\sigma^2\big)\wedge\big(\partial_1\delta\sigma^2 d\sigma^1+(1+\partial_2\delta\sigma^2)d\sigma^2\big)\\
&\qquad - d\sigma^1\wedge d\sigma^2, &(33)\\
&= \big(\partial_1\delta\sigma^1+\partial_2\delta\sigma^2\big)d\sigma^1\wedge d\sigma^2, &(34)
\end{aligned}$$

と言う制限を課したもの、すなわち、あるパラメータ関数 λ があって、

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda\sigma^1 &= \partial_2\lambda(\sigma), &(35)\\
\delta_\lambda\sigma^2 &= -\partial_1\lambda(\sigma), &(36)\\
\delta_\lambda A(\sigma) &= \partial_2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) - \partial_1\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma), &(37)
\end{aligned}$$

となっているものである。また、

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa\delta_\lambda A(\sigma) &= \delta_\kappa\big(\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) - \partial_1\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma)\big), &(38)\\
&= \partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\big(\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) - \partial_1\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma)\big)\\
&\quad - \partial_1\kappa(\sigma)\partial_2\big(\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) - \partial_1\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma)\big), &(39)\\
&= \partial_2\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1^2 A(\sigma) - \partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)\partial_1\partial_2 A(\sigma)\\
&\quad - \partial_1\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1\partial_2 A(\sigma) + \partial_1\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)\partial_2^2 A(\sigma)\\
&\quad + \partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) - \partial_2\kappa(\sigma)\partial_1^2\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma)\\
&\quad - \partial_1\kappa(\sigma)\partial_2^2\lambda(\sigma)\partial_1 A(\sigma) + \partial_1\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)\partial_2 A(\sigma), &(40)
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
[\delta_\kappa,\delta_\lambda]A(\sigma) &= \partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1A(\sigma)-\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1^2\lambda(\sigma)\partial_2A(\sigma)\\
&\quad-\partial_1\kappa(\sigma)\partial_2^2\lambda(\sigma)\partial_1A(\sigma)+\partial_1\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)\partial_2A(\sigma)\\
&\quad-\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1A(\sigma)+\partial_2\lambda(\sigma)\partial_1^2\kappa(\sigma)\partial_2A(\sigma)\\
&\quad+\partial_1\lambda(\sigma)\partial_2^2\kappa(\sigma)\partial_1A(\sigma)-\partial_1\lambda(\sigma)\partial_1\partial_2\kappa(\sigma)\partial_2A(\sigma) \qquad (41)\\
&=\big(\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)+\partial_2^2\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)\\
&\quad-\partial_1\kappa(\sigma)\partial_2^2\lambda(\sigma)-\partial_1\partial_2\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\big)\partial_1A(\sigma)\\
&\quad-\big(\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1^2\lambda(\sigma)+\partial_1\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)\\
&\quad-\partial_1\kappa(\sigma)\partial_1\partial_2\lambda(\sigma)-\partial_1^2\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\big)\partial_2A(\sigma), \qquad (42)\\
&=\partial_2\big(\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)-\partial_1\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\big)\partial_1A(\sigma)\\
&\quad-\partial_1\big(\partial_2\kappa(\sigma)\partial_1\lambda(\sigma)-\partial_1\kappa(\sigma)\partial_2\lambda(\sigma)\big)\partial_2A(\sigma), \qquad (43)\\
&=-\epsilon^{ab}\partial_a\big(-\epsilon^{cd}\partial_c\kappa(\sigma)\partial_d\lambda(\sigma)\big)\partial_bA(\sigma), \qquad (44)\\
&=\delta_{\epsilon^{ab}\partial_a\kappa\partial_b\lambda}A(\sigma), \qquad (45)
\end{aligned}
$$

である。

$$\lambda(\sigma)=e^{im_a\sigma^a}, \tag{46}$$
$$\kappa(\sigma)=e^{in_a\sigma^a}, \tag{47}$$

とし、λ,κ なる変換の生成子を $L_{\mathbf{m}}$, $L_{\mathbf{n}}$ とすると、 APD の代数は

$$[L_{\mathbf{m}},L_{\mathbf{n}}]=-2i\epsilon^{ab}m_an_bL_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, \tag{48}$$

となる。

一方で、詳しくは section 3 で書くが、$U(N)$ の交換関係として

$$U=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&e^{i\frac{4\pi}{N}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\ddots&0&e^{i\frac{4\pi}{N}(N-1)}\end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$V=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}, \tag{50}$$

を使って、

$$T_{(m_1,m_2)}=e^{i\frac{2\pi}{N}m_1m_2}U^{m_1}V^{m_2}, \tag{51}$$
$$[T_{\mathbf{m}},T_{\mathbf{n}}]=-2i\sin\left(\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}m_an_b\right)T_{\mathbf{m}+\mathbf{b}}, \tag{52}$$

となるものを選ぶことができる [12, 13]。この交換関係を (48) と比べると非常によく似た格好になっている。じっさいに、(52) の右辺を $\frac{2\pi}{N}$ で展開できれば (52) のリーディングは (48) そのものになる。すなわち、各 $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ に対して十分大きな N が存在して APD の代数の交換関係 (48) は $U(N)$ の交換関係 (52) で近似される。この様に考えると Schild action (30) は $U(N)$ の元、すなわち行列を使った表示で近似することができそうである。Schild action 中の $\epsilon^{ab}\partial_aX^\mu\partial_bX^\nu$ は今の場合交換関係 $[X^\mu,X^\nu]$ で近似されて、積分は行列の Trace として書かれ、近似された作用は

$$S_{U(N)}=Tr\big([X^\mu,X^\nu]\big)^2, \tag{53}$$

となる。この作用は有限自由度の系の作用であるので、もとの Schild action を行列を使って正則化したものであると考える事が出来る。$A^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}X^\mu$ だと思うと、(53) は IIB matrix model の bosonic part そのものである。従って、IIB matrix model は Schild theory を super 化したものであると考えられた。

この議論は IIB matrix model がはじめて提案された時に超弦理論との対応の 1 つの証拠として議論された事である。しかしながら section4 で詳しくやるが、我々が示した事は逆で、残念ながら IIB matrix model の large N 極限は Schild action にはならないということである [24, 25]。ゆえに IIB matrix model の研究の動機に超弦理論をあげるのは間違いである、と考えたくもなるが、その様なな結論を出すのはまだ早い。IIB matrix model で Wilson loop を作り、この Wilson loop に対する Schwinger-Dyson 方程式、あるいは loop 方程式と呼ばれるものの解析から今度は Green-Schwarz の超弦理論と IIB matrix model が関連付く事が知られいる [3]。次の小節ではその議論を紹介する。

2.3 Green-Schwarz String and IIB matrix Model

文献 [3] では IIB matrix model で Wiloson loop をつくりその Schwinger-Dyson 方程式が Greeen-Schwarz の light-cone 超弦理論を再現するという議論が成された。この小節では、この議論を紹介する。

2.3.1 Schwinger-Dyson equation for the Wilson loops

IIB matrix model においての Wilson loop $W[k_\mu(\sigma)]$ を、0 次元に reduce する前の 10 次元の $\mathcal{N}=1$ の super-Yang-Mills 理論における Wilson

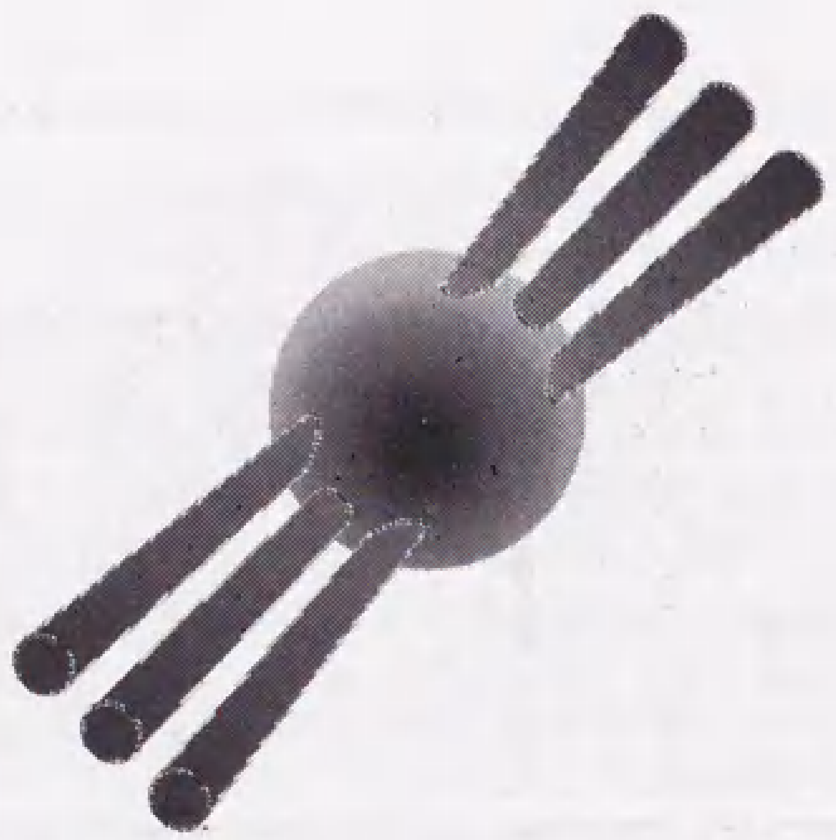

Figure 3: Wilson loop の端を x^+ =const. としたもの。以後、Wilson loop と書いたときはこのような light-cone time x^+ =const. としたものだけを考える。

loop のアナロジーを使って、

$$v[k_\mu(\sigma)] = \mathcal{P}e^{i\oint d\sigma(k_\mu(\sigma)A^\mu + \overline{\lambda}(\sigma)\Psi)}, \tag{54}$$

$$W[k_\mu(\sigma)] = Tr\big(v[k_\mu(\sigma)]\big), \tag{55}$$

で定義する。ここで、σ は長さの次元を持ったパラメーターである。ここでの主張は Wilson loop の相関関数

$$\langle W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\rangle, \tag{56}$$

のうち各 k^i 毎にあらゆる $k^i(\sigma)_-$ のフーリエ変換 $x^+(\sigma)$ を等しくした $(x^+(\sigma) = x_i)$ ものの loop 方程式が、 large N 極限で Green-Schwarz の light-cone 超弦理論と一致するという事である。以下でこのことを示す。

まず最初に考えるのは、 Wilson loop に対する loop 方程式

$$k^\mu(0)\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}\Big\{Tr[T_a v(k_\mu^1(\sigma))]W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots \times W[k_\mu^l(\sigma)]e^{-S}\Big\} = 0, \tag{57}$$

$$k^\mu(0)\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\frac{\partial}{\partial \Psi_\mu}\Big\{Tr[T_a v(k_\mu^1(\sigma))]W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots \times W[k_\mu^l(\sigma)]e^{-S}\Big\} = 0, \tag{58}$$

である。ここで、 Tr の中の T_a は $SU(N)$ の基底である。また、各 $W[k_\mu^n(\sigma)]$ 毎に全ての $k_+(\sigma)$ のフーリエ変換 $x^+(\sigma)$ が等しくなるような $k_+(\sigma)$ だけを考えることにより、light cone string theory の実現を目指す。(57) から string field theory の Hamiltonian が、(58) からは、string field 達に対する拘束条件が出てくる。以下の議論では Wilson loop のパラメーターを $k_+(\sigma) = 1$ となるように取ってある。(57) で $\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}$ が e^{-S} に作用するとき

$$\Big\langle W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\Big\rangle, \tag{59}$$

が出てくる。また $\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}$ が $Tr[T_a v[k_\mu^1(\sigma)]]$ に作用するとき

$$\Big\langle Tr[\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma_p} d\sigma k_\mu^1(\sigma)A^\mu}]Tr[\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma_p}^{\sigma_f} d\sigma k_\mu^1(\sigma)A^\mu}]W[k_\mu^2(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\Big\rangle, \tag{60}$$

となり、$W[k_\mu^1(\sigma)]$ が 2 つに分裂するときの Wilson loop の相関関数になる。そして $\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}$ が $W[k_\mu^n(\sigma)]$ に作用するとき

$$\Big\langle Tr\Big[\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma_{bp}}^{\sigma_{bf}} d\sigma k_\mu^n(\sigma)A^\mu}v[k_\mu^1(\sigma)]\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma_{np}} d\sigma k_\mu^n(\sigma)A^\mu}\Big] W[k_\mu^2(\sigma)]\cdots \check{W}[k_\mu^b(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\Big\rangle, \tag{61}$$

となり、$W(C_1)$ と $W(C_b)$ が結合する時の相関関数が出て来る。
特に $\frac{\partial}{\partial A}$ が e^{-S} に作用してできる $\langle W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\rangle$ の係数に注目する。定義 (57) より Wilson loop の係数は運動量の二乗の次元を持った量である。$\langle W[k_\mu^1(\sigma)]\cdots W[k_\mu^l(\sigma)]\rangle$ の係数を k_+ について解くと、light-cone free Hamiltonian が出てくるという議論である。

2.3.2 Determination of the Hamiltonian by symmetries

文献 [3] ではこの Hamiltonian としてどのようなものが出てきうるかという議論を、 IIB matrix model の超対称性と Wilson loop を作ると

Figure 4: 左から順に $\frac{\partial}{\partial A}e^{-S}$, $\frac{\partial}{\partial A}Tr[T_a v[k^1_\mu(\sigma)]]$, $\frac{\partial}{\partial A}W[k^b_\mu(\sigma)]$ の効果

きに出てくる変数の world sheet の質量次元[1]から導いている。具体的には、今 IIB matrix model には $\mathcal{N}=2$ の超対称性 (5), (6) があるが、この対照性の生成子を各々 Q^1, Q^2 とすると、特に

$$[\bar{\varepsilon}Q^1, \bar{\xi}Q^2] = 2\bar{\varepsilon}\not{P}\xi, \tag{62}$$

となる。したがって、このスーパーチャージ Q^1, Q^2 を求めればよいことになる。この Q^1, Q^2 は場の次元、パリティー不変性、そして light-cone と垂直な方向の回転対称性 $SO(8)$ だけで決まる。この議論を少し詳しく見ることにする。

まず、IIB matrix model の作用を light-cone 座標で書き換え、$SO(8)$ 不変な形に書き換える。そのために、Γ 行列を

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, \cdots 9, \tag{63}$$

$$\Gamma_{10} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

と書く。このように 10次元の Γ 行列を取ったときに, charge conjugation 行列 C は、

$$C\Gamma^\mu C^{-1} = -{}^t\Gamma^\mu, \tag{65}$$

$${}^tC = -C, \tag{66}$$

を満たすものである。このような行列として、Γ_{10} を使うことにする。

[1] World sheet の質量次元は terget space の質量次元とは異なる。この後すぐに見るようにここでは $[g]=0$ として扱う。

すると、 IIB matrix model の作用 (4) は、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{g^2}Tr\left\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi]\right\}, &(67)\\ &= -\frac{1}{g^2}Tr\Big\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\Big(\overline{\Psi}\Gamma_i[A^i, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_+[A^+, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_-[A^-, \Psi]\Big)\Big\}, &(68)\\ &= -\frac{1}{g^2}Tr\Big\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 - \frac{1}{2}\Big({}^t\Psi C^{-1}\Gamma_i[A^i, \Psi] \\ &\qquad +{}^t\Psi C^{-1}\Gamma_+[A^+, \Psi] +{}^t\Psi C^{-1}\Gamma_-[A^-, \Psi]\Big)\Big\}, &(69)\\ &= -\frac{1}{g^2}Tr\Big\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 - \frac{i}{2}\Big({}^t\psi\gamma_i[A^i, \psi] \\ &\qquad -{}^t\psi\frac{1-\gamma_9}{\sqrt{2}}[A^-, \psi] +{}^t\psi\frac{1+\gamma_9}{\sqrt{2}}[A^+, \psi]\Big)\Big\}, &(70)\\ &= -\frac{1}{g^2}Tr\Big\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 - \frac{i}{2}\big({}^t\varphi\gamma_i[A^i, \phi] \\ &\qquad +{}^t\phi\gamma_i[A^i, \varphi] + \sqrt{2}\,{}^t\varphi[A^+, \varphi] - \sqrt{2}\,{}^t\phi[A^-, \phi]\big)\Big\}, &(71)\end{aligned}$$

となる。ただし、ユークリッド版の light-cone 座標として、

$$A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^9 \mp iA^{10}\right), \tag{72}$$

$$\Gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_9 \pm i\Gamma_{10}\right), \tag{73}$$

を使った。また、Ψ として

$$\Psi = \frac{1+\Gamma_{10}}{2}\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{74}$$

$$\varphi = \frac{1+\gamma^9}{2}\psi, \tag{75}$$

$$\phi = \frac{1-\gamma^9}{2}\psi, \tag{76}$$

である。そして、転置 ^{t} はスピノルの足についてのみの転置である。Light-cone frame で書いた $SO(8)$ 不変な IIB matrix model の作用 (71) から、各行列の質量次元を詳しく見ることにする。σ の質量次元

が $[\sigma]=-1$ であることから、

$$[A^i]=0, \tag{77}$$
$$[A^+]=-[A^-], \tag{78}$$
$$[A^+]=-2[\phi], \tag{79}$$
$$[A^-]=-2[\varphi], \tag{80}$$

となる。また、 Wilson loop (55) の肩の質量次元が 0 であることから、

$$[k_+]+[A^+]=1, \tag{81}$$
$$[k_-]+[A^-]=1, \tag{82}$$
$$[k_i]+[A^i]=1, \tag{83}$$
$$[\kappa]+[\varphi]=1, \tag{84}$$
$$[\chi]+[\phi]=1, \tag{85}$$

である。但し

$$\kappa(\sigma)=\frac{1+\gamma^9}{2}\lambda(\sigma), \tag{86}$$
$$\chi(\sigma)=\frac{1-\gamma^9}{2}\lambda(\sigma), \tag{87}$$

である。今、 $k_-=1$ となるように Wilson loop のパラメーターを決めたので、

$$\begin{array}{lllll} [k_+]=2, & [k_-]=0, & [k_i]=1, & [\kappa]=\frac{1}{2}, & [\chi]=\frac{3}{2}, \\ [A^+]=-1, & [A^-]=+1, & [A^i]=0, & [\varphi]=\frac{1}{2}, & [\phi]=-\frac{1}{2}, \\ [x^+]=-1, & [x^-]=1, & [x^i]=0, & [\theta]=\frac{1}{2}, & [\pi]=-\frac{1}{2}, \end{array} \tag{88}$$

となる。ここで使った x^+,x^-,x^i,θ,ϕ は各々 k_-,k_+,k_i,κ,χ に正準共役な演算子、

$$[x^j(\sigma),k_i(\rho)]=i\delta_i^{\ j}\delta(\sigma-\rho), \tag{89}$$
$$[x^+(\sigma),k_+(\rho)]=i\delta(\sigma-\rho), \tag{90}$$
$$[x^-(\sigma),k_-(\rho)]=i\delta(\sigma-\rho), \tag{91}$$
$$\{\kappa^\alpha(\sigma),\theta^\beta(\rho)\}=\delta^{\alpha\beta}\delta(\sigma-\rho), \tag{92}$$
$$\{\chi^\alpha(\sigma),\pi^\beta(\rho)\}=\delta^{\alpha\beta}\delta(\sigma-\rho) \tag{93}$$

である。[2]

---

[2] $f(\sigma)=\int d\rho\,\delta(\rho-\sigma)f(\rho)$, なので、$\delta(\sigma-\rho)$ の質量次元は 1 である。

次に、弦の世界面の parity を定義する。IIB matrix model の作用 (71) には matrix の転置に対応する対称性、

$$\begin{aligned} A^\mu &\mapsto {}^T\!A^\mu, \\ \psi &\mapsto -i\,{}^T\!\psi, \end{aligned} \tag{94}$$

がある。ここで ^{T} は行列の足に対する転置である。(94) の変換に対して、 Wilson loop は、

$$\begin{aligned} W(C) &= Tr\left(\mathcal{P}e^{i\oint d\sigma(k_\mu(\sigma)A^\mu+\bar{\lambda}(\sigma)\psi)}\right), \\ &\mapsto Tr\left(\mathcal{P}e^{i\oint d\sigma(k_\mu(\sigma)\,{}^TA^\mu+\bar{\lambda}(\sigma)\,{}^T\psi)}\right), \\ &= Tr^T\left(\mathcal{P}e^{i\oint d(-\sigma)(k_\mu(\sigma)A^\mu-i\bar{\lambda}(\sigma)\psi)}\right), \\ &= Tr\left(\mathcal{P}e^{i\oint d\sigma(k_\mu(-\sigma)A^\mu-i\bar{\lambda}(-\sigma)\psi)}\right), \end{aligned} \tag{95}$$

と変換するので、 Wilson loop の有効理論は

$$\begin{aligned} k_\mu(\sigma) &\mapsto k_\mu(-\sigma), \\ \lambda(\sigma) &\mapsto i\lambda(-\sigma), \end{aligned} \tag{96}$$

と変換すると (94) の変換の下で不変になる。k_μ, κ, χ に正準共役な変数 x^μ, θ, π については、

$$\begin{aligned} x^\mu(\sigma) &\mapsto x^\mu(-\sigma), \\ \theta(\sigma) &\mapsto -i\theta(-\sigma), \\ \chi(\sigma) &\mapsto -i\chi(-\sigma), \end{aligned} \tag{97}$$

と変換する。

次に、 super-charge について考える。超対称変換 (5, 6) は

$$
\begin{aligned}
\delta^{(1)}_{(\varepsilon_\uparrow,\varepsilon_\downarrow)} A^i &= i[\,{}^t\varepsilon_\uparrow Q^1 + {}^t\varepsilon_\downarrow q^1, A^i] = {}^t\varepsilon_\uparrow \gamma^i \varphi + {}^t\varepsilon_\downarrow \gamma^i \phi, \\
\delta^{(1)}_{(\varepsilon_\uparrow,\varepsilon_\downarrow)} A^+ &= i[\,{}^t\varepsilon_\uparrow Q^1 + {}^t\varepsilon_\downarrow q^1, A^+] = -2\,{}^t\varepsilon_\downarrow \phi, \\
\delta^{(1)}_{(\varepsilon_\uparrow,\varepsilon_\downarrow)} A^- &= i[\,{}^t\varepsilon_\uparrow Q^1 + {}^t\varepsilon_\downarrow q^1, A^-] = 2\,{}^t\varepsilon_\uparrow \varphi, \\
\delta^{(1)}_{(\varepsilon_\uparrow,\varepsilon_\downarrow)} \varphi &= i[\,{}^t\varepsilon_\uparrow Q^1 + {}^t\varepsilon_\downarrow q^1, \varphi] \\
&= \frac{i}{2}([A^i, A^j]\gamma_{ij} + \frac{i}{\sqrt{2}}[A^i, A^-]\gamma_i + 2i[A^+, A^-])\varepsilon_\uparrow, \\
\delta^{(1)}_{(\varepsilon_\uparrow,\varepsilon_\downarrow)} \varphi &= i[\,{}^t\varepsilon_\uparrow Q^1 + {}^t\varepsilon_\downarrow q^1, \phi] \\
&= \frac{i}{2}([A^i, A^j]\gamma_{ij} - \frac{i}{\sqrt{2}}[A^i, A^+]\gamma_i - 2i[A^+, A^-])\varepsilon_\downarrow, \qquad (98) \\
\delta^{(2)}_{(\xi_\uparrow,\xi_\downarrow)} A^i &= i[\,{}^t\xi_\uparrow Q^2 + {}^t\xi_\downarrow q^2, A^i] = 0, \\
\delta^{(2)}_{(\xi_\uparrow,\xi_\downarrow)} A^+ &= i[\,{}^t\xi_\uparrow Q^2 + {}^t\xi_\downarrow q^2, A^+] = 0, \\
\delta^{(2)}_{(\xi_\uparrow,\xi_\downarrow)} A^+ &= i[\,{}^t\xi_\uparrow Q^2 + {}^t\xi_\downarrow q^2, A^+] = 0, \\
\delta^{(2)}_{(\xi_\uparrow,\xi_\downarrow)} \varphi &= i[\,{}^t\xi_\uparrow Q^2 + {}^t\xi_\downarrow q^2, \varphi] = \xi_\uparrow, \\
\delta^{(2)}_{(\xi_\uparrow,\xi_\downarrow)} \phi &= i[\,{}^t\xi_\uparrow Q^2 + {}^t\xi_\downarrow q^2, \phi] = \xi_\downarrow, \qquad (99)
\end{aligned}
$$

と書ける。[3]但し ε, ξ は SO(8) の Majorana spinor で、

$$
\varepsilon_\uparrow = \frac{1+\gamma^9}{2}\varepsilon, \qquad \xi_\uparrow = \frac{1+\gamma^9}{\xi},
$$
$$
\varepsilon_\downarrow = \frac{1-\gamma^9}{2}\varepsilon, \qquad \xi_\downarrow = \frac{1-\gamma}{2}\xi, \qquad (100)
$$

[3] (62) で書いた Q^1, Q^2 と、ここで書いた Q^1, q^1, Q^2, q^2 との関係は、$Q^1 = \frac{1}{2}(1+\gamma^9)Q^1$, $q^1 = \frac{1}{2}(1-\gamma^9)Q^1$, $Q^2 = \frac{1}{2}(1+\gamma^9)Q^2$, $q^1 = \frac{1}{2}(1-\gamma^9)Q^2$, である。紛らわしいが、それぞれの左辺の Q, q はそれぞれ (98), (99) のもので、右辺の Q は (62) のものである。

である。演算子 Q^a, q^a の質量次元と parity は、(88) と (94) から、

$$
\begin{aligned}
&[\varepsilon_\uparrow] = [\xi_\uparrow] = \frac{1}{2}, \\
&[\varepsilon_\downarrow] = [\xi_\downarrow] = -\frac{1}{2}, \qquad (101) \\
&\varepsilon_\uparrow \mapsto i\varepsilon_\uparrow, \\
&\varepsilon_\downarrow \mapsto i\varepsilon_\downarrow, \\
&\xi_\uparrow \mapsto -i\xi_\uparrow, \\
&\xi_\downarrow \mapsto -i\xi_\downarrow, \qquad (102) \\
&[Q^1] = [Q^2] = -\frac{1}{2}, \\
&[q^1] = [q^2] = \frac{1}{2}, \qquad (103) \\
&Q^1 \mapsto -iQ^1, \\
&q^1 \mapsto -iq^1, \\
&Q^2 \mapsto iQ^2, \\
&q^2 \mapsto iq^2, \qquad (104)
\end{aligned}
$$

となる。

これらの事実を使って、super-charge $Q^1, q^1.\ Q^2, q^2$ がどのように書けるかを考える。Wilson loop の拘束条件の式 (58) から fermion 演算子のうちの半分だけが自由度として生き残る。生き残らせる自由度として、x^i, k_i, κ, θ を選ぶことにする。これらの演算子を使って、 Hamiltonian の free part, すなわち、演算子の 2 次の項を求めることにする。そのためには、super charge Q^a, q^a の 2 次の項までを求めればよい。Q^a, q^a はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
Q^a &= \int d\sigma f^a[x^{(m)}(\sigma), k^{(n)}(\sigma), \kappa^{(k)}(\sigma), \theta^{(l)}(\sigma)], \\
q^a &= \int d\sigma g^a[x^{(m)}(\sigma), k^{(n)}(\sigma), \kappa^{(k)}(\sigma), \theta^{(l)}(\sigma)], \qquad (105)
\end{aligned}
$$

で書くことができる。$SO(8)$ の対称性から

$$
\begin{aligned}
Q^a \sim \int d\sigma \Big(&(k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \theta^{(n)}(\sigma) \\
&+ (k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \kappa^{(n)}(\sigma) \Big), \\
q^a \sim \int d\sigma \Big(&(k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \not{x} \theta^{(n)} \\
&+ (k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \not{k} \theta^{(n)} \\
&+ (k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \not{x} \kappa^{(n)} \\
&+ (k_+^{(k)}(\sigma))^p (x^{+(l)}(\sigma))^q (x^{-(m)}(\sigma))^r \not{k} \kappa^{(n)} \Big), \qquad (106)
\end{aligned}
$$

と書けるはずである。Q^a, q^a の質量次元がそれぞれ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ であることから、f^a, g^a の質量次元はそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ となるので、

$$
\begin{aligned}
Q^a &\sim \int d\sigma \left(\theta(\sigma) + \kappa(\sigma) \right), \\
q^a &\sim \int d\sigma \big(\not{x}'(\sigma)\theta(\sigma) + \not{x}(\sigma)\theta'(\sigma) + \not{k}(\sigma)\theta(\sigma) \\
&\qquad + \not{x}'(\sigma)\kappa(\sigma) + \not{x}(\sigma)\kappa'(\sigma) + \not{k}(\sigma)\kappa(\sigma) \big), \qquad (107)
\end{aligned}
$$

となる。[4]この系に並進不変性を課すと、

$$
\begin{aligned}
Q^a &\sim \int d\sigma \left(\theta(\sigma) + \kappa(\sigma) \right), \\
q^a &\sim \int d\sigma \left(\not{x}'(\sigma)\theta(\sigma) + \not{k}(\sigma)\theta(\sigma) + \not{x}'(\sigma)\kappa(\sigma) + \not{k}(\sigma)\kappa(\sigma) \right), \qquad (108)
\end{aligned}
$$

となる。最後に、Q^a, q^a の parity を両辺であわせると、

$$
\begin{aligned}
Q^1 &= \int d\sigma a \kappa(\sigma), \\
Q^2 &= \int d\sigma b \theta(\sigma), \\
q^1 &= \int d\sigma \left(c_1 \not{x}'(\sigma)\theta(\sigma) + c_2 \not{k}(\sigma)\kappa(\sigma) \right), \\
q^2 &= \int d\sigma \left(d_1 \not{x}'(\sigma)\kappa(\sigma) + d_2 \not{k}(\sigma)\theta(\sigma) \right), \qquad (109)
\end{aligned}
$$

と書ける。

[4]この計算の途中で、$x^{+\prime}$ の質量次元は 0 なので、これがかかったものは残りうるのだが、 Wiloson loop を $x^+ = const.$ の面上にとったので $x^{+\prime} = 0$ である。

ところで、 IIB matrix model の fermionic な対象性 (5, 6) から、

$$
[\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\xi] = -i\bar{\varepsilon} \not{P} \xi, \qquad (110)
$$

が導かれる。この式を Q^a, q^a で書き換えてやると、

$$
\begin{aligned}
\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\} &= 2P_- \delta_{\alpha\beta}, \\
\{Q^1_\alpha, q^2_\beta\} &= \not{P}_{\beta\alpha}, \\
\{q^1_\alpha, Q^2_\beta\} &= \not{P}_{\alpha\beta}, \\
\{q^1_\alpha, q^2_\beta\} &= 2P_+ \delta_{\alpha\beta}, \qquad (111)
\end{aligned}
$$

となる。(111) の左辺を計算してやるとそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\} &= \int d\sigma d\rho \, ab \{\kappa_\alpha(\sigma), \theta_\beta(\rho)\} \\
&= ab \int d\sigma = ab \, P_-, \\
\{Q^1_\alpha, q^2_\beta\} &= \int d\sigma d\rho a d_2 \{\kappa_\alpha(\sigma), \not{k}_{\beta\gamma}(\rho)\theta_\gamma(\rho)\} \\
&= a d_2 \int d\sigma \not{k}_{\beta\alpha}(\sigma) = a d_2 \not{P}_{\beta\alpha}, \\
\{q^1_\alpha, Q^2_\beta\} &= \int d\sigma d\rho c_2 b \{\not{k}_{\alpha\gamma}(\sigma)\kappa_\gamma(\sigma), \theta_\beta(\rho)\} \\
&= b c_2 \int d\sigma \not{k}_{\alpha\beta}(\sigma) = b c_2 \not{P}_{\alpha\beta}, \\
\{q^1_\alpha, q^2_\beta\} &= \int d\sigma d\rho (c_1 d_1 \not{x}'_{\alpha\gamma} \not{x}'_{\beta\delta} \{\theta_\gamma(\sigma), \kappa_\delta(\rho)\} \\
&\qquad + c_2 d_2 \not{k}_{\alpha\gamma} \not{k}_{\beta\delta} \{\kappa_\gamma(\sigma), \rho_\delta(\rho)\} \\
&\qquad + c_1 d_2 \gamma_{i\alpha\gamma} \theta_\gamma(\sigma) [x^{i\prime}(\sigma), k_j(\rho)] \gamma^j_{\beta\delta} \theta_\delta(\rho) \\
&\qquad + c_2 d_1 \gamma^i_{\alpha\gamma} \kappa(\sigma) [k_i(\sigma), x^{j\prime}(\rho)] \gamma_{j\beta\delta} \kappa(\rho)), \\
&= \int d\sigma (c_1 d_1 (\not{x}'(\sigma)\not{x}'(\sigma))_{\alpha\beta} + c_2 d_2 (\not{k}(\sigma)\not{k}(\sigma))_{\alpha\beta} \\
&\quad - i c_1 d_2 \theta_\gamma(\sigma) \gamma^i_{\gamma\alpha} \gamma_{i\beta\delta} \theta'_\delta(\sigma) + i c_2 d_1 \kappa'_\gamma(\sigma) \gamma_{i\gamma\alpha} \gamma^i_{\beta\delta} \kappa_\delta(\sigma)), \qquad (112)
\end{aligned}
$$

となる。(112) の最後では、$\gamma^i_{\beta\alpha} = \gamma^i_{\alpha\beta}$ を使った。(111, 112) を使うと、

この系の Hamiltonian H は

$$
\begin{aligned}
H = P_+ &= \frac{1}{16} Tr\{q^1, q^2\} \\
&= \frac{1}{16}\int d\sigma \Big(8c_1 d_1 D x'^2(\sigma) + 8c_2 d_2 D k^2(\sigma) \\
&\qquad - 8ic_1 d_2 \theta(\sigma)\theta'(\sigma) + 8ic_2 d_1 \kappa'(\sigma)\kappa(\sigma) \Big), \\
&= \frac{1}{2}\int d\sigma \Big(k^2(\sigma) + c_1 d_1 x'^2(\sigma) \\
&\qquad - i\frac{c_1}{a}\theta(\sigma)\theta'(\sigma) + i\frac{ad_1}{2}\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma) \Big),
\end{aligned} \tag{113}
$$

と書ける。さらに、fermion を $\kappa \mapsto \sqrt{\frac{2}{ad_1}}\kappa$ と再定義しなおす。すると、正準交換関係を満たすような θ は、$\theta \mapsto \sqrt{\frac{ad_1}{2}}\theta$ と再定義しなおさなくてはいけなくなり、結局 Hamiltonian は、

$$
H = \frac{1}{2}\int d\sigma \left(k^2(\sigma) + c_1 d_1 x'^2(\sigma) + i\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma) - i\frac{c_1 d_1}{2}\theta(\sigma)\theta'(\sigma) \right), \tag{114}
$$

となり、 terget space における次元勘定から

$$
b_1 c_2 \sim \frac{1}{\alpha'^2}, \tag{115}
$$

でなければならない。また、この Hamiltonian (114) は light-cone Green-Schwrz hamiltonian そのものになっている。

2.3.3 Large N behavior of g

ところで、この α' は IIB matrix model のパラメーター g, N で書かれているはずである。ではどのように書かれているのであろうか？このことを調べるために今一度 loop 方程式 (57) に立ち戻る。ここでは、簡単のために bosonic model でやることにする。

Wilson line (55)

$$
v[k_\mu(\sigma)] = \mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma_f} d\sigma k_\mu(\sigma)A^\mu}, \tag{116}
$$

に対して、演算子 $x^\mu(\sigma)$ は

$$
\begin{aligned}
x^\mu(\sigma)v[k] &= \frac{\delta}{i\delta k_\mu(\sigma)} v[k], \\
&= \left(\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) A^\mu \left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right),
\end{aligned} \tag{117}
$$

と作用する。次に、$x'^\mu(\sigma)$ の作用を見る。$\epsilon > 0$ として、

$$
\begin{aligned}
x'^\mu(\sigma)v[k] &= \frac{1}{\epsilon}\left(x^\mu(\sigma + \frac{1}{2}\epsilon)v[k] - x^\mu(\sigma - \frac{1}{2})v[k] \right), \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left(\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma-\frac{1}{2}\epsilon} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) \\
&\quad \times \left(\left(\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma-\frac{1}{2}\epsilon}^{\sigma+\frac{1}{2}\epsilon} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) A^\mu \left(\mathcal{P}e^{-i\int_{\sigma-\frac{1}{2}\sigma}^{\sigma+\frac{1}{2}\epsilon} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) \right. \\
&\qquad \left. - A^\mu \right) \left(\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma-\frac{1}{2}\epsilon}^{\sigma_f} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) \\
&= \left(\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right)[ik_\nu(\sigma)A^\nu, A^\mu]\left(\mathcal{P}e^{-i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right) \\
&\qquad + O(\epsilon),
\end{aligned} \tag{118}
$$

なので、

$$
x'^\mu(\sigma)v[k] = \left(\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right)[ik_\nu(\sigma)A^\nu, A^\mu]\left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\mu(\rho)A^\mu}\right), \tag{119}
$$

となる。例えば、 Wilson loop (55) に対して、

$$
\begin{aligned}
&x'^\mu(\sigma)\langle W[k^1(\sigma)]\dots W[k^n(\sigma)]\rangle \\
&\quad = \langle (Tr[ik_\nu(\sigma)A^\nu, iA^\nu]v[k^1(\sigma)])W[k^2(\sigma)]\cdots W[k^n(\sigma)]\rangle,
\end{aligned} \tag{120}
$$

となる。(120) より、演算子の恒等式

$$
k_\mu(\sigma)x'^\mu(\sigma) = 0, \tag{121}
$$

が導かれる。この恒等式は 2 つある Vilasoro 条件のうちの 1 つである。Vilasoro 条件の残りを

$$
k^2(\sigma) + \frac{1}{\alpha'^2}x'^2(\sigma) = 0, \tag{122}
$$

導き、IIB matrix のパラメーターと α' との関係を求めることにする。

まず、$x'^2(\sigma)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
x'^2(\sigma)v[k] &= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\delta}{i\delta k^\mu(\sigma+\frac{1}{2}\epsilon)} - \frac{\delta}{i\delta k^\mu(\sigma-\frac{1}{2}\epsilon)}\right) x'^\mu(\sigma)v[k], \\
&= \left(\mathcal{P}e^{i\int_0^{\sigma-\frac{1}{2}\epsilon} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right) A_\mu \left(\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma-\frac{1}{2}\epsilon}^{\sigma} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right) \\
&\quad \times [ik_\nu(\sigma)A^\nu, A^\mu]\left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\nu(\sigma)A^\nu}\right) \\
&\quad - \left(\mathcal{P}e^{\int_0^\sigma d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right)[ik_\nu(\sigma)A^\nu, A^\mu], \\
&\quad \times \left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma+\frac{1}{2}\epsilon} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right) A_\mu \left(\mathcal{P}e^{i\int_{\sigma+\frac{1}{2}\epsilon}^{\sigma_f} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right), \\
&\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{1}{\epsilon}\left(\mathcal{P}e^{i\int_0^\sigma d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right)[A_\mu, [ik_\nu(\sigma)A^\nu, A^\mu]] \\
&\quad \times \left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right), \qquad (123)
\end{aligned}
$$

となり、これより

$$
\begin{aligned}
&\left\langle Tr\left(\frac{1}{g^2}[A_\nu, [ik_\mu(0)A^\mu, A^\nu]]v[k^1]\right) W[k^2]\cdots W[k^n]\right\rangle \\
&\qquad = \frac{\epsilon}{g^2}x'^2(0)\left\langle W[k^1]\cdots W[k^n]\right\rangle, \qquad (124)
\end{aligned}
$$

が導かれる。左辺は、Schwinger-Dyson 方程式 (57) で $\frac{\partial}{\partial A^\mu}$ が e^-S に作用した項である。

次に、$k^2(\sigma)$ の係数を調べるために、$\frac{\partial}{\partial A^\mu}$ が $v[k]$ に作用する項を調べる。T^a を SU(N) の基底だとすると、

$$
\begin{aligned}
Tr\left(T^a\frac{\partial}{\partial A_a^\mu}v[k]\right) &= Tr\left(T^a\int_0^{\sigma_f} d\sigma\left(\mathcal{P}e^{i\int_0^\sigma d\sigma k_\nu(\rho)A^\nu}\right) ik_\mu(\sigma)T^a\right. \\
&\qquad \left.\times\left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\sigma k_\nu(\rho)A^\nu}\right)\right), \\
&= \int_0^{\sigma_f} d\sigma k_\mu(\sigma) Tr\left(\mathcal{P}e^{i\int_0^\sigma d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right) \\
&\qquad \times Tr\left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right), \\
&= N\epsilon k_\mu(0) + O(\epsilon^2) \\
&\quad + \int_\epsilon^{\sigma_f} d\sigma k_\mu(\sigma) Tr\left(\mathcal{P}e^{i\int_\epsilon^\sigma d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right) \\
&\qquad \times\left(\mathcal{P}e^{i\int_\sigma^{\sigma_f} d\rho k_\nu(\rho)A^\nu}\right), \qquad (125)
\end{aligned}
$$

である。(125) を使うと、Schwinger-Dyson 方程式 (57) で $\frac{\partial}{\partial A_a^\mu}$ が $v[k^1]$ に作用する部分から

$$
iN\epsilon k^2(\sigma)\left\langle W[k^1]\cdots W[k^n]\right\rangle, \qquad (126)
$$

が導かれる。Schwinger-Dyson 方程式 (57) の free part は (124, 126) だけからのみ出てきて、

$$
i\epsilon N\left(k^2(\sigma) + \frac{1}{g^2N}x'^2(\sigma)\right)\left\langle W[k^1]\cdots W[k^n]\right\rangle = 0, \qquad (127)
$$

となる。従って、

$$
g^2N \sim \alpha'^2, \qquad (128)
$$

とすると、(127) は Vilasoro 条件の残りになっている。

この節の議論をまとめると、IIB matrix model の Wilson loop (55) の light-cone frame における有効理論を作ることができる。この有効理論の Hamiltonian は (62) から、IIB matrix model の $\mathcal{N}=2$ の超対称代数から決めることができる。この超対称代数の生成子 Q^1, Q^2 は各場の質量次元、パリティー、そして $SO(8)$ 対称性から決めることができる。

以上の議論から Type IIB 型の超弦理論の摂動論を含んでおり、超弦理論の構成的定義になっていると期待されている。

3 Mappig between U(N) Algebra and Field on Non-Commutative Periodec Lattice

Large N limit の U(N) 代数については [9, 10, 11] らによって調べられている。U(N) の代数の基底は 2 つの行列

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \omega^{N-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{129}$$

$$\omega = e^{i\frac{4\pi}{N}}$$

を使って、

$$\mathbf{T}_{(mn)} = e^{i\frac{2\pi}{N}mn}U^mV^n \tag{130}$$

と書く事ができる。U, V は関係式

$$U^N = V^N = \mathbf{1} \tag{131}$$

$$VU = e^{i\frac{2\pi}{N}}UV \tag{132}$$

を満たす。(132) から $\mathbf{T_m}$ と $\mathbf{T_m}$ の積は

$$\begin{aligned} \mathbf{T_m T_n} &= e^{i\frac{2\pi}{N}(m_1m_2+n_1n_2)}U^{m_1}V^{m_2}U^{n_1}V^{n_2}, && (133)\\ &= e^{i\frac{2\pi}{N}(m_1m_2+n_1n_2+2m_2n_1)}U^{m_1}U^{n_1}V^{m_2}V^{n_2}, && (134)\\ &= e^{i\frac{2\pi}{N}\{(m_1+n_1)(m_2+n_2)+(m_2n_1-m_1n_2)\}}U^{m_1+n_1}V^{m_2+n_2}, && (135)\\ &= e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}m_an_b}\mathbf{T_{m+n}}. && (136) \end{aligned}$$

と書くことができる。この $\mathbf{T_m}$ と使うと、U(N) の交換関係は

$$[\mathbf{T_m}, \mathbf{T_n}] = -2i\sin\left(\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}m_an_b\right)\mathbf{T_{m+n}}, \tag{137}$$

となる。$\mathbf{T_m}$ の交換関係は座標の交換関係が

$$[\sigma^1, \sigma^2] = i\frac{4\pi}{N}, \tag{138}$$

である時の平面波 $e^{i2\pi\mathbf{m}\cdot\sigma}$ の star product での交換関係そのものになる [7]。

$N \times N$ Hermite matrix と torus 上の場との変換を決める演算子 $\Delta(\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{Z}_N^2$ を

$$\Delta(\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{m}}\mathbf{T_m}e^{-i2\pi\mathbf{m}\cdot\sigma}, \tag{139}$$

で定義する。U(N) の生成元の周期性 (131) を torus 上の場で実現させるために σ^a, $a = 1, 2$ の定義域を $\sigma^a = \frac{k^a}{N}$, $k^a = 0, \cdots N-1$ と $N \times N$ lattice に制限し、この lattice を $\mathbb{T}^2_{N^2}$ と書くことにする。この Δ は $2\pi\mathbf{m}$ を $\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の場の 2 次元運動量だと思ったとき、運動量表示された行列 $\mathbf{T}_m$ をフーリエ変換したものである。この Δ によりと写れされた $N \times N$ Hermite matrix $A = \sum_{0 \le m_a \le N-1} A_\mathbf{m} T_\mathbf{m}$ は $\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の場 $A(\sigma)$ で

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= Tr(\Delta(\sigma)A) && (140)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{m,n}}Tr(\mathbf{T_m T_n})A_\mathbf{m}e^{-i2\pi\mathbf{n}\cdot\sigma} && (141)\\ &= \sum_{0 \le m_a \le N}A_\mathbf{m}e^{i2\pi\mathbf{m}\cdot\sigma} && (142) \end{aligned}$$

となる。逆変換も同様に計算できて、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{N}\sum_{\sigma \in \mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}}\Delta(\sigma)A(\sigma), && (143)\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{\sigma \in \mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}}\sum_{\mathbf{m,n}}\mathbf{T_m}e^{-i2\pi\mathbf{m}\cdot\sigma}A_\mathbf{n}e^{i2\pi\mathbf{n}\cdot\sigma}, && (144)\\ &= \sum_{\mathbf{m}}A_\mathbf{m}\mathbf{T_m}. && (145) \end{aligned}$$

となる。この $\Delta(\sigma)$ 達には次の性質がある。

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma)\Delta(\rho) &= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \mathbf{T}_{\mathbf{m}}\mathbf{T}_{\mathbf{n}} e^{-i2\pi(\mathbf{m}\cdot\sigma+\mathbf{n}\cdot\rho)}, &(146)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}m_a n_b}\mathbf{T}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}} e^{-i2\pi(\mathbf{m}\cdot\sigma+\mathbf{n}\cdot\rho)}, &(147)\\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{\lambda}\Delta(\lambda)\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{i2\pi(\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\lambda} e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}m_a n_b} e^{-i2\pi(\mathbf{m}\cdot\sigma+\mathbf{n}\cdot\rho)}, &(148)\\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{\lambda}\Delta(\lambda)\\
&\quad \times\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}\{m_a n_b+N(m_a\epsilon_{cb}(\sigma^c-\lambda^c)+n_b\epsilon_{ac}(\rho^c-\lambda^c))\}}, &(149)\\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{\lambda}\Delta(\lambda)\\
&\quad \times\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ab}(m_a+N\epsilon_{ac}(\rho-\lambda)^c)(n_b-N\epsilon_{bc}(\sigma-\lambda)^c)}\\
&\qquad \times e^{-i2\pi N\epsilon_{ab}(\rho-\lambda)^a(\sigma-\lambda)^b}, &(150)\\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{\lambda} e^{-i2\pi N\epsilon_{ab}(\rho-\lambda)^a(\sigma-\lambda)^b}\Delta(\lambda)\\
&\quad \times N^2\sum_{\mathbf{n}}\delta\left(n_b-\frac{N}{2\pi}\epsilon_{bc}(\sigma-\lambda)^c\right), &(151)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{\lambda} e^{i2\pi N\epsilon_{ab}(\sigma^a-\lambda^a)(\rho^b-\lambda^b)}\Delta(\lambda), &(152)\\
Tr(\Delta(\sigma)\Delta(\rho)) &= N\delta(\sigma-\rho). &(153)
\end{aligned}$$

この Δ によって $N\times N$ Hermite matrices A,B の積 AB は $\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の

関数の diamond product ($\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の star product)

$$\begin{aligned}
A(\sigma)\diamond B(\sigma) &\equiv Tr(\Delta(\sigma)AB), &(154)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\rho\lambda} Tr(\Delta(\sigma)\Delta(\rho)\Delta(\lambda))A(\rho)B(\lambda), &(155)\\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{\rho\lambda\kappa} e^{i2\pi N\epsilon_{cb}(\rho^c-\kappa^c)(\lambda^b-\kappa^b)} Tr(\Delta(\sigma)\Delta(\kappa))\\
&\quad \times A(\rho)B(\lambda), &(156)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\rho\lambda} e^{i2\pi N\epsilon_{cb}(\rho^c-\sigma^c)(\lambda^b-\sigma^b)} A(\rho)B(\lambda), &(157)
\end{aligned}$$

に写される。この式は、更に

$$\begin{aligned}
A(\sigma)\diamond B(\sigma) &= \frac{1}{N^2}\sum_{\rho\lambda} e^{i2\pi N\epsilon_{cb}(\rho^c-\sigma^c)(\lambda^b-\sigma^b)} A(\rho)B(\lambda), &(158)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\rho\lambda}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{i2\pi N\epsilon_{cb}(\rho^c-\sigma^c)(\lambda^b-\sigma^b)} e^{i2\pi\mathbf{m}\cdot\rho} e^{i2\pi\mathbf{n}\cdot\lambda}\\
&\quad \times A_{\mathbf{m}}B_{\mathbf{n}}, &(159)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\sum_{\rho\lambda} e^{i2\pi N\epsilon_{ab}(\rho^a\lambda^b-\rho^a\sigma^b-\sigma^a\lambda^b+\rho^a\epsilon^{cb}\frac{m_c}{N}+\epsilon^{ac}\frac{n_c}{N}\lambda^b)}\\
&\quad \times A_{\mathbf{m}}B_{\mathbf{n}}, &(160)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\sum_{\rho\lambda} e^{i2\pi\{N\epsilon_{ab}(\rho^a-\sigma^a+\frac{1}{N}\epsilon^{ac}n_c)(\lambda^b-\sigma^b-\frac{1}{N}\epsilon^{bc}m_c)\}}\\
&\quad \times e^{i2\pi\{\frac{1}{N}\epsilon^{cd}n_c m_d+(\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\sigma\}} A_{\mathbf{m}}B_{\mathbf{n}}, &(161)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\epsilon^{ac}m_a n_b} A_{\mathbf{m}}B_{\mathbf{n}} e^{i2\pi(\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\sigma}\\
&\quad \times N^2\sum_{\rho}\delta\left(\rho^a-\sigma^a+\frac{1}{N}\epsilon^{ac}n_c\right), &(162)\\
&= A(\sigma)e^{i\frac{1}{2\pi N}\epsilon^{ab}\overleftarrow{\partial}_a\overrightarrow{\partial}_b}B(\sigma). &(163)
\end{aligned}$$

と書くことが形式的にできる。Δ 写像により $N\times N$ Hermite matrix の積が $\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の場の diamond product に写る [15]。

Matrix model として matrices A_i の作用

$$S = TrF(A_i) \qquad (164)$$

を持つ理論を考える。Matrix と NCPL との写像 (140) によりこの作

用 (167) は

$$S = Tr\left(\frac{1}{N}\sum_{\sigma}\Delta(\sigma)F_{\diamond}(A_i(\sigma))\right) \tag{165}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{\sigma\in\mathbb{T}^2_{N^2}} F_{\diamond}(A_i(\sigma))Tr\Delta(\sigma) \tag{166}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{\sigma\in\mathbb{T}^2_{N^2}} F_{\diamond}(A_i(\sigma)) \tag{167}$$

に写される。ただし $F_{\diamond}(A_i(\sigma))$ は $F(A_i)$ 中の A_i の積を diamond product に読み替えたものである。path integral の measure は

$$\mathcal{D}A^i(\sigma) = \prod_{m\in\mathbf{Z}^2_{N^2}} dA^i_{\mathbf{m}} \tag{168}$$

で定義する。この積分 measure は元々の matrix の measure と同じものなので、matrix model (164) と $\mathbb{T}^2_{N^2}$ 上の場の理論 (167) は等価な理論になる。

これまでは U(N) の matrix model について書いてきた。今までの議論を SU(N) の matrix model にも応用する事ができる。SU(N) の行列は U(N) の行列から trace 部分を手で落とせばよく、この操作は NCPL 上の場の 0-mode を手で落とすことに対応している。

4 Field theory on Non-commutative Periodic Lattice as IIB matix model

IIB matrix model の作用 [2]

$$S_{IIB} =-\frac{1}{g^2}Tr\left(\frac{1}{4}[A^{\mu},A^{\nu}]^2+\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_{\mu}[A^{\mu},\Psi]\right) \tag{169}$$

は matrices と NCPL 上の場とを結びつける Δ 写像を使って

$$S_{IIB} = -\frac{1}{g^2N}\sum_{\sigma\in\mathbb{T}^2_{N^2}}\left(\frac{1}{4}[A^{\mu}(\sigma),A^{\nu}(\sigma)]^2_{\diamond}+\frac{1}{2}\overline{\Psi}(\sigma)\diamond\Gamma_{\mu}[A^{\mu}(\sigma),\Psi(\sigma)]_{\diamond}\right), \tag{170}$$

に書き換えることができる。[16, 17]

我々は NCPL 上の場の理論 (170) を使って相関関数の N 依存性を考え、Monte Carlo simulation で得られた結果 [20, 21] と摂動論を使った結果 [20] を簡単に導くことができた。我々の議論の出発点は boson だけの作用と、 fermion が入った作用各々の期待値が N^2 に比例すると言う事実である。実際に boson だけが入った部分は

$$Z[\kappa] = \int\mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi e^{\frac{1}{g^2N}\sum_{\sigma}(\frac{\kappa}{4}[A^{\mu}(\sigma),A^{\nu}(\sigma)]^2_{\diamond}+\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_{\mu}[A^{\mu},\Psi])}, \tag{171}$$
$$= \kappa^{-(\frac{D}{4}+2^{[\frac{D}{2}]-4})(N^2-1)}$$
$$\times\int\mathcal{D}(\kappa^{\frac{1}{4}}A)\mathcal{D}(\kappa^{-\frac{1}{8}}\Psi)e^{\frac{1}{4g^2N}\sum_{\sigma}[\kappa^{\frac{1}{4}}A^{\mu}(\sigma),\kappa^{\frac{1}{4}}A^{\nu}(\sigma)]^2_{\diamond}}$$
$$\times e^{\frac{1}{2g^2N}\kappa^{\frac{1}{4}}A^{\mu},\kappa^{-\frac{1}{8}}\Psi])}, \tag{172}$$
$$= \kappa^{-(\frac{D}{4}+2^{[\frac{D}{2}]-4})(N^2-1)}Z[\kappa=1]. \tag{173}$$

次に、この両辺を κ で微分し、 $\kappa\to 0$ の極限を取る。すると、

$$\left\langle -\frac{1}{4g^2N}\sum_{\sigma\in\mathbb{T}^2_{N}}[A^{\mu}(\sigma),A^{\nu}(\sigma)]^2_{\diamond}\right\rangle = \left(\frac{D}{4}+2^{[\frac{D}{2}]-4}\right)(N^2-1), \tag{174}$$

となる。交換子によって N の次数が影響されない事を仮定すれば、$\sum_{\sigma}\sim O(N^2)$ だと勘定できるので

$$A^{\mu}(\sigma)\sim O((g^2N)^{\frac{1}{4}}), \tag{175}$$

となる。(182) を使うと、相関関数の N 依存性は

$$\left\langle \frac{1}{N} Tr(A^{\mu_1} \cdots A^{\mu_{2k}}) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{\sigma \in \mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}} (A^{\mu_1}(\sigma) \diamond \cdots \diamond A^{\mu_{2k}}) \right\rangle$$
$$\sim O((g^2 N)^{\frac{k}{2}}), \tag{176}$$

と評価できる。(176) の特別な場合として、boson の分散が

$$\left\langle \frac{1}{N} Tr(A^2) \right\rangle \sim O(g N^{\frac{1}{2}}), \tag{177}$$

と評価できる。

同様にして、 fermion が入った部分は

$$Z[\lambda] = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi e^{\frac{1}{g^2 N} \sum_{\sigma} (\frac{1}{4}[A^\mu(\sigma), A^\nu(\sigma)]_\diamond^2 + \frac{i\lambda}{2} \overline{\Psi} \Gamma_\mu [A^\mu, \Psi])}, \tag{178}$$
$$= \lambda^{2^{[\frac{D}{2}]-4}(N^2-1)}$$
$$\times \int \mathcal{D}A\mathcal{D}(\lambda^{\frac{1}{2}}\Psi) e^{\frac{1}{g^2 N} \sum_{\sigma} (\frac{1}{4}[A^\mu(\sigma), A^\nu(\sigma)]_\diamond^2 + \lambda^{\frac{1}{2}} \overline{\Psi} \Gamma_\mu [A^\mu, \lambda^{\frac{1}{2}}\Psi])}, \tag{179}$$
$$= \lambda^{2^{([\frac{D}{2}]-4)(N^2-1)}} Z[\lambda = 1]. \tag{180}$$

となり、この両辺を λ で微分し、 $\lambda \to 0$ の極限を取と、

$$\left\langle -\frac{1}{2g^2 N} \sum_{\sigma \in \mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}} \overline{\Psi}(\sigma) \Gamma_\mu [A^\mu(\sigma), \Psi(\sigma)]_\diamond \right\rangle = \left(2^{[\frac{D}{2}]-4}\right)(N^2 - 1), \tag{181}$$

となる。$\sum_\sigma \sim O(N^2)$ と (175) から、

$$\Psi(\sigma) \sim ((g^2 N)^{\frac{3}{8}}), \tag{182}$$

となる。Double scaling limit として

$$g^2 N \sim O(N^0), \tag{183}$$

を取る事にすると、(175, 182) から、あらゆる相関関数は

$$\left\langle \frac{1}{N} Tr F(A^\mu, \Psi) \right\rangle \lesssim O(N^0), \tag{184}$$

と振舞うと予言できる。すると、 Wilson loop

$$\left\langle \left[\frac{1}{N} Tr \left(\prod_n e^{i(k_n \cdot A_n + \overline{\lambda}_n \psi_n)} \right) \cdots \right] \cdots \right\rangle, \tag{185}$$

は非自明な値を持ちうる。この事は IIB matrix model が Type IIB 型の超弦理論の構成的定義になるために必要な条件である [4]。

今までと同様の議論を bosonic model,

$$S_b = -\frac{1}{4g^2} Tr([A^\mu, A^\nu]^2), \tag{186}$$

に対してもやる事ができ、相関関数の N 依存性は supersymmetric model (4, 169) のものと同じになる。従って、例えば boson の分散も (177) と計算できる。文献 [20, 21] では Monte Carlo simulation を使って、bosonic model の幾つかの相関関数を計算しているが、これらの結果は、我々の結果と一致している。

5 Large N Limit of IIB Matrix Model

元々の IIB matrix model の作用 (4, 169) から直接 large N limit を取った作用を書き下すのは困難である。一方で、NCPL 上の場の理論 (170) は Schild action [18] に非常によく似ているため、Schild action が IIB matrix model の極限になっていると考えられそうである。実際に、以下のような議論はこの様な期待を支持している。

まず始めに、NCPL 上の 2 つの座標の交換関係 (138) は large N 極限で 0 になる。すなわち、NCPL 上の場の理論 (170) は普通の可換な場の理論になる。次に、diamond 積を使った場の交換関係は

$$[A(\sigma), B(\sigma)]_\diamond = 2iA(\sigma)\sin\left(\frac{1}{2\pi N}\epsilon^{ab}\overleftarrow{\partial}_a\overrightarrow{\partial}_b\right)B(\sigma) \tag{187}$$

$$= \frac{i}{\pi N}\partial_a A(\sigma)\partial_b B(\sigma) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{188}$$

で与えられる。有限の N に対しては右辺に出て来る微分は NCPL 上の差分だとみなせばよさげである。Large N 極限で $O(\frac{1}{N^2})$ の項を無視すれば、IIB matrix model は、

$$S_{IIB} = \frac{1}{g^2N^3}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_N^2}\Big[\frac{1}{4}(\epsilon^{ab}\partial_a a^\mu(\sigma)\partial_b a^\nu(\sigma))^2 - \frac{i}{2}\overline{\psi}(\sigma)\epsilon^{ab}\partial_a\phi\!\!\!/(\sigma)\partial_b\psi(\sigma)\Big], \tag{189}$$

$$= \frac{1}{g^2N}\int_{T^2}d^2\sigma\Big[\frac{1}{4}(\epsilon^{ab}\partial_a a^\mu(\sigma)\partial_b a^\nu(\sigma))^2 - \frac{i}{2}\overline{\psi}(\sigma)\epsilon^{ab}\partial_a\phi\!\!\!/(\sigma)\partial_b\psi(\sigma)\Big], \tag{190}$$

となる。但し、

$$a^\mu(\sigma) = \pi^{-\frac{1}{2}}A^\mu(\sigma) = \pi^{-\frac{1}{2}}Tr(\Delta(\sigma)A^\mu), \tag{191}$$

$$\psi(\sigma) = \pi^{-\frac{1}{4}}\Psi(\sigma) = \pi^{-\frac{1}{4}}Tr(\Delta(\sigma)\Psi), \tag{192}$$

である。この事は、N が有限の時の IIB matrix model は Schild action を格子で正則化したものである事を意味している。Matrix のサイズ N は 2 次元格子の各方向の site 数になっている。この議論は、Schild action の行列正則化 [18] の逆を NCPL を使ってやったものでありる。

しかしながら、我々の得た結論は、Schild action (190) は IIB matrix model の large N 極限ではありえないと言う事である。実際に我々が前節でやった相関関数の N 依存性の議論は作用にかかる N の巾に大きく依存している。また、前節の議論は交換子により N の次数が影響されない事を仮定していた。この仮定は相関関数の計算に対しては、運動量が $m_a \sim O(N^1)$ となるモードが重要な役割を果たしている事を意味している。すなわち、NCPL 上の場の理論 (170) の交換子を N の leading で近似する事はできないのである。実際に、$m_a \sim O(N^1)$ なる運動量の領域が重要であると思って前節と同様の議論を (189) についてやると、

$$S = \frac{1}{g^2N^3}\sum_{\sigma\in\mathbb{T}^2_{\frac{2}{N}}}\left[\frac{1}{4}\left(\epsilon^{ab}\partial_a a^\mu(\sigma)\partial_b a^\nu(\sigma)\right) - \frac{i}{2}\overline{\psi}(\sigma)\epsilon^{ab}\partial_a\phi\!\!\!/(\sigma)\partial_b\psi(\sigma)\right], \tag{193}$$

$$\sim \frac{1}{g^2N^3}N^2\left[N^4a^4 + N^2\psi^2 a\right] \sim O(N^2), \tag{194}$$

(195)

となる。これらから、

$$a^\mu(\sigma) \sim O((g^2N^{-1})^{\frac{1}{4}}), \tag{196}$$

$$\psi(\sigma) \sim O((g^2N)^{\frac{3}{8}}), \tag{197}$$

となり、例えば、

$$\left\langle\frac{1}{N}Tr(A^2)\right\rangle = \left\langle\frac{1}{N^2}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_N^2}A^2(\sigma)\right\rangle \sim O(gN^{-\frac{1}{2}}), \tag{198}$$

となり、Monte Calro simulation の結果 [20] とも違ったものになってしまう。

6 Conclusion

我々は IIB matrix model (4, 169) と NCPL 上の場の理論 (170) との等価性に注目してきた。実際に、ある行列 A は NCPL 上の場 $A(\sigma)$ を使って、$A = \frac{1}{N}\sum_{\sigma} A(\sigma)\Delta(\sigma)$ と座標表示で書くことができる。一方で基底 $T_{\mathbf{m}}$ を使って行列 A を分解した表示 $A = \sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}} T_{\mathbf{m}}$ は運動量表示だとみなす事ができる。我々は、座標表示の作用から相関関数の large N 依存性が簡単に評価できる事を発見した。我々が示した事は $g^2N \sim O(N^0)$ にとれば $\langle \frac{1}{N} TrF(A,\Psi)\rangle$ なる相関関数は有限な非自明な値になりうると言う事である。我々の議論には supersymmetry は何の役割も果たしていないので、我々の解析は、 bosonic model (186) に対しても応用が利く。Supersymmetric なものと bosonic なものでは相関関数の N 依存性は異なると考えるのは自然である。実際に、 Wilson loop の相関関数の connected part については、

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{con} \sim O(N^{-2(n-1)}), \qquad \text{Bosonic case} \tag{199}$$

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{con} \sim O(N^{-n}), \qquad \text{Supersymmetric case} \tag{200}$$

$$\mathcal{O} \text{ is Wilson loop}$$

と言う事が知られている [23]。しかしながら、これらの事実はあくまで connected part についてのものであり、一方、我々が考えている相関関数は non-connected part も含めたものであるので、文献 [23] で得られた事実とは何も矛盾しない。彼らの論文では、Wilson loop の相関関数の factrization が議論されている。彼らの主張は、$g^2N \sim O(N^0)$ のときに

$$\langle \mathcal{O} \rangle \sim O(N^0), \tag{201}$$

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = \langle \mathcal{O}_1 \rangle \cdots \langle \mathcal{O}_n \rangle + O(N^{-2}), \tag{202}$$

ということである。この結果はむしろ我々の主張を支持している。更に、bosonic matrices の分散、 $\frac{1}{N}TrA^2$ の N 依存性も、supersymmetric な場合と、 bosonic な場合とで一致していて [4, 20]、我々の結果も一致している。また、bosonic model では、$\frac{1}{N}TrA^2$, TrA^4, Wilson loop の期待値が Monte Calro simulation で計算されていて [20, 21]、 これらの結果は我々の出した結果と一致している。

我々は、有限の N の IIB matrix model (4, 169) は何かある場の理論でかかれた作用を正則化したものであると考えている。Schild action [18] はそのような場の理論のよく知られた候補である。実際に、NCPL 上の場の理論の作用 (170) を安直に large N limit を取ると、 Schild action (190) になる。また、我々は作用の N 依存性が相関関数の N 依存性にとって重要であることを見てきた。ところが、Schild action を

格子正則化した作用 (189) は元の IIB matrix model の作用 (4, 169) とは異なった N 依存性を示している。この違いは、相関関数の計算にとって運動量の大きな領域 $m_a \sim O(N)$ が重要でないときにしか正当化されない近似を使って交換関係 (188) の $O(N^{-2})$ の項を無視した事に起因する。ゆえに、運動量の大きなモード $m_a \sim O(N^1)$ まで、あるいはだけが相関関数の計算に効いてくることが、我々の計算と、 Monte Calro simulation の結果 [20, 21] から結論される。

では、どの様な作用が IIB matrix model の large N limit の作用のになるのであろうか？$\partial_a \sim O(N^1)$ であると考えられるので、次のような作用を考える事ができる：

$$S = \frac{1}{g^2N^3}\int_{T^2} d^2\sigma \Big[\frac{1}{4}(\epsilon^{ab}\partial_a A^{\mu}(\sigma)\partial_b A^{\nu}(\sigma))^2 - \frac{i}{2}\overline{\Psi}(\sigma)\epsilon^{ab}\partial_a \not{A}(\sigma)\partial_b\Psi(\sigma)\Big]. \tag{203}$$

この作用は NCPL 上の場の理論の作用 (170) の交換子の $O(N^{-2})$ の項を無視した作用 (189) の large N 極限として得られた Schild action (190) と係数が N^{-2} だけ違ったものである。この作用は NCPL 上の場の理論の作用を安直に large N 極限をとって得た作用 (190) をスケール変換して得る事ができるが、 IIB matrix model の作用 (4, 169) から直接導くことはできない。しかしながら、この作用 (203) は IIB matrix model の large N 極限を記述する作用として最も有力なものであると考えられる。なぜなら、 IIB matrix model にある対称性に対応する対称性が各々(203) にもあるからである。 (表 1) 非可換な場の理論は通常の粒子のモードの他にひも状のモードが存在知ることが知られている [28]。このことは、large N 極限の NCPL 上の場の理論が、座標が非可換になるような Planck scale の物理を記述していることを示唆している。ゆえに IIB matrix model が Planck scale の物理を記述しているという予想を支持している。

何はともあれ、IIB matrix model の N 依存性を与えるような場の理論は存在しそうであり、我々はその中の 1 つが IIB matrix model の large N limit を与えると考えている。もしそのような作用を見つけることができたならば、真の真空などの IIB matrix model の更なる性質を調べるための道具として大変役に立つ事は間違いない。この様な作用を探す事は IIB matrix model の研究にとって最も大切な課題である。

IIB matrix model (S^M_{IIB})	Schild action (S_1)
$SU(N)$	area preserving diffeomorphism
$\delta_\Lambda A^\mu = i[\Lambda, A^\mu]$	$\delta_{\lambda(\sigma)} A^\mu(\sigma) = \epsilon^{ab}\,\partial_a\lambda(\sigma)\,\partial_b A^\mu(\sigma)$
$\delta_\Lambda \Psi = i[\Lambda, \Psi]$	$\delta_{\lambda(\sigma)} \Psi(\sigma) = \epsilon^{ab}\,\partial_a\lambda(\sigma)\,\partial_b \Psi(\sigma)$
supersymmetry	supersymmetry
$\delta_\varepsilon A^\mu = i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi$	$\delta_\varepsilon A^\mu(\sigma) = i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi(\sigma)$
$\delta_\varepsilon \Psi = \frac{i}{2}[A^\mu, A^\nu]\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon$	$\delta_\varepsilon \Psi(\sigma) = \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a A^\mu(\sigma)\,\partial_b A^\nu(\sigma)\,\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon$
rotational invariance	rotational invariance
$\delta_\omega A^\mu = \omega^\mu{}_\nu A^\nu$	$\delta_\omega A^\mu(\sigma) = \omega^\mu{}_\nu A^\nu(\sigma)$
$\delta_\omega \Psi = 0$	$\delta_\omega \Psi(\sigma) = 0$
$(\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu})$	$(\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu})$
shift of the bosonic matrices	shift of the bosonic fields
$\delta_\alpha A^\mu = \alpha^\mu \mathbf{1}$	$\delta_\alpha A^\mu(\sigma) = \alpha^\mu$
$\delta_\alpha \Psi = 0$	$\delta_\alpha \Psi(\sigma) = 0$
shift of the fermionic matrices	shift of the fermionic fields
$\delta_\chi A^\mu = 0$	$\delta_\chi A^\mu(\sigma) = 0$
$\delta_\chi \Psi = \chi\mathbf{1}$	$\delta_\chi \Psi(\sigma) = \chi$

Table 1: Correspondence of symmetries between IIB matrix model and S_1

A Proof for supersymmetry of IIB matrix model

IIB matrix model (169)

$$S_{IIB} = -\frac{1}{g^2} Tr\left\{\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi]\right\}, \tag{204}$$

の fermionic な対称性 (5, 6)

1. 10 次元の $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry の名残:

$$\begin{aligned} \delta^1_\varepsilon A^\mu &= i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi, \\ \delta^1_\varepsilon \Psi &= \tfrac{i}{2}[A^\mu, A^\nu]\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon, \end{aligned} \tag{205}$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu].$$

2. Fermion のずらし:

$$\begin{aligned} \delta^2_\xi A^\mu &= 0, \\ \delta^2_\xi \Psi &= \xi\mathbf{1}, \end{aligned} \tag{206}$$

の証明をこの節でしておく。2 の fermion のずらしの対称性、(6, 206) は $\mathbf{1}$ との交換関係が常に 0 である事と、交換関係の trace が常に 0 であることから自明である。そこで、1. の 10 次元の $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry の名残が実際にあることを証明する。まず、 bosonic part は

$$\delta^1_\varepsilon Tr\left(\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2\right) = Tr([i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi, A^\nu][A^\mu, A^\nu]), \tag{207}$$

$$= iTr(\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi[A^\nu, [A_\mu, A_\nu]]), \tag{208}$$

となる。次に、$\overline{\Gamma}_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}$ である事に注意すると、

$$\delta^1_\varepsilon\overline{\Psi} = \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu\nu}[A^\mu, A^\nu], \tag{209}$$

となる。

$$\delta^1_\varepsilon\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi] = (\delta^1_\varepsilon\overline{\Psi})\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_\mu[\delta^1_\varepsilon A^\mu, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \delta^1_\varepsilon\Psi], \tag{210}$$

$$= \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\nu\rho}[A^\nu, A^\rho]\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_\mu[i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi, \Psi] + \overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \frac{i}{2}[A^\nu, A^\rho]\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon], \tag{211}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2}(-\bar{\varepsilon}\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\mu[\Psi, A^\mu][A^\nu, A^\rho] \\ &\qquad + \overline{\Psi}\Gamma_\mu\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon[A^\mu, [A^\nu, A^\rho]]) \\ &\qquad + i\overline{\Psi}\Gamma_\mu\big((\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Psi - \Psi(\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\big), \end{aligned} \tag{212}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2}(-\bar{\varepsilon}\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\nu\Psi + \overline{\Psi}\Gamma_\mu\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon)[A^\mu, [A^\nu, A^\rho] \\ &\qquad - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\mu[\Psi[A^\nu, A^\rho], A^\mu] \\ &\qquad + i\overline{\Psi}\Gamma_\mu\big((\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Psi - \Psi(\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\big), \end{aligned} \tag{213}$$

であることと、Ψ, ε が Majorana-Weyl fermion である事、すなわち、

$$\Psi = C\,{}^t\overline{\Psi},\ {}^t\Psi = \overline{\Psi}\,{}^tC = -\overline{\Psi}C,\ \Gamma^\mu = -C\,{}^t\Gamma^\mu C^{-1}, \tag{214}$$

であることから、 action の fermion part を super 変換したものは,

$$\delta^1_\varepsilon Tr(\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu,\Psi]) = \frac{i}{4}Tr\Big((-\overline{\varepsilon}\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\mu\Psi + \overline{\Psi}\Gamma_\mu\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon)[A^\mu,[A^\nu,A^\rho]]\Big) + \frac{i}{2}Tr\Big(\overline{\Psi}\Gamma_\mu\big((\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Psi - \Psi(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\big)\Big), \tag{215}$$

$$= -\frac{i}{4}Tr\Big(\overline{\varepsilon}(\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\mu - \Gamma_\mu\Gamma_{\nu\rho})\Psi[A^\mu,[A^\nu,A^\rho]]\Big) + \frac{i}{2}Tr\Big(\overline{\Psi}\Gamma_\mu(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Psi - \overline{\Psi}\Gamma_\mu\Psi(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Big), \tag{216}$$

となる。(216) の第 1 項は、

$$\Gamma_{\nu\rho}\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu - \Gamma_\rho\Gamma_\nu\Gamma_\mu), \tag{217}$$

$$= \frac{1}{2}(2\delta_{\rho\mu}\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\rho - 2\delta_{\mu\nu}\Gamma_\rho + \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu), \tag{218}$$

$$= \frac{1}{2}(2\delta_{\mu\rho}\Gamma_\nu - \Gamma_\mu\Gamma_\rho\Gamma_\nu - 2\delta_{\mu\nu}\Gamma_\rho + \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + 2\delta_{\mu\rho}\Gamma_\nu - 2\delta_{\mu\nu}\Gamma_\rho), \tag{219}$$

$$= \Gamma_\mu\Gamma_{\nu\rho} + 2\delta_{\mu\rho}\Gamma_\nu - 2\delta_{\mu\nu}\Gamma_\rho, \tag{220}$$

より

$$-iTr(\overline{\varepsilon}\Gamma_\mu[A_\nu,[A^\mu,A^\nu]]), \tag{221}$$

となる。第 2 項の始めの項は、 Ψ が Majorana fermion である事から、

$$Tr\Big(\overline{\Psi}\Gamma_\mu(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\Psi\Big) = \sum_{abc}(\overline{\Psi}_{ab}\Gamma_\mu\Psi_{ca})(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi_{bc}), \tag{222}$$

$$= \sum_{abc}((-{}^t\Psi_{ab}C^{-1})(-C\,{}^t\Gamma_\mu C^{-1})C\,{}^t\overline{\Psi}_{ca}) \times (\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi_{bc}), \tag{223}$$

$$= -\sum_{abc}\big(\overline{\Psi}_{ca}\Gamma_\mu\Psi_{ab}\big)(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi_{bc}), \tag{224}$$

$$= -Tr\big((\overline{\Psi}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Psi)\big), \tag{225}$$

となる。以上をまとめると、 boson の変化分 (208) と fermion の変化分 (216, 221) を合わせると、

$$\delta^1_\varepsilon\left(\frac{1}{4}[A^\mu,A^\nu]^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu,\Psi]\right) = -iTr\big((\overline{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\big), \tag{226}$$

となる。更に (226) の右辺を変形して 0 にする事を考える。そのために、 (226) の右辺を Fierz 変換する:

$$Tr\big((\overline{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\big) = \sum_{abc}\big((\overline{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi_{ab})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^\mu\Psi_{ca})\big), \tag{227}$$

$$= \sum_{p=0}^{10}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\frac{1}{2^5p!}\sum_{\mu_1\cdots\mu_p}(\overline{\varepsilon}\Gamma^\mu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma_\mu\Psi_{ca}) \times (\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Psi_{ab}), \tag{228}$$

$$= \sum_{p=0}^{10}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\frac{5-p}{2^4p!}\sum_{\mu_1\cdots\mu_p}(\overline{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\Psi_{ca}) \times (\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Psi_{ab}), \tag{229}$$

となる。この式変形の途中で、

$$\Gamma^\mu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma_\mu = (10-2p)\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}, \tag{230}$$

を使った。また、 Ψ が Weyl fermion ($\frac{1}{2}(1+\Gamma^{11})\Psi = \Psi$) であるので、

$$(1-\Gamma^{11})\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}(1+\Gamma^{11}) = \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}(1-(-1)^p\Gamma^{11})(1+\Gamma^{11}), \tag{231}$$

すなわち (229) 式の内 p が奇数になるものしか残らない。更に、

$$\Gamma^{11} = i\Gamma^1\cdots\Gamma^{10}, \tag{232}$$

$$\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} = i(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\frac{1}{(10-p)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{10-p}}\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_{10-p}}\Gamma^{11}, \tag{233}$$

であるので、

$$(\overline{\varepsilon}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_7}\Psi_{ca})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_7}\Psi_{ab}) = -\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_7}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3}\overline{\varepsilon}\Gamma^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma^{11}\Psi_{ca} \times \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_7}{}^{\rho_1\rho_2\rho_3}\overline{\Psi}_{bc}\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3}\Gamma^{11}\Psi_{ab}, \tag{234}$$

$$= -\frac{7!}{3!}(\overline{\varepsilon}\Gamma_{\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{ca})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{ab}), \tag{235}$$

$$(\overline{\varepsilon}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_9}\Psi_{ca})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_9}\Psi_{ab}) = -\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_9}{}_\nu\overline{\varepsilon}\Gamma^\nu\Gamma^{11}\Psi_{ca} \times \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_9}{}^\rho\overline{\Psi}_{bc}\Gamma_\rho\Gamma^{11}\Psi_{ab}, \tag{236}$$

$$= -9!(\overline{\varepsilon}\Gamma_\nu\Psi_{ca})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^\nu\Psi_{ab}), \tag{237}$$

となる。これらを (229) へ代入すると、

$$Tr\Big((\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\Big) = \frac{1}{2}Tr\Big((\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\Big) - \frac{1}{24}Tr\Big((\bar{\epsilon}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi)\Big), \quad (238)$$

なので、

$$Tr\Big((\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\Big) = -\frac{1}{12}Tr\Big((\bar{\epsilon}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi)\Big), \quad (239)$$

である。ところで、10 次元の Majorana fermion ψ_a に対して、一般に、

$$\overline{\psi}_a\Gamma^\mu\psi_b = -\overline{\psi}_b\Gamma^\mu\psi_a, \quad (240)$$

$$\overline{\psi}_a\Gamma^{\mu\nu\rho}\psi_b = \overline{\psi}_b\Gamma^{\mu\nu\rho}\psi_a, \quad (241)$$

が成り立つので、

$$Tr\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\big) = \sum_{abc}\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi_{ab})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^\mu\Psi_{ca})\big), \quad (242)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{abc}\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi_{ab})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^\mu\Psi_{ca} - \overline{\Psi}_{ca}\Gamma^\mu\Psi_{bc})\big), \quad (243)$$

となり、行列の足 $\{b,c\}$, $\{c,a\}$ が反対称になるような a,b,c の和だけが残る。一方で、

$$Tr\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\big) = -\frac{1}{12}Tr\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu\nu\rho}\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^{\mu\nu\rho}\big), \quad (244)$$

$$= \sum_{abc}\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu\nu\rho}\Psi_{ab})(\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^{\mu\nu\rho}\Psi_{ca})\big), \quad (245)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{abc}\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu\nu\rho}\Psi_{ab}) \times (\overline{\Psi}_{bc}\Gamma^{\mu\nu\rho}\Psi_{ca} + \overline{\Psi}_{ca}\Gamma^{\mu\nu\rho}\Psi_{bc})\big), \quad (246)$$

となり、今度は行列の足 $\{b,c\}$, $\{c,a\}$ が対称になるような a,b,c についての和しか残らない。以上 2 つの行列の足の和で共通に生き残るような a,b,c の足し方は存在しないので

$$\delta^1_\varepsilon\left(\frac{1}{4}[A^\mu, A^\nu]^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\Gamma_\mu[A^\mu, \Psi]\right) = Tr\big((\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi)(\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi)\big) = 0, \quad (247)$$

すなわち、supersymmetry の名残 (5, 205) は確かに IIB matrix model の symmetry である事が示せた。

次に、supersymmetry の名残 (5, 205) と、fermion の shift に対する対称性 (6, 206) を組み合わせる事により $\mathcal{N} = 2$ の supersymmetry 代数を構成する事が出来る事を示す。まず、

$$\tilde{\delta}^1_\varepsilon = \delta^1_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon, \quad (248)$$

$$\tilde{\delta}^2_\varepsilon = \delta^1_\varepsilon - \delta^2_\varepsilon, \quad (249)$$

なので、

$$\delta^1_\varepsilon\delta^1_\xi A^\mu = i\bar{\xi}\Gamma^\mu\delta^1_\varepsilon A^\mu, \qquad \delta^1_\varepsilon\delta^1_\xi\Psi = \frac{i}{2}\delta^1_\varepsilon[A^\mu, A^\nu]\Gamma_{\mu\nu}\xi, \quad (250)$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{\xi}\Gamma^\mu\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon[A^\nu, A^\rho], \qquad = -(\bar{\varepsilon}\Gamma^\nu[\Psi, A^\rho])\Gamma_{\nu\rho}\xi, \quad (251)$$

$$\delta^1_\varepsilon\delta^2_\xi A^\mu = 0, \qquad \delta^1_\varepsilon\delta^2_\xi\Psi = 0, \quad (252)$$

$$\delta^2_\varepsilon\delta^1_\xi A^\mu = i\bar{\xi}\Gamma^\mu\delta^2_\varepsilon\Psi, \qquad \delta^2_\varepsilon\delta^1_\xi\Psi = i\frac{1}{2}\delta^2_\varepsilon[A^\mu, A^\nu]\Gamma_{\mu\nu}\xi, \quad (253)$$

$$= i\bar{\xi}\Gamma^\mu\varepsilon, \qquad = 0, \quad (254)$$

$$\delta^2_\varepsilon\delta^2_\xi A^\mu = 0, \qquad \delta^2_\varepsilon\delta^2_\xi\Psi = 0, \quad (255)$$

となる。ところで、

$$-(\bar{\varepsilon}\Gamma^\nu[\Psi, A^\rho])\Gamma_{\nu\rho}\xi = \frac{1}{2^5}\sum_{p=0}^{10}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\frac{1}{p!}(\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\xi) \times \Gamma_{\nu\rho}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma^\nu[\Psi, A^\rho], \quad (256)$$

である。

$$\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\xi = -\bar{\varepsilon}\Gamma^{11}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma^{11}\xi, \quad (257)$$

$$= (-1)^{p+1}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\xi, \quad (258)$$

から、(256) は p が奇数の時しか生き残らない。また、

$$\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\xi = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\bar{\xi}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\varepsilon, \quad (259)$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
[\delta^1_\varepsilon, \delta^1_\xi]A^\mu &= -\frac{1}{2}\left(\bar{\xi}\Gamma^\mu\Gamma_{\nu\rho}\varepsilon - \bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\Gamma_{\nu\rho}\xi\right)[A^\nu, A^\rho], && (260)\\
&= -\frac{1}{2}\bar{\xi}\left(\Gamma_{\nu\rho}\Gamma^\mu - \Gamma_{\mu\rho}\Gamma^\mu\right)\varepsilon[A^\nu, A^\rho], && (261)\\
&= 2\bar{\xi}\Gamma_\nu\varepsilon[A^\nu, A^\mu], && (262)\\
&= 2i[-i\bar{\xi}\not{A}\varepsilon, A^\mu],\ (\text{Gauge 変換}) && (263)\\
[\delta^1_\varepsilon, \delta^1_\xi]\Psi &= \frac{1}{2^5}\sum_{p=0}^{4}(-1)^p\frac{1-(-1)^p}{(2p+1)!}\bar{\epsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_{2p+1}}\xi \\
&\qquad \times\Gamma_{\nu\rho}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2p+1}}\Gamma^\nu[\Psi, A^\rho], && (264)\\
&= \frac{1}{2^4}\Big[\frac{1}{3!}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\xi\,\Gamma_{\nu\rho}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^\nu[A^\rho, \Psi] \\
&\qquad + \frac{1}{7!}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_7}\xi\Gamma_{\nu\rho}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_7}\Gamma^\nu[A^\rho, \Psi]\Big], && (265)\\
&= \frac{1}{2^4}\Big[\frac{1}{3!}\bar{\varepsilon}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\xi\,\Gamma_{\nu\rho}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^\nu[A^\rho, \Psi] \\
&\qquad + \frac{1}{7!}\frac{-i}{3!}\bar{\varepsilon}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_7}{}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma^{11}\xi \\
&\qquad \times\Gamma_{\nu\rho}\frac{-i}{3!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_7}{}_{\rho_1\rho_2\rho_3}\Gamma^{\rho_1\rho_2\rho_3}\Gamma^{11}[A^\rho\Psi]\Big], && (266)\\
&= 0, && (267)\\
[\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\xi]A^\mu &= -i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\xi, && (268)\\
\text{その他} &= 0, && (269)
\end{aligned}
$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta}^1_\varepsilon &= i(\delta^1_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon), && (270)\\
\tilde{\delta}^2_\varepsilon &= \delta^1_\varepsilon - \delta^2_\varepsilon, && (271)
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\delta}^1_\varepsilon, \tilde{\delta}^1_\xi]A^\mu &= -[\delta^1_\varepsilon, \delta^1_\xi]A^\mu - [\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\xi]A^\mu + [\delta^1_\xi, \delta^2_\varepsilon]A^\mu, && (272)\\
&= i(\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\xi + \bar{\xi}\Gamma^\mu\varepsilon) + 2i[-i\bar{\varepsilon}\not{A}\xi, A^\mu],\ (\text{gauge 変換}), && (273)\\
&= 2i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\xi - 2i[-i\bar{\varepsilon}\not{A}\xi, A^\mu], && (274)\\
[\tilde{\delta}^2_\varepsilon, \tilde{\delta}^2_\xi]A^\mu &= [\delta^1_\varepsilon, \delta^1_\xi]A^\mu - [\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\xi]A^\mu + [\delta^1_\xi, \delta^2_\varepsilon]A^\mu, && (275)\\
&= 2i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\xi + 2i[-i\bar{\varepsilon}\not{A}\xi, A^\mu], && (276)\\
[\tilde{\delta}^1_\varepsilon, \tilde{\delta}^2_\xi]A^\mu &= i([\delta^1_\varepsilon, \delta^1_\xi]A^\mu - [\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\xi]A^\mu - [\delta^1_\xi, \delta^2_\varepsilon]A^\mu), && (277)\\
&= -i[-2i\bar{\varepsilon}\not{A}\xi, A^\mu], && (278)
\end{aligned}
$$

となり、A^μ を座標だと思うとこの δ^a_ε は $\mathcal{N}=2$ の super 変換そのものである。

References

[1] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker, L. Susskind, Phys. Rev. **D55** 5112, (1997), hep-th/9610043.

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. **B498** (1997), 467, hep-th/9612115.

[3] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. **B510**, (1998), 158, hep-th/9705128.

[4] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and Tsukasa Tada, Prog. Theor. Phys. 99, (1998), 713, hep-th/9705128.

[5] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Lett. **48** (1982) 1063.
G. Bhanot, U. M. Heller and H. Neuberger, Phys. Lett. **113B** (1982) 47.

[6] N. kitsunezaki and J. Nishimura, Nucl. Phys. **B526** (1998) 351, hep-th/9707162,
T. Tada and A. Tsuchiya, hep-th/9903037.

[7] A. Connes, M. Douglas and A. Schwarz, JHEP 9802, 003, 1998, hep-th/9711162.

[8] M. Li, T. Yoneya, Phys. Rev. Lett. **78**, 1219, 1997, hep-th/9611072.

[9] B. de Wit, J. Hoppe and H.Nicolai, Nucl. Phys. **B305 [FS23]** (1988), 545.

[10] J.Poppe Phys. Lett. **B226** (1989) 257.

[11] C. Zachos, ANL-HEP-CP-89-55
D. B. Fairlie, P. Fletcher and C. K. Zachos, Phys. Lett. **B218** (1989) 203
D. B. Fairlie and C. K. Zachos, Phys. Lett. B224 (1989) 101.
D. B. Fairlie, P. Fletcher and C. K. Zachos, J. Math. Phys. **31** (1990) 1088.

[12] J. Moyal, Proc. Camb. hil. Soc. 45 (1949) 99.

[13] H. Heyl, *The Theory og Groups and Quantum Mechanics* (Dover, N.Y. 1931).

[14] C. Castro, Mod. Phys. **A7**, (1992) 535.

[15] I. Bars and D. Minic, hep-th/9910091.

[16] T. Masuda and S. Saito, Mod. Phys. Lett. **A14**, 2215, 1999, hep-th/9911212.

[17] G. Landi, F. Lizzi and R. J. Szabo, hep-th/9912130.

[18] A. Shild, Phys. Rev. **D16**, 1722 (1977).

[19] T. Suyama and A. Tsuchiya, Prog. Theor. Phys. **99** (1998), 321, hep-th/9711073.

[20] T. Hotta, J. Nishimura and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. **B545** (1999), 543, hep-th/9811220.

[21] S. Horata, H. S. Egawa and T. Yukawa, hep-th/0005157.

[22] T. Eguchi, Phys. Rev. Lett. 44 126, (1980).

[23] J. Ambjørn, K. N. Anagnostopoulous, W. Bietenholz, T. Hotta and J. Nishimura, JHEP **0007** (2000) 013, hep-th/0003208.

[24] N. Kitsunezaki and S. Uehara, to be published in Prog. Theor. Phys. **105**, (2001).

[25] N. Kitsunezaki and S. Uehara, *in preparation.*

[26] S. Iso and H. Kawai, Int. J. Mod. Phys. A15 (2000) 651.

[27] J. Ambjørn, K.N. Anagnostopoulos, W. Bietenholz, T. Hotta and J. Nishimura, JHEP **0007** (2000) 011, hep-th/0005147,
J. Nishimura and G. Vernizzi, JHEP **0004** (2000) 015, hep-th/0003223,
Jun Nishimura and Graziano Vernizzi, hep-th/0007022.

[28] S. Minwalla, M. V. Raamsdonk and N. Seiberg, hep-th/9912072.