DILOGARITHM IDENTITIES AND CLUSTER ALGEBRAS

中西 知樹 · 名古屋大学
(Tomoki Nakanishi, Nagoya University)

1. はじめに

シンポジウムでは "Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras" というタイトルで講演をおこない, 90 年代に Bazhanov, Kirillov, Reshetikhin により予想された共形場理論における dilogarithm 恒等式の団代数 (cluster algebra) による証明を与えた論文 [Nak09] の概要について述べた．この報告集では本来はその報告をするのが筋ではあるが, すでに同じ内容の講演についての日本語による報告を他で ([Nak10b]) 与えている．そこで, ここではその後に論文 [Nak10a] で得られた団代数の周期性と dilogarithm 恒等式とのより一般的な関連についての概要を述べることにする．

なお, この報告の内容について 2010 年 11 月に東北大学理学部数学教室で集中講義を行った際に, 長谷川浩司氏, 黒木玄氏, 花村昌樹氏には大変有益なコメントや質問をいただき本稿の作成に際しても参考にさせていただいた．三氏に厚く感謝をする．

2. 団代数

この章では Fomin-Zelevinsky [FZ02, FZ03, FZ07] により導入された係数付き団代数の定義を与える．

2.1. **行列と quiver の変異.** 以下では, 自然数 n を固定し $I = \{1, \dots, n\}$ を添字集合とする．$B = (b_{ij})_{i,j\in I}$ を反対称 (整数) 行列とする．このとき, 行列 B の $k \in I$ における変異 (mutation) $\mu_k(B) = B' = (b'_{ij})_{i,j\in I}$ を次で定める．

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし, 整数 x に対して, $x \geq 0$ のとき $[x]_+ = x$, $x < 0$ のとき $[x]_+ = 0$ とする．このとき, B' はふたたび反対称であり, また μ_k は対合的, すなわち $\mu_k^2 = \mathrm{id}$ がなりたつ．

反対称行列 B に対して, 頂点集合を I として, $b_{ij} > 0$ のとき, 頂点 i から頂点 j へ b_{ij} 本の矢を持つ quiver Q を対応させる．この quiver Q はループと 2 サイクルを持たず, また, これにより反対称行列とループと 2 サイクルを持たない quiver の間の 1 対 1 対応が与えられる．以下ではこの対応により反対称行列 B と quiver Q を同一視する．

第 55 回代数学シンポジウム (2010 年 8 月　北大) 報告集原稿

2.2. **係数なし団代数.** いま, 反対称行列 $B=(b_{ij})_{i,j\in I}$ と形式的変数の組 $x=(x_i)_{i\in I}$ のペア (B,x) を考える、これを初期種子 (initial seed) と呼ぶ. 初期種子 (B,x) の $k\in I$ における変異 $\mu_k(B,x)=(B',x')$ を次で定める. まず, $B'=\mu_k(B)$ は (2.1) で定めたとおりとする. つぎに, $x'=(x'_i)_{i\in I}$ ($x'_i\in\mathbb{Q}(x)$) を以下のとおり定める.

$$x'_i=\begin{cases} x_i & i\neq k \\ \dfrac{1}{x_i}\left(\displaystyle\prod_{j\in I}x_j^{[b_{jk}]_+}+\prod_{j\in I}x_j^{[-b_{jk}]_+}\right) & i=k. \end{cases} \tag{2.2}$$

これを x の交換関係式 (exchange relation) という. B の場合と同様に, $\mu_k^2=\mathrm{id}$ がなりたつ.

さて, このように得られた新たな「種子」(B',x') に対しても同様の規則で変異を次々と繰り返し, 得られたすべての種子 (B',x') を集めよう. 各種子 (B',x') に対して, B' を交換行列 (exchange matrix), x' を団 (cluster), x'_i ($i\in I$) を団変数 (cluster variable) という.

Definition 2.1 ([FZ02, FZ03])**.** 初期種 (B,x) に対して変異を繰り返し得られるすべての団変数たちで生成される $\mathbb{Q}(x)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数を係数なし団代数といい, $\mathcal{A}(B,x)$ と表す.

Remark 2.2. Fomin-Zelevinsky はより一般に反対称化可能行列 (skew symmetrizable matrix) B に対して, 同様に団代数 $\mathcal{A}(B,x)$ を定義しているが, 簡単のため本報告では B が反対称行列の場合に限って論じる.

以下の二つが団代数に関する最も基本的な定理である.

Theorem 2.3 (Laurent 現象 ([FZ02]))**.** $\mathcal{A}(B,x)$ のすべての団変数は初期団変数 x_i ($i\in I$) の $\mathbb{Z}$ 係数の Laurent 多項式で表示できる.

Theorem 2.4 (有限型団代数の分類 ([FZ03]))**.** $\mathcal{A}(Q,x)$ の異なる団変数が有限個であるための必要十分条件は $\mathcal{A}(Q,x)$ のある種子 (Q',x') に対して, Q' の下部グラフ (矢の向きを無視したグラフ) が ADE 型の Dynkin 図となることである.

2.3. **係数つき団代数.**

Definition 2.5. $\mathbb{P}$ が半体 (semifield) であるとは, $\mathbb{P}$ が乗法的 abel 群であり, 可換で結合的な演算 $\oplus$ (加法) を持ち, 分配則 $(a\oplus b)c=ac\oplus bc$ をみたすことである.

Example 2.6. 以下の３つの半体が重要である.

(a) 普遍半体 (universal semifield) $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$.

変数の組 $y=(y_i)_{i\in I}$ に対して, y の引き算を伴わない (subtraction-free) 有理式表示を持つ有理式全体のなす半体.

(b) tropical 半体 (tropical semifield[1]) $\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$.

[1]tropical を「熱帯」と訳すことにはいささかのためらいを感じるのはおそらく筆者だけではないであろう. そもそも, 果たして「tropical」という用語は１００年後も使われているのであろうか、という強い懐疑を常に抱きつつも, 言葉の響きの良さのためなのか、あるいはブラジルに対する憧れのせいなのか、筆者自身もついこの用語を多用してしまう. この用語の起源についてご存知ない方は google で調べられたし.

変数の組 $y=(y_i)_{i\in I}$ に対して, y の生成する乗法的自由アーベル群 (すなわち y の係数 1 の Laurent 単項式全体のなす群) に以下の加法 $\oplus$ を入れたもの.

$$\prod_{i\in I} y_i^{a_i} \oplus \prod_{i\in I} y_i^{b_i} := \prod_{i\in I} y_i^{\min(a_i,b_i)}. \tag{2.3}$$

(c) 自明半体 (trivial semifiled) $\mathbf{1}=\{1\}$.
$1\times 1 = 1\oplus 1 = 1$ と定める.

いま, 反対称行列 $B=(b_{ij})_{i,j\in I}$ と形式的変数の組 $x=(x_i)_{i\in I}$ および形式的変数の組 $y=(y_i)_{i\in I}$ の 3 つ組 (B,x,y) を考え、これを初期種子 (initial seed) と呼ぶ. 初期種子 (B,x,y) の $k\in I$ における変異 $\mu_k(B,x,y)=(B',x',y')$ を次で定める. まず, $B'=\mu_k(B)$ は (2.1) で定めたとおりとする. つぎに, $y'=(y'_i)_{i\in I}$ ($y'_i\in\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$) を以下のとおり定める.

$$y'_i = \begin{cases} y_i^{-1} & i=k \\ y_i(y_k\oplus 1)^{-b_{ki}} & i\neq k, b_{ki}\le 0 \\ y_i(\dfrac{y_k}{y_k\oplus 1})^{b_{ki}} & i\neq k, b_{ki}\ge 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

最後に, $\mathbb{ZP}_{\mathrm{univ}}(y)$ を $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ の群環, $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{QP}_{\mathrm{univ}}(y)$ をその商体として, $x'=(x'_i)_{i\in I}$ ($x'_i\in\tilde{\mathbb{Q}}(x)$) を以下のとおり定める.

$$x'_i = \begin{cases} x_i & i\neq k \\ \dfrac{1}{x_i}\left(\dfrac{y_k}{y_k\oplus 1}\prod_{j\in I} x_j^{[b_{jk}]_+} + \dfrac{1}{y_k\oplus 1}\prod_{j\in I} x_j^{[-b_{jk}]_+}\right) & i=k. \end{cases} \tag{2.5}$$

これらを y と x の交換関係式 (exchange relation) という. 先の場合と同様に, $\mu_k^2=\mathrm{id}$ がなりたつ.

先の場合と同様に, このように得られた新たな「種子」(B',x',y') に対しても同様の規則で変異を次々と繰り返し, 得られたすべての種子 (B',x',y') を集めよう. 各種子 (B',x',y') に対して, B' を交換行列 (exchange matrix), x' を団 (cluster), x'_i ($i\in I$) を団変数 (cluster variable), y' を係数の組 (coefficient tuple), y'_i ($i\in I$) を係数 (coefficient) という.

Definition 2.7 ([FZ02, FZ03])**.** 初期種子 (B,x,y) に対して変異で得られるすべての団変数たちで生成される $\tilde{\mathbb{Q}}(x)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数を係数つき団代数といい, $\mathcal{A}(B,x,y)$ と表す.

Theorem 2.8 (Laurent 現象 ([FZ02, FZ07]))**.** $\mathcal{A}(B,x,y)$ のすべての団変数は初期団変数 x_i ($i\in I$) の $\mathbb{ZP}_{\mathrm{univ}}$ 係数の Laurent 多項式で表示できる.

以下では断らない限り, 係数つき団代数を単に団代数と呼ぶことにする.

3. F 多項式

Fomin-Zelevinsky は [FZ07] において, 団変数および係数の C 行列, F 多項式, G 行列による表示を与えることによりその構造を明らかにした. これにより, 団代数の理論は非常に豊富かつ強力なものになった. ここではその基本的事項についてまとめておこう.

3.1. C **行列, F 多項式, G 行列.** はじめに定理 (公式) を述べよう.

Theorem 3.1 ([FZ07])**.** 団代数 $\mathcal{A}(B,x,y)$ の各種子 (B',x',y') に対して, ある y の多項式 $F'_i(y)$ $(i\in I)$、整数行列 $C'=(c'_{ij})_{i,j\in I}$ および整数行列 $G'=(g'_{ij})_{i,j\in I}$ が存在して以下がなりたつ.

$$y'_i=\left(\prod_{j\in I}y_j^{c'_{ji}}\right)\prod_{j\in I}F'_j(y_1,\dots,y_n)_{\oplus}^{b'_{ji}}, \tag{3.1}$$

$$x'_i=\left(\prod_{j\in I}y_j^{g'_{ji}}\right)\frac{F'_i(\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n)}{F'_i(y_1,\dots,y_n)_{\oplus}},\quad \hat{y}_i=y_i\prod_{j\in I}x_j^{b_{ji}}. \tag{3.2}$$

ここで, $F'_i(y_1,\dots,y_n)_{\oplus}$ は多項式 $F'_i(y_1,\dots,y_n)$ における和 $+$ を $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ における和 $\oplus$ で形式的に置き換えたものである. ($\hat{y}$ の定義における b_{ji} (=初期行列 B の成分) は b'_{ji} のミスプリントではない.)

以下では, 順に, C', F'_i, G' の定義を述べる.

3.1.1. C 行列. (C 行列の内在的な定義) 自然な半体の準同形写像 $\pi_{\mathrm{trop}}:\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)\to\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$, $y_i\mapsto y_i$, $\alpha\mapsto 1$ $(\alpha\in\mathbb{Q}_+)$ に対して, 係数 y'_i の像を $[y'_i]_{\mathbf{T}}:=\pi_{\mathrm{trop}}(y'_i)$ と表し, tropical 係数 (tropical coefficient) と呼ぶ. ([FZ07] では principal coefficient と呼ばれている.) $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は初期係数の Laurent 単項式であるから

$$[y'_i]_{\mathbf{T}}=\prod_{j\in I}y_j^{c'_{ji}},\quad c'_{ji}\in\mathbb{Z} \tag{3.3}$$

と表される. これにより整数行列 $C'=(c'_{ij})_{i,j\in I}$ が定まる.

(C 行列の組み合わせ的定義) C' は以下の初期条件と漸化式をみたすことが交換関係式 (2.4) よりただちにわかる. これらはまた C' を一意的に定める.

初期条件: 初期種子に対して $C'=I$.

漸化式: $\mu_k(B',x',y')=(B'',x'',y'')$ に対して

$$c''_{ji}=\begin{cases}-c'_{ji} & i=k\\ c'_{ji}+[-c'_{jk}]_+b'_{ki} & i\neq k, b_{ki}\leq 0\\ c'_{ji}+[c'_{jk}]_+b'_{ki} & i\neq k, b_{ki}\geq 0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Remark 3.2. (3.4) の下の二式は、まとめて

$$c''_{ji}=c'_{ji}+[-c'_{jk}]_+b'_{ki}+c'_{jk}[b'_{ki}]_+,\quad i\neq k \tag{3.5}$$

と書ける. これは, 行列

$$\tilde{B}'=\begin{pmatrix}B'\\ C'\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

に対して, 行列の変異 (2.1) を形式的に

$$\tilde{b}''_{ji}=\begin{cases}-\tilde{b}'_{ji} & i=k\\ \tilde{b}'_{ji}+[-\tilde{b}'_{jk}]_+\tilde{b}'_{ki}+\tilde{b}'_{jk}[\tilde{b}'_{ki}]_+ & \neq k\end{cases} \tag{3.7}$$

と拡張したものになっている. この理由により [FZ07] では $\tilde{B}'$ を拡大交換行列 (extended exchange matrix) と呼んでいる.

3.1.2. F 多項式. (F 多項式の内在的な定義) 各団変数 x'_i に対して, F 多項式 $F'_i(y)$ を以下で定める.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}[x^{\pm}] & & \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}[x^{\pm 1}] & & \\
\cup & & \cup & & \\
\mathcal{A}(B,x,y) & \xrightarrow{\pi_{\mathrm{trop}}} & [\mathcal{A}(B,x,y)]_{\mathbf{T}} & \xrightarrow{x_1=\cdots=x_n=1} & \mathbb{Z}[y^{\pm 1}] \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
x'_i & \mapsto & [x'_i]_{\mathrm{T}} & \mapsto & F'_i(y)
\end{array}
\tag{3.8}
$$

$F'(y)$ が実際に y の多項式であることは後に判明するが, ここではそれについては述べない.

(F 多項式の組み合わせ的定義) $F'_i(y)$ は以下の初期条件と漸化式をみたすことが交換関係式 (2.5) よりただちにわかる. これらはまた $F'_i(y)$ を一意的に定める.

初期条件: 初期種子に対して $F'_i(y) = 1$ ($i \in I$).

漸化式: $\mu_k(B', x', y') = (B'', x'', y'')$ に対して

$$
F''_i = \begin{cases} F'_i & i \neq k \\ \dfrac{1}{F'_k}\left(\displaystyle\prod_{j\in I} y_j^{[c'_{jk}]_+} \prod_{j\in I} F_j^{[b'_{jk}]_+} + \prod_{j\in I} y_j^{[-c'_{jk}]_+} \prod_{j\in I} F_j^{[-b'_{jk}]_+}\right) & i = k. \end{cases}
\tag{3.9}
$$

(G 行列の内在的な定義) $\deg : x_i, y_i \mapsto \mathbb{Z}^n$ を以下で定める.

$$
\deg\, x_i = \vec{e}_i, \quad \deg\, y_i = -\vec{b}_i,
\tag{3.10}
$$

ただし, $\vec{e}_i$ は基本単位ベクトル, $\vec{b}_i$ は B の i 列目のなすベクトルとする.

Fact. $[x'_i]_{\mathbf{T}}$ はこの degree に関して斉次である.

そこで, G' 行列の i 列目 $\vec{g}'_i$ を $\vec{g}'_i = \deg[x_i]_{\mathbf{T}}$ によって定める.

(G 行列の組み合わせ的定義) G' は以下の初期条件と漸化式をみたすことが交換関係式 (2.5) を用いて少し長い議論ののちにわかる. これらはまた G' を一意的に定める.

初期条件: 初期種子に対して $G' = I$.

漸化式: $\mu_k(B', x', y') = (B'', x'', y'')$ に対して

$$
g''_{ji} = \begin{cases} g'_{ji} & i \neq k \\ -g'_{jk} + \displaystyle\sum_{\ell\in I} g'_{j\ell}[b'_{\ell k}]_+ - \sum_{\ell \in I} b_{j\ell}[c'_{\ell k}]_+ & i = k \end{cases}
\tag{3.11}
$$

(第２式最後の $b_{j\ell}$ は $b'_{j\ell}$ のタイプミスではない.)

実は, C 行列と G 行列には以下のような簡単な関係がある.

Theorem 3.3 ([Nak10a])**.** C' の転置 C'^{T} と G' は互いに逆行列である.

3.2. **圏化.** 団代数の 2-Calabi-Yau 実現は, quiver Q が ADE 型のときに Buan ら [BMR+06] が導入した団圏 (cluser algebra) によって始められ, その後 Keller とその周辺の人々(Fu, Yang, Amiot, Plamondon ら) により一般の Q の場合に順次拡張されてきた. ここでは現時点においてその最も一般の場合である Plamondon [Pla10b, Pla10a] による結果のうち本稿に関連する部分のみを詳しい説明を一切省いて述べる.

任意の quiver Q に対して, Q の principal extension $\tilde{Q}$ とその上のあるポテンシャル W を用いて一般団圏 (generalized cluster category) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\tilde{Q},W)}$ という三角圏が定まる. このとき, さらに団代数の各種子 (B', x', y') に対して $\mathcal{C}$ のある rigid object T' が標準的に定まり, 以下が成り立つ.

Theorem 3.4 ([Pla10b, Pla10a]). T を初期種子 (B, x, y) に対応する rigid object とする.

$$\tilde{Q}' = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T') \text{ に付随する quiver}, \tag{3.12}$$

$$c'_{ij} = -\mathrm{ind}_{T'}(T_i[1])_j = \mathrm{ind}^{\mathrm{op}}_{T'}(T_i)_j, \tag{3.13}$$

$$g'_{ij} = \mathrm{ind}_T(T'_j)_i, \tag{3.14}$$

$$F'_i(y) = \sum_{e \in \mathbb{Z}^{\tilde{I}}_{\geq 0}} \chi(\mathrm{Gr}_e(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, t'_i[1]))) \prod_{j \in I} y_j^{e_j}. \tag{3.15}$$

ここで, $\mathrm{Gr}_e(X)$ は多様体 X に対する次元ベクトル e の quiver Grassmannian であり, χ はその Euler 数である.

3.3. **帰結.** この節では, 前節の圏化によって得られるいくつかの重要な帰結について述べる.

始めに以下の団代数の周期性の判定条件はまことに強力である.

Corollary 3.5 ([Pla10a, IIK+10a]). 団代数の種子の周期性は, tropical 係数の周期性から従う. すなわち,

$$[y'_i]_{\mathbf{T}} = [y''_i]_{\mathbf{T}} \ (i \in I) \quad \Longrightarrow \quad (B', x', y') = (B'', x'', y'').$$

つぎに, 団代数の係数の性質についての系を与える.

Corollary 3.6. (1) F 多項式の定数項は 1 である.

(2) C 行列の各列のすべての成分は sign-coherent (異符号を含まない) でありかつ 0 ベクトルではない.

なお, この定理の別証明は [DWZ10, Nag10] により与えられている.

Corollary 3.6 と Theorem 3.1 を組み合わせてさらに以下が得られる.

Corollary 3.7. y'_i は初期係数 y に関する Laurent 展開が可能であり, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ はその leading monomial を与える. さらに, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は正または負のいずれかの monomial になる.

この定理は次章の dilogarithm 恒等式への応用におけるカギとなる.

4. DILOGARITHM 恒等式

4.1. **Dilogarithm.** 始めに Euler dilogarithm について述べる.

一般に, 任意の自然数 k に対して, 収束半径 1 のベキ級数

$$\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \tag{4.1}$$

で定まる解析関数を k 次の polylogarithm という.

$k=1$ のとき,

$$\mathrm{Li}_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x) \tag{4.2}$$

となり, $\mathrm{Li}_1(x)$ は対数関数である. $k=2$ のとき, すなわち

$$\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \tag{4.3}$$

を Euler の dilogarithm という. 関係

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_2(x)=\frac{1}{x}\mathrm{Li}_1(x) \tag{4.4}$$

より, 以下の積分表示が得られる.

$$\mathrm{Li}_2(x)=-\int_0^x\frac{\log(1-y)}{y}dy \tag{4.5}$$

これにより解析接続された関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ は $\mathbb{C}-\{0,1,\infty\}$ の普遍被覆上の関数となるが, ここでは, 区間 $[0,1]$ 上でのみ考えることにより多価性については考慮をしない. 定義より, 以下の特殊値がただちに得られる.

$$\mathrm{Li}_2(0)=0,\quad \mathrm{Li}_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\quad \text{(Euler)}. \tag{4.6}$$

つぎに, $\mathrm{Li}_2(x)$ の積分表示 (4.5) を「対称化した」関数

$$L(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{\frac{\log(1-y)}{y}+\frac{\log y}{1-y}\right\}dy=\mathrm{Li}_2(x)+\frac{1}{2}\log x\log(1-x) \tag{4.7}$$

を導入し, これを Rogers dilogarithm という. $\mathrm{Li}_2(x)$ と同様に, ここでは, 区間 $[0,1]$ 上でのみ考えることにより多価性については考慮をしない. このとき, 以下が成立する.

$$L(0)=0,\quad L(1)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{4.8}$$

この自明な事実はわれわれの応用に対して大変重要であることを強調しておきたい. 関数 $L(x)$ の特殊値について以下のことは容易にわかるが, これ以外についてあまり多くのことは知られていない.

$$\frac{6}{\pi^2}L\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \frac{6}{\pi^2}L\left(\frac{-\sqrt{5}+3}{2}\right)=\frac{2}{5},\quad \frac{6}{\pi^2}L\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{3}{5}. \tag{4.9}$$

以下の関数方程式は大変重要である.

Theorem 4.1. $0\le x,y\le 1$ に対して以下が成り立つ.

(1) (Euler) $L(x)+L(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) (Abel, 5-term/pentagon relation)

$$L(x)+L(y)+L(1-xy)+L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)+L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)=\frac{\pi^2}{2}=3\frac{\pi^2}{6}. \tag{4.10}$$

Proof. (1) はじめに左辺が x によらないことは左辺の x に関する微分が 0 であることからすぐにわかる．つぎに, 定数を求めるためには $x = 0$ とおいて (4.8) を用いればよい．

(2) はじめに左辺が x, y によらないことは左辺の x, y に関する偏微分が 0 であることからすぐにわかる．つぎに, 定数を求めるためには $x, y = 0$ とおいて (4.8) を用いればよい． □

以下では上の二つの恒等式を非常に一般化した dilogarithm 恒等式について述べるが, その証明の原理はここで述べたもの同じである．

4.2. **定値条件．** ここでは, Frenkel-Szenes [FS95] による Rogers dilogarithm の和に関する極めて一般的な定理について述べる．

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ の任意の区間とし, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{I}) := \{f \mid f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+, \text{differentiable}\}$ とすると $\mathcal{C}$ は乗法的アーベル群になる．つぎに, $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}$ を生成元 $f \otimes g$ $(f, g \in \mathcal{C})$ と関係式

$$(fg) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h, \quad f \otimes (gh) = f \otimes g + f \otimes h \tag{4.11}$$

で定まる加法的アーベル群とする．このとき,

$$1 \otimes h = h \otimes 1 = 0, \quad f^{-1} \otimes h = f \otimes h^{-1} = -f \otimes h. \tag{4.12}$$

が成り立つことに注意する．つぎに, $f \otimes f$ $(f \in \mathcal{C})$ で生成される $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}$ の部分群を $S^2\mathcal{C}$ とおき, $\mathcal{C}$ の外積 $\bigwedge^2 \mathcal{C} := \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}/S^2\mathcal{C}$ を定める．$\bigwedge^2 \mathcal{C}$ における $f \otimes g$ の同値類を $f \wedge g$ と表すことにする．

Theorem 4.2 ([FS95])**.** $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ を $\mathcal{I}$ から $(0, 1)$ への任意の微分可能な関数とし, これらが $\bigwedge^2 \mathcal{C}$ において以下の関係式をみたすとする．

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge (1 - f_i) = 0 \quad (\text{定値条件}).$$

このとき, Rogers dilogarithm の和 $\sum_{i=1}^{n} L(f_i(t))$ は $t \in \mathcal{I}$ に関して定数関数となる．

この定理の証明は合成関数の微分を用いるだけの大変初等的なものである．

Example 4.3. (1) (Euler) 任意の $f : \mathcal{I} \to (0, 1)$ に対して, $f_1 = f$, $f_2 = 1 - f$ とおくと定値条件

$$\sum_{i=1}^{2} f_i \wedge (1 - f_i) = f \wedge (1 - f) + (1 - f) \wedge f = 0 \tag{4.13}$$

が成り立つ．特に, $f = \mathrm{id} : (0, 1) \to (0, 1)$ を考えると Theorem 4.1 (1) の Euler の恒等式の左辺の定値性が得られる．

(2) (Abel) 任意の $f, g : \mathcal{I} \to (0, 1)$ に対して, $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = 1 - fg$, $f_4 = (1 - f)/(1 - fg)$ $f_5 = (1 - g)/(1 - fg)$ とおくと簡単な計算で定値条件

$$\sum_{i=1}^{5} f_i \wedge (1 - f_i) = 0 \tag{4.14}$$

が成り立つが確かめられる．これから以下のような議論で Theorem 4.1 (1) の Abel の恒等式の左辺の定値性が得られることがわかる．任意の $x, y, x', y' \in (0,1)$ に対して,

$$c := L(x) + L(y) + L(1-xy) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right), \tag{4.15}$$

$$c' := L(x') + L(y') + L(1-x'y') + L\left(\frac{1-x'}{1-x'y'}\right) + L\left(\frac{1-y'}{1-x'y'}\right) \tag{4.16}$$

とおく．このとき, $f, g : (0,1) \to (0,1)$ をそれぞれ, $f(t) = (1-t)x + tx'$, $g(t) = (1-t)y + ty'$ で定める．そこで, Theorem 4.2 を適用すると $c = c'$ が得られる．

以下の応用においては定値条件をみたす関数の組 $f_1, \ldots, f_n$ を関数の組 $Y_1, \ldots, Y_n$ $(Y_i \in \mathcal{C})$ を用いて

$$f_i = \frac{Y_i}{1+Y_i} \tag{4.17}$$

と表す．このとき,

$$f_i \wedge (1-f_i) = \frac{Y_i}{1+Y_i} \wedge \frac{1}{1+Y_i} = -Y_i \wedge (1+Y_i) \tag{4.18}$$

であるので, 定値条件は

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \wedge (1+Y_i) = 0 \tag{4.19}$$

という形になる．

それでは, 定値条件をみたす関数の組 $\{Y_i, \ldots, Y_n\}$ はどのようにして得られるのであろうか? ここでいよいよ団代数の出番である．

4.3. **局所定値性.** 団代数 $\mathcal{A}(B, x, y)$ の各種子 (B', x', y') に対して $W' \in \bigwedge^2 \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ を

$$W' := \sum_{i \in I} F'_i \wedge y'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \in I} b'_{ij} F'_i \wedge F'_j \tag{4.20}$$

で定める．

以下の定理が団代数と dilogarithm の関連を与える最も基本的なものである．

Theorem 4.4 (局所定値性 [Nak10a], [FG09a, FG09b] も参照)**.** 種子 (B', x', y) と $(B'', x'', y'') = \mu_k(B', x', y')$ に対して, W' と W'' をそれぞれ上で定めたものとする．このとき, 以下が成り立つ．

$$W'' - W' = y'_k \wedge (1 \oplus y'_k). \tag{4.21}$$

Proof. B, y, F の交換関係式 (2.1), (2.4), (3.9) より得られる． □

Remark 4.5. 以下で示す定値性条件との関連から, ここでは関係式 (4.21) を「局所定値性 (local constancy)」と呼んだ．

4.4. **団代数の周期性と dilogarithm 恒等式.** 以下本稿の終りまで, 団代数 $\mathcal{A}(B,x,y)$ が以下の「種子の周期性」を持つことを仮定しよう.

(種子の周期性) I 列 $(i_1,\dots,i_\Omega)$ に対して, $(B(0),x(0),y(0)) := (B,x,y)$ とおいて, 種子の変異の列

$$(B(0),x(0),y(0)) \overset{\mu_{i_1}}{\leftrightarrow} (B(1),x(1),y(1)) \overset{\mu_{i_2}}{\leftrightarrow} \cdots \overset{\mu_{i_\Omega}}{\leftrightarrow} (B(\Omega),x(\Omega),y(\Omega)) \tag{4.22}$$

を考えるとき, 以下が成り立つ.

$$(B(\Omega),x(\Omega),y(\Omega)) = (B(0),x(0),y(0)). \tag{4.23}$$

すなわち, 離散的な時刻 $u=0,1,\dots,\Omega$ に対して, 種子が次々と変異をするとき, 時刻 Ω において初期種子に戻るということである. このとき, 各時刻 $u=0,\dots,\Omega-1$ に対して, u と u において変異を行う点 $i_{u+1}\in I$ のペア (u,i_{i+1}) を列 (4.22) における前方変異点 (forward mutation point) と呼ぶ. P_+ を前方変異点全体の集合とする.

さて, $W(u)$ $(u=0,\dots,\Omega)$ を時刻 u における種子 $(B(u),x(u),y(u))$ に対して (4.20) で定義されるものとする. このとき, F 多項式の初期条件 $F_i=1$ より $W(0)=0$ であることに注意する. すると, 定理 4.4 より

$$W(u) = \sum_{v=0}^{u-1} y_{i_{v+1}}(v)\wedge(1\oplus y_{i_{v+1}}(v)). \tag{4.24}$$

となる. 一方, 周期性の仮定 (4.23) より, $W(\Omega)=W(0)=0$ となり, 以下の団代数における定値性条件が得られる.

Theorem 4.6.

$$\sum_{(u,i)\in P_+} y_i(u)\wedge(1\oplus y_i(u)) = 0. \tag{4.25}$$

まとめると,

$$\text{(局所定値性)+(種子の周期性)} \Longrightarrow \text{(定値性条件)} \tag{4.26}$$

となる.

これより, Example 4.3 (2) と同じ議論を用いて, まず以下の定理が得られる.

Corollary 4.7. 任意の半体の準同形写像 $\varphi:\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)\to\mathbb{R}_+$ に対して

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{(u,i)\in P_+} L\left(\varphi\left(\frac{y_i(u)}{1\oplus y_i(u)}\right)\right) \tag{4.27}$$

は φ の取り方に依存しない定数である.

つぎに (4.27) の定数を求めたい. ここで前述の Corollary 3.7 を思い出すと, $y_i\to 0$ $(i\in I)$ の極限において各係数 y'_i はその Laurent 展開の leading monomial の正負に応じて 0 または $+\infty$ のいずれかに収束することがわかる. そこで, Theorem 4.1 の証明と同じアイデアが用いることができて, これより以下の本稿の主定理が得られる.

Theorem 4.8 (Dilogarithm identities [Nak10a])**.** 任意の半体の準同形写像 $\varphi : \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y) \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\frac{6}{\pi^2} \sum_{(u,i)\in P_+} L\left(\varphi\left(\frac{y_i(u)}{1 \oplus y_i(u)}\right)\right) = N_-. \tag{4.28}$$

ここで, $N_- = \#\{(u,i) \in P_+ \mid [y_i(u)]_{\mathbf{T}}$ が負 $\}$ である.

Remark 4.9. 1. Theorem 4.6 以降の議論は Chapoton [Cha05] によるものの拡張である.

2. [Nak09, IIK$^+$10a, IIK$^+$10b, NT10] においては, 定値性条件 (4.25) を具体的な種子の周期性に対して個別に証明していた. [Nak10a] では, [FG09a, FG09b] の関連する結果を参考にこれを局所定値性から導くことにより任意の種子の周期性に拡張をすることが可能になった.

以上をまとめると, 係数付き団代数とその圏化による結果を用いて, 任意の団代数の種子の周期に対して付随する dilogarithm 恒等式を導いた. 共形場理論における dilogarithm 恒等式 [Nak09, IIK$^+$10a, IIK$^+$10b, NT10] はこの特別な例になっているが, そこではさらに「tropical Y-system」を用いて N_- の値を具体的に求めることができる. この部分も root 系とその Weyl 群の Coxeter 変換と関連してとても興味深いのであるが, この解説はまた別の機会に行いたい.

References

[BMR$^+$06] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. in Math. **204** (2006), 572–618; arXiv:math/0402054 [math.RT].

[Cha05] F. Chapoton, *Functional identities for the Rogers dilogarithm associated to cluster Y-systems*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 755–760.

[DWZ10] H. Derksen, J. Weyman, and A. Zelevinsky, *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 749–790; arXiv:0904.0676 [math.RA].

[FG09a] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. **42** (2009), 865–930; arXiv:math/0311245 [math.AG].

[FG09b] ———, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286; arXiv:math/0702397 [math.QA].

[FS95] E. Frenkel and A. Szenes, *Thermodynamic Bethe ansatz and dilogarithm identities. I*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 677–693; arXiv:hep–th/9506215.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].

[FZ03] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].

[FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].

[IIK$^+$10a] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r*, 2010, arXiv:1001.1880 [math.QA].

[IIK$^+$10b] ———, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r, F_4, and G_2*, 2010, arXiv:1001.1881 [math.QA].

[Nag10] K. Nagao, *Donaldson-Thomas theory and cluster algebras*, 2010, arXiv:1002.4884 [math.AG].

[Nak09] T. Nakanishi, *Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case*, 2009, arXiv:math.0909.5480 [math.QA], to appear in Nagoya Math. J.

[Nak10a] ———, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, 2010, arXiv:1006.0632 [math.QA].

[Nak10b] Tomoki Nakanishi, *Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras*, RIMS Kokyuroku **1714** (2010), 26–31, (in Japanese).

[NT10] T. Nakanishi and R. Tateo, *Dilogarithm identities for sine-Gordon and reduced sine-Gordon Y-systems*, 2010, arXiv:1005.4199 [math.QA].

[Pla10a] P. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1004.0830 [math.RT].

[Pla10b] ———, *Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1002.4956 [math.RT].