

博士論文

ドビー織機の綜統枠数最小化に関する研究

名古屋大学 大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻

松浦 勇

目次

第1章	序論	1
1.1	製織の原理	1
1.2	織物組織図と織方図	3
1.3	織方図の行列表現	5
1.4	開口方式	5
1.5	長目綜統を用いた製織	8
1.6	本研究の目的	12
1.7	本論文の構成	13
第2章	織物組織の数え上げ	15
2.1	製織可能な織物組織の数	15
2.2	織物組織の数え方	16
2.3	普通綜統のみを使用した場合	17
2.3.1	綜統枠2枚の場合	17
2.3.2	綜統枠3枚の場合	19
2.4	長目綜統を使用した場合	20
2.4.1	2HLD たて糸が1本の場合	23
2.4.2	2HLD たて糸が2本の場合	23
2.4.3	2HLD たて糸が3本の場合	25
2.5	まとめ	26
第3章	綜統枠数最小化問題	28
3.1	ブール階数	28
3.2	2部クリーク被覆問題	29
3.3	発見的アルゴリズムの提案	29
3.3.1	グラフ彩色問題への変換	30

3.4	実験	35
3.4.1	実験結果	36
3.4.2	考察	37
3.5	まとめ	38
第4章	集合被覆アプローチ	44
4.1	集合被覆問題への変換	44
4.1.1	2部クリーク被覆問題から集合被覆問題への変換	44
4.1.2	極大2部クリーク列挙アルゴリズム	45
4.1.3	集合被覆問題の0-1整数計画問題への定式化	45
4.2	クロスベクトルに基づく0-1整数計画問題としての定式化	45
4.3	実験および考察	48
4.3.1	実験結果	49
4.4	まとめ	50
第5章	たて糸張力を均一にする条件下での定式化	52
5.1	たて糸張力	52
5.1.1	たて糸張力と織物品質	52
5.1.2	異なる綜統枠によって開口されたたて糸にかかる張力	53
5.2	長目綜統を導入した場合のたて糸張力	54
5.3	排他的ブール階数	55
5.4	2部クリーク分割問題	56
5.5	アルゴリズム	58
5.6	実験	60
5.7	考察	60
5.8	まとめ	62
第6章	結論	64

第1章 序論

1.1 製織の原理

織機では、たて糸を上下2つの層に分離して、その間によこ糸を通すことにより織物を製造する。たて糸の2つの層への分け方を変化させることにより織物の文様（織物組織）が形成される。たて糸を2つの層に分けることを開口といい、装着した開口装置の機構の違いにより、タペット織機、ドビー織機、ジャカード織機に分類される。

タペット織機は安価であるが、簡単な織物組織しか製織することができない。ジャカード織機では複雑な織物組織を製織することができるが、極めて高価である。ドビー織機ではジャカード織機ほど複雑な織物組織を製織することができないが、たて糸の太さ、密度等の変更が容易で小ロット生産にも対応しやすいという利点がある。ドビー織機で複雑な組織の織物を織ることができれば、製織業者の競争力向上に寄与することができる。本論文で対象とするのはドビー織機である。

図1.1に製織の原理を示す。綜統枠（heald frame）に取り付けられたヘルドロッド（heald rod）が図1.2に示す綜統（heald）の耳（end loop）に通されている。たて糸は綜統の目（eye）に通されており、綜統の上下運動によって、2つの層に分けられ、開口部が形成される。よこ糸は杼（ひ，shuttle）によって開口部に通され、箄（おさ，reed）によって織前に押し付けられる。

織機には、複数の綜統枠が装着されており、綜統は、そのうちの1つに取り付けられているため、同じ綜統枠の綜統を通るたて糸は常に同じ動きをする。ドビー式開口装置の綜統枠枚数は30枚程度までで、製織工場においては8枚または16枚の綜統枠を装備したドビー織機が多く使われている。

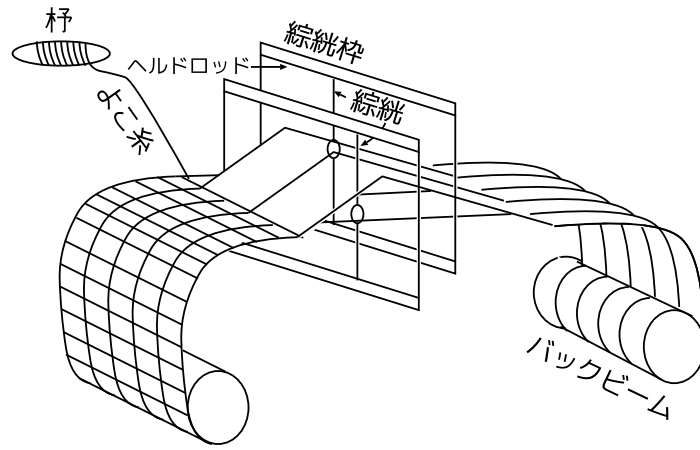


図 1.1: 製織の原理

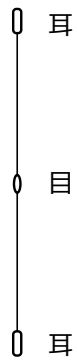


図 1.2: 綜絞 (heald) の目と耳

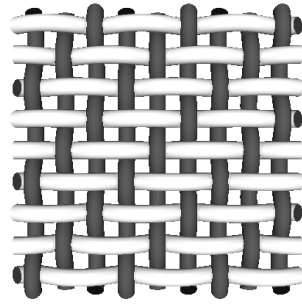


図 1.3: 織物における糸の交差

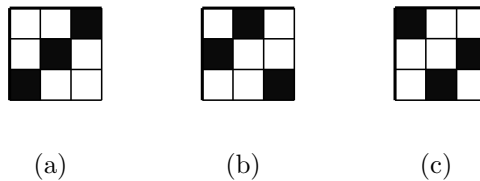


図 1.4: 第一種等価組織

1.2 織物組織図と織方図

織物における糸の交差の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさをひとつの単位として、その繰り返しとなっている。その単位を完全組織と呼ぶ[1]。図 1.3 の織物では、黒で示すたて糸 3 本、白色で示すよこ糸 3 本からなる完全組織が繰り返されていることがわかる。糸の交差の状態は、織物組織図 (weave diagram, 以下、組織図と呼ぶ) で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点を ■ で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点を □ で表す。完全組織は同一織物内でも位置の取り方によって違って見える。これらを等価組織と称する。その中で、上下左右に平行移動すると同じ組織になるものは第一種等価組織と呼ぶ[2]。図 1.3 の織物の 3 通りの第一種等価組織を図 1.4 に示す。

織物組織を織るための、たて糸の綜統への通し方を示すのが綜統通図 (threading draft diagram) であり、開口装置 (綜統枠) の運動順序を示すのが紋枠図 (peg plan diagram) である。組織図、綜統通図、紋枠図を合わせて、織方図 (lifting plan diagram) と呼ぶ。図 1.5 に織方図の例を示す。よこ糸が F 本、たて糸が E 本からなる完全組織で、綜統枠枚数が H 枚であれば、組織図は F 行 E 列、紋枠図は F 行 H 列、綜統通図は H 行 E 列となる。綜統枠は織前に近いものから順に、

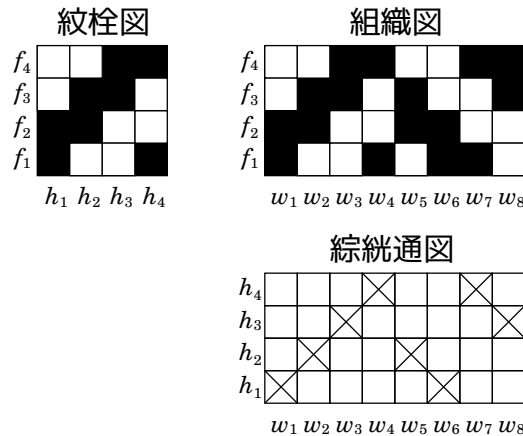


図 1.5: 織方図

h_1 から h_H で表す．紋柱図はよこ糸 f_j が入るときに綜統枠 h_i が上昇する場合に， (h_i, f_j) を ■ で表す．綜統通図は，たて糸 w_i が第 j 綜統枠 h_j に取り付けられた綜統の目を通る場合に， (w_i, h_j) を × で表す．普通綜統のみを用いる製織では，たて糸はそれぞれ 1 本の綜統のみに通されるため，綜統通図の各列にはただひとつの × が現れる．以降，織方図を示す場合には，図 1.5 のように，組織図の左に紋柱図を描き，組織図の下に綜統通図を描くこととする．

例えば，図 1.5 の紋柱図のよこ糸 f_2 に対応する行において綜統枠 h_1, h_2 に対応する列が ■ となっている．これは杼によって，よこ糸 f_2 が通されるとき，綜統枠 h_1, h_2 が上昇していることを意味している．次に綜統通図中の h_1, h_2 に対応する行を見ると，たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 に対応する列でそれぞれ × になっている．これは綜統枠 h_1, h_2 が上昇しているとき，たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 が開口（上昇）していることを意味している．このときに杼を通すと，たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 がよこ糸の上方に位置する．この状態を表しているのが組織図の f_2 に対応する行である．

完全組織のよこ糸本数が F 本の場合，組織図の考えうる列のパターンは $2^F - 2$ 通りであるが， H 枚の綜統枠を装着した織機ではそのうちの H 通りが可能である．図 1.5 の組織図の各列について見ると 4 通りのパターンが存在するので，製織するためには織機の綜統枠は 4 枚必要である．

1.3 織方図の行列表現

本論文では，織方図に関して数理的な議論を行うために組織図，紋栓図，綜統通図をそれぞれ行列で表す．組織図，紋栓図における■と□をそれぞれ1と0で表し，綜統通図における×と□をそれぞれ1と0で表す．組織図，紋栓図，綜統通図を行列で表したものをそれぞれ W ， P ， T と表記する．ただし，行列 T の行の順序は綜統通図の行のそれと逆にする．これは，これらの行列の間に $W = PT$ の関係が成立するためである（これについては後で詳しく述べる）．図1.5の織方図に対応する3つの行列を図1.6に示す．

図1.6の行列のように，すべての成分が0または1である行列をブール行列と呼ぶ．行列の成分のうち，1であるものを1-成分と呼び，0であるものを0-成分と呼ぶ．ブール行列 A ， B の和 $A + B$ と積 AB をそれぞれ通常の行列の和と積と同様に定義する．ただし，成分の計算はブール代数に従うものとする．つまり， $+$ は論理和に， \cdot は論理積に置き換えて演算を行う．行列 A の (i, j) 成分を $A_{i,j}$ で表す． A の i 行目の行ベクトルを A_{i*} ， j 列目の列ベクトルを A_{*j} で表す．以降では W ， P ， T をブール行列とする．

二つの n 次行ベクトル $a = (a_1, \dots, a_n)$ と $b = (b_1, \dots, b_n)$ の論理和 $a \vee b$ とは，その成分ごとの論理和を成分とする n 次行ベクトル $(a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n)$ のことである．列ベクトルの論理和も同様に定義する．

普通綜統のみを使用する場合，各たて糸はただひとつの綜統を通るので T の列 T_{*j} にはちょうどひとつの1が現れる．この1を $T_{i,j}$ とすると， P の列 P_{*i} が， T_{*j} に対応するたて糸 w_j が通る綜統に対応している．つまり， P_{*i} で表される綜統 h_i の動きにより，たて糸 w_j に所望の動きをさせている．このことから，組織図 W ，紋栓図 P ，綜統通図 T の間には $W = PT$ の関係が成立する．与えられた W を P と T の積で表したとき， P の列の数（= T の行の数）が， W で表される織物組織を製織するための綜統枠の数である．図1.5でみたように，この値は行列 W の異なるパターンの列の数である．

1.4 開口方式

織機の開口方式の種類には上口開口，中口開口，全開口の3つの方式がある．本節ではそれぞれの方式の特徴について述べ，本論文で採用する新たな開口方式を

$$\begin{array}{ccc}
P & & W \\
\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \\
& & T \\
& & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

図 1.6: 織方図の行列表現

示す .

上口開口 (図 1.7(a))

織機が停止しているときには , すべてのたて糸は実線で示す位置にある . よこ糸が通されるとき , 開口しないたて糸は実線の位置のままであり , 開口するたて糸は点線で示す位置に移動し , 箆打ちされるときには , すべてのたて糸が実線で示す位置に戻る .

中口開口 (図 1.7(b))

織機が停止しているときには , すべてのたて糸は実線で示す位置にある . よこ糸が通されるとき , 開口しないたて糸は点線 A の位置に移動し , 開口するたて糸は点線 B で示す位置に移動し , 箆打ちされるときには , すべてのたて糸が実線で示す位置に戻る .

全開口 (図 1.7(c))

織機が停止しているときには , すべてのたて糸は実線 A で示す位置にある . よこ糸が通されるとき , 開口しないたて糸は実線 A の位置のままであり , 開口するたて糸は実線 B で示す位置に移動する . よこ糸が通された後 , 各たて糸の位置はそのままで , 箆打ちされる .

以上のように , 織機に採用されているいずれの開口方式においても , 開口時 , 箆打ち時にはすべてのたて糸には均一な張力がかかることが分かる . これは , 高品

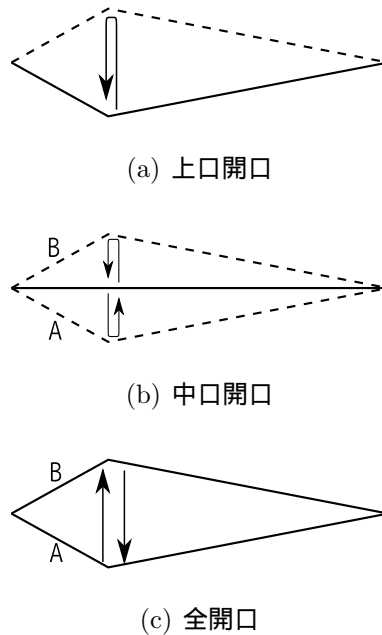


図 1.7: 開口の種類

質な織物の製造のためには、たて糸張力の均一化が重要だからである。本論文では、図 1.8 に示す上片側開口方式を採用した場合の製織について考える（たて糸張力の均一化については第 5 章で改めて詳しく述べる。）

上片側開口 (図 1.8)

織機が停止しているときには、すべてのたて糸は実線で示す位置にある。よこ糸が通されるとき、開口しないたて糸は実線の位置のままであり、開口するたて糸は点線で示す位置に移動し、箆打ちされるときには、すべてのたて糸が実線で示す位置に戻る。

この方式では、開口時の、開口するたて糸と開口しないたて糸にかかる張力に差が生じ、織物に欠陥が発生する可能性が高まる。しかし、そのような欠陥が起こりにくい場合も考えられる。例えば、伸縮性の高い糸をたて糸に用いた場合や、レピア織機、エアジェット織機などの無杼織機で綜統枠の上昇距離が小さく、開口されるたて糸と開口されないたて糸の張力差が無視できる場合などである。この方式を上片側開口と呼ぶ。

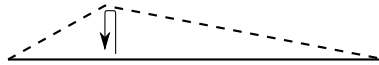


図 1.8: 上片側開口

1.5 長目綜統を用いた製織

長目綜統とは，図 1.9 に示すような形状の，目が上下方向に長い綜統であり，本来は，ジャカード織機で大きな文様の織物を織る際に用いられる [3]．以下で紹介するように，ドビー織機においても，長目綜統と普通綜統を共に用いて，必要綜統枠枚数を減らすことができる．

渡辺 [4, 5, 6] は文献 [4] で平織が主体である千鳥模様を対象として，ドビー織機に長目綜統を導入することで必要綜統枠枚数を 30 枚から 24 枚に減少させている．千鳥模様を構成しないたて糸は普通綜統のみに通すが，千鳥模様を構成する各たて糸を 1 つの普通綜統と 2 つの長目綜統に通している．長目綜統用の綜統枠は 8 枚である．図 1.10 に普通綜統のみを使用した場合の織方図と，長目綜統を導入した場合の織方図の例を示す．文献 [5] では平織が主体である組織を対象として，必要綜統枠枚数を 40 枚から 24 枚に減少させている．地たて糸と模様たて糸を交互に配置し，地たて糸は普通綜統のみに通すが，模様たて糸は普通綜統と 1 つの長目綜統に通している．長目綜統用の綜統枠は 2 枚である．図 1.11 に普通綜統のみを使用した場合の織方図と，長目綜統を導入した場合の織方図の例を示す．文献 [6] では千鳥模様などの飛模様を対象として，必要綜統枠枚数を 24 枚から 16 枚に減少させている．模様たて糸を 1 つの普通綜統と 1 つの長目綜統に通している．長目綜統用の綜統枠は 2 枚である．

Hoskins and Hoskins [7] は長目綜統を導入したドビー織機で，たて朱子織を製織するときの紋柱図と綜統通図を求める手順を示しており，必要綜統枠枚数を 8 枚から 5 枚に減少させている．図 1.12 に普通綜統のみを使用した場合の織方図と，長目綜統を導入した場合の織方図の例を示す．Hoskins [8] は長目綜統を導入したドビー織機で，必要綜統枠枚数を減少させて昼夜斜紋織物と 2 種の二重織物を製織するときの紋柱図と綜統通図を求める手順を示している．廣津と柄崎 [9] は長目綜統を導入することで，二重織物を対象として必要綜統枠枚数を 4 枚から 2 枚に減少させている．



図 1.9: 長目綜統

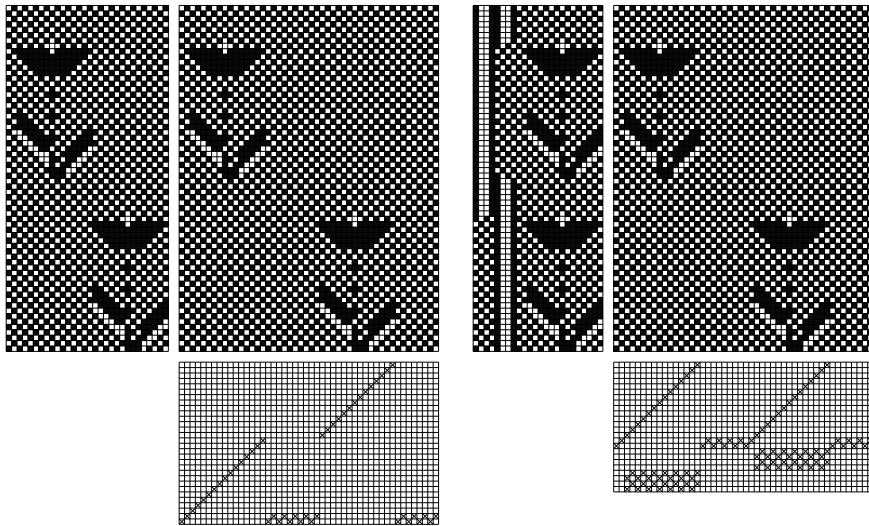


図 1.10: 長目綜統の導入 I(左: 普通綜統のみ, 右: 長目綜統導入時)

上で述べた手法に共通しているのは、特定の織物組織に対して必要綜統枠枚数を減少させることができることを示していることである。

普通綜統のみを用いる製織では、たて糸はそれぞれ1本の綜統に通されるが、長目綜統を導入した場合は、たて糸は複数の綜統を通ることができる。織機の側面から見た4つの模式図を図1.13に示す。各模式図において、左側が織前側で、右側がバックビーム側である。ここでは、2本の長目綜統A、Bを考え、太線で示したたて糸は両方の長目綜統に通っているとす。図1.13(a)に示すように、A、Bとも上昇していない状態では、たて糸は静止している。A、Bいずれか一方が上昇するとたて糸は開口する(同図(b)、(c))。綜統の目が長いため、他方の綜統がたて

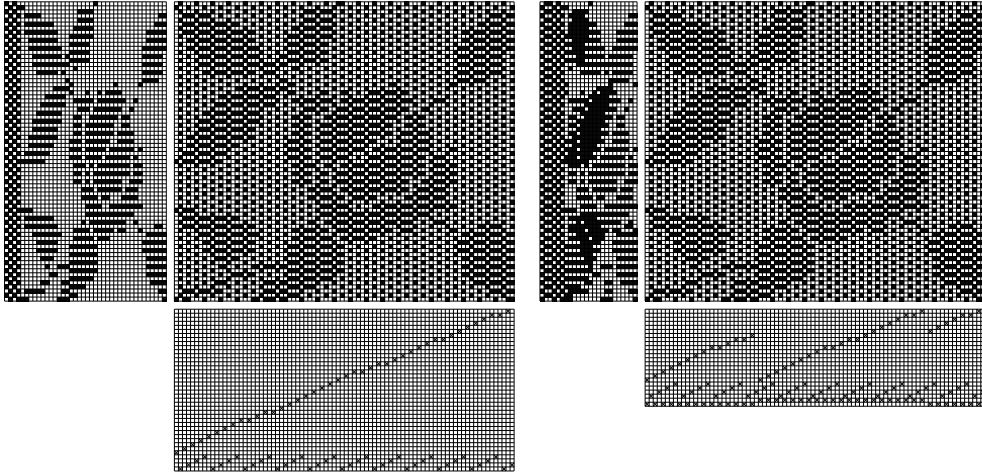


図 1.11: 長目綜統の導入 II(左: 普通綜統のみ, 右: 長目綜統導入時)

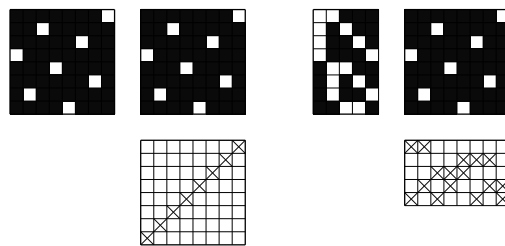


図 1.12: 長目綜統の導入 III(左: 普通綜統のみ, 右: 長目綜統導入時)

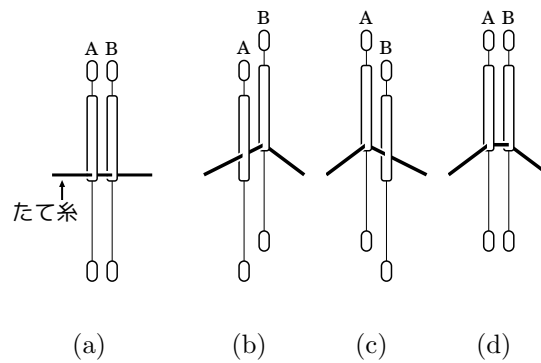
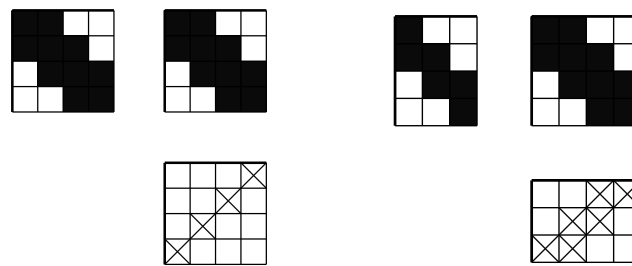


図 1.13: 長目綜統を用いた製織の模式図



(a) 普通綜統のみを使う場合 (b) 長目綜統を導入した場合

図 1.14: 同じ組織の織方図

糸の上昇を妨げることがない．A, B とも上昇した場合も，たて糸は開口する（同図(d)）．

長目綜統を使うことで綜統枠枚数を減らすことができる簡単な例を示す．普通綜統を使った場合の織方図を図 1.14(a) に示す．組織図をみると，4 本のたて糸はすべて異なる動きをするため，普通綜統を使った場合には，綜統枠が 4 枚必要である．図 1.14(b) に長目綜統を併用した場合の織方図を示す．左から 1 番目のたて糸は第 1 綜統枠の綜統のみに通っているが，2 番目のたて糸は第 1 綜統枠と第 2 綜統枠の 2 つの綜統を通っている．3 番目のたて糸は第 2 綜統枠，第 3 綜統枠の 2 つの綜統を通っている．そして，4 番目のたて糸は第 3 綜統枠の綜統のみに通している．これにより，綜統枠が 3 枚で済むことがわかる．組織図が与えられたとき，長目綜統を導入したドビー織機によりその織物を製織するのに必要な最小の綜統枠数を求める問題を綜統枠数最小化問題と呼ぶ．

長目綜統を導入すると1本のたて糸が複数の長目綜統を通るので、 T には複数の1が現れる列が存在する。 T の列 T_{*j} において、1が i_1 行目と i_2 行目に現れるとすると、列 P_{*i_1} 、列 P_{*i_2} の論理和が T_{*j} に対応するたて糸 w_j の動きを表している。3つ以上の1が存在する T の列についても同様である。したがって、長目綜統を使用する場合も、普通綜統のみを使用する場合と同様に $W = PT$ の関係が成り立つ。ただし、ここでの右辺は紋柱図 P と綜統通図 T のブール積である。

1.6 本研究の目的

長目綜統は元々、ジャカード織機において大きな文様の織物を製織する際に使われていた。ドビー織機に長目綜統を導入して、必要綜統枠数を減少させて特定の模様の織物を製織する方法が知られている [4, 5, 6, 7, 8, 9] が、この方法が適用されてきた織物は千鳥模様、平織を主体とした模様、たて朱子織、二重織などの特定の模様に限られていた。

本研究の目的は、長目綜統を導入したドビー織機において、特定の模様に限らず、一般の織物組織を製織する場合の長目綜統導入の効果を明らかにすることである。具体的には以下のように数理的な定式化とアルゴリズムの提案、それに、計算機実験を行う。

増加する製織可能織物組織数の計算 1.5節でみたように、ドビー織機に長目綜統を導入することにより、所望の織物組織を製織するために必要な綜統枠数を減少させることができる。逆に言うと、決められた綜統枠数では製織可能な織物組織数が増加する。そこで、たて糸とよこ糸の本数を固定した織物組織で、長目綜統を導入することで、製織可能な織物組織数がどれだけ増えるかを調べる。ここで対象とする織物組織は、製織工場において実際に製織される織物組織の中では小さなサイズの織物組織ではあるが、長目綜統導入の効果を評価することができる。

必要綜統枠枚数の最小化 綜統枠数を最小化する問題を定式化し、それを解く発見的解法を提案する。実際にドビー織機で製織されている織物組織を対象として実験を行う。製織工場で使われているドビー織機は8枚または16枚の綜統枠が装着されたものが多い。これらの織機に長目綜統を導入することによって製織可能となる織物組織がどの程度であるかを実験により調べ、長目綜統導入の効果を評

価する．また，綜統枠数最小化問題を整数計画ソルバにより効率的に解く方法を提案する．得られた厳密解と，提案した発見的解法で得られた解を比較することにより提案した発見的解法の性能を検証する．

たて糸張力均一条件下での綜統枠数最小化 製織時のたて糸張力には推奨される適正值があり，たて糸張力の管理には細心の注意が払われる．長目綜統を導入したときの製織において，たて糸が通る経路を比較すると、ただひとつの長目綜統により開口された場合（図 1.13 (b) (c)）よりも複数の長目綜統により開口された場合（同図 (d)）の方が長いので、たて糸に過度の張力がかかる．その結果，所望の織物組織が正しく製織できないという織物欠陥（目飛び）が発生し，織物の品質の低下を招く可能性がある．さらには，たて糸切れが発生し生産性の低下につながるおそれもある．そこで，たて糸張力が均一であるという新たな条件のもとで，綜統枠数を最小化するという，より現実的な問題を考える．この問題を定式化し発見的解法を提案する．実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行うことにより，必要綜統枠数の削減の効果を評価する．

1.7 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである．

第 2 章では，長目綜統を導入することで製織可能な織物組織数がどの程度増えるのかを調べる．具体的には，たて糸 4 本，よこ糸 4 本からなる織物組織で，綜統枠 3 枚を用いた場合を考え，長目綜統を導入することで製織可能な織物組織数が約 2 倍に増えることを示す．

第 3 章では，長目綜統を導入した場合に，与えられた織物組織を製織するのに必要な綜統枠枚数が，織物組織図をブール行列とみなしたときのブール階数であることを示す．次に，行列のブール階数を求める問題がグラフの 2 部クリーク被覆問題に変換できることを示し，更に，この問題がグラフ彩色問題に変換できることを示す．既に提案されているグラフ彩色アルゴリズムを適用することで，実際に製織されている各種織物に対し長目綜統を導入することにより必要綜統枠数を減らせることを実験的に示す．

第 4 章では，2 部クリーク被覆問題を集合被覆問題として定式化する．2 部グラフの極大クリークを列挙することで，この集合被覆問題の規模を小さくすること

ができ、整数計画ソルバを用いて解くことができた。ブール階数を求める問題を直接的に整数計画問題へと定式化する方法と比べると計算時間を大幅に短縮することができた。そのため、わずかな例外を除き実験の対象としたすべての織物組織に対し、最小綜統枠枚数を厳密に求めることができた。また、この結果を用いて、第3章で提案したアルゴリズムの性能を評価した。

第5章では、長目綜統を導入した場合にも、たて糸張力の均一性を維持できるような問題を考える。そのために、綜統枠数最小化問題に、たて糸が開口されるときには、ただ1つの長目綜統の上昇により開口されるという条件を追加した新たな問題を考え定式化する。この新しい問題がブール行列の排他的ブール階数を求める問題と等価であること、更に、排他的ブール階数を求める問題が2部グラフのクリーク分割問題に等価であることを示す。この結果を用いて、たて糸張力を均一化するという条件下での綜統枠数最小化問題に対する発見的解法を提案する。実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行い、性能を評価する。

第6章では、本論文の結論を述べる。

第2章 織物組織の数え上げ

前章で述べたように織物における糸の交差の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさをひとつの単位として、その繰り返しとなっており、ドビー織機で製織される織物では、たて糸8本、よこ糸8本からなるもの、たて糸16本、よこ糸16本からなるものなどがある。与えられたたて糸本数、よこ糸本数からなる織物組織を数え上げる研究はこれまでも多くなされている。しかし、織物組織数は、たて糸本数、よこ糸本数が増加すると急激に増加し、計算が複雑となるため、従来の研究で対象としている織物組織のたて糸本数とよこ糸本数の積の最大値は18（たて糸6本、よこ糸3本）である [10]。

本章では、たて糸4本、よこ糸4本からなる織物組織を対象に、普通綜統のみを使用した場合と長目綜統を併用した場合とで、製織可能な織物組織数を比較する。たて糸4本、よこ糸4本からなる織物組織から第1種等価組織を除外すると1,446通りの織物組織がある [2]。4枚の綜統枠を用いれば普通綜統のみを用いて1,446通り、すべての織物組織を製織することができる。そこで、3枚の綜統枠を用いた場合を考察の対象とする。まず、普通綜統のみを使用した場合の製織可能な織物組織を数える。次に、長目綜統を導入した場合の製織可能な織物組織を数える。それらを比較して、長目綜統を導入することにより製織可能な織物組織数が約2倍に増えることを示す。実際に製織される織物組織と比べると小規模ではあるが、長目綜統導入の効果を評価することができる。

2.1 製織可能な織物組織の数

たて糸4本、よこ糸4本の織物を製織する場合、必要綜統枠枚数は、2枚、3枚、4枚のいずれかである。綜統枠枚数が2枚であれば、長目綜統を使っても、1本のたて糸は、1つの綜統しか通せず、普通綜統と同様の使い方しかできない。綜統枠枚数が4枚であれば、普通綜統のみを使ってすべての織物組織を製織することが

できる．そこで，綜絢枠枚数が3枚の場合を考察の対象とする．つまり，普通綜絢を使った場合であれば4枚の綜絢枠が必要な織物組織の中で，長目綜絢を用いることにより，綜絢枠3枚で製織可能になる織物組織数を数える．

2.2 織物組織の数え方

織物組織数の数え方には，どのような織物組織を除外するかにより，さまざまな数え方ができる [10, 2, 11, 12, 13]．糸が交差しないため織物として成立しないものと，織物組織図を平行移動することで同一となる第一種等価組織を除外することは共通している．呉ら [11, 12] は，たて糸3本，よこ糸3本の織物組織に対して，表裏の関係にある織物組織を除外している．高寺ら [2] は，たて糸4本，よこ糸4本の織物組織を対象としている．よこ糸方向を x 軸，たて糸方向を y 軸，織物面に垂直な面を z 軸とすると， x 軸， y 軸， z 軸それぞれの軸まわりに180度回転して同一となるものは，除外している．Gu and Greenwood [13] は，たて糸2-5本，よこ糸2本の4通り，たて糸3-5本，よこ糸3本の3通りの計7通りの大きさの織物組織を対象としている． x 軸に対して対称， y 軸に対して対称， z 軸まわりに180度回転して同一となるもの，また，それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として，除外している．さらに，織物組織が，より小さな織物組織の繰り返しとなっているものを除外している．Dawson [10] は，たて糸2-8本，よこ糸2本の7通り，たて糸3-6本，よこ糸3本の4通り，たて糸4本，よこ糸4本の1通りの計12通りの大きさの織物組織を対象としている．Gu and Greenwood [13] の手法に加えて，たて糸本数とよこ糸本数が等しい場合には， z 軸まわりの90度回転，270度回転，2本の対角線に対して対称となる織物組織，また，それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として，除外している．さらに，織物組織が，より小さな織物組織の繰り返しとなっているものを除外している．

本章では，たて糸がよこ糸と，または，よこ糸がたて糸と交差しないため織物として成立しないものと第一種等価組織のみを除外する．糸が交差しないものを除外した，たて糸 E 本，よこ糸 F 本の織物組織数は，次式の N で表すことができる [13]．

$$N = (2^F - 2)^E + (2^E - 2)^F - 2^{EF} + A \quad (2.1)$$

$$A = 2 \sum_{Q=1}^{Q=E} \sum_{R=1}^{R=F} (-1)^{Q+R} \frac{E! F!}{Q! R! (E-Q)! (F-R)!} 2^{(E-Q)(F-R)} \quad (2.2)$$

A は交差しないたて糸と交差しないよこ糸の両方を含む場合の数である．この N から第一種等価組織を除外したものが本章で求める織物組織数である．式 (2.1) に $E = 4, F = 4$ を代入すると, $N = 22,874$ が得られ, 第一種等価組織を除外すると, $1,446$ となる [2] .

2.3 普通綜統のみを使用した場合

ここでは, 普通綜統のみを使用した場合に 3 枚の綜統枠で製織可能な織物組織の数を数える．紋栓図の種類と綜統通図の種類をそれぞれ数え, 紋栓図と綜統通図の組み合わせにより, 織物組織数を数えることとする．紋栓図を固定して考えると, 綜統通図の行方向の循環シフトは, 組織図の行方向の循環シフトとなり第一種等価組織となる．そのため, 綜統通図は, 行方向に環状であるとして数える．また, 綜統通図を固定して考えると, 紋栓図の列方向の循環シフトは, 組織図の列方向の循環シフトとなり, 第一種等価組織となる．そのため, 紋栓図も, 列方向に環状であるとして数える．また, 紋栓図に同じパターンの列が含まれる場合, 綜統通図との組み合わせによって得られる組織図は, 同一, または, 第一種等価組織となる．そのため, 同じパターンの列を含む紋栓図は除外する．以下では, 綜統枠 2 枚の場合と 3 枚の場合に分けて組織図の数を数える

2.3.1 綜統枠 2 枚の場合

まず, 綜統枠が 2 枚の場合の綜統通図の数を数える．第 1 綜統枠の綜統に通る糸は 1 本, 2 本, 3 本の場合が考えられる．行方向に循環シフトした綜統通図は等価であるとして除外すると, 第 1 綜統枠の綜統に通る糸が 1 本の場合は 1 通り, 2 本の場合は 2 通り, 3 本の場合は 1 通りであり, 図 2.1 に示す計 4 通りである．

次に紋栓図の数を数える．紋栓図において, すべての成分が 0 である行 (列) を 0 行 (0 列) と呼ぶ．すべての成分が 1 の行 (列) を 1 行 (1 列) と呼ぶ．よこ糸

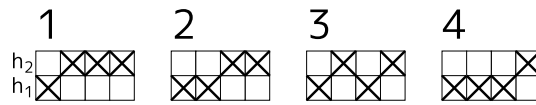


図 2.1: 4 通りの綜統通図

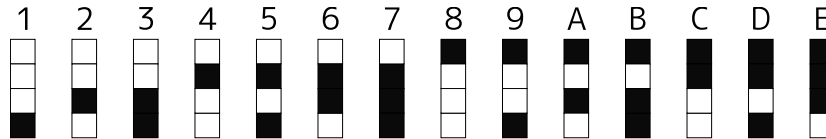


図 2.2: 14 通りの列

が通されるときに、すべての綜統枠が同じ位置にあることはないので、紋枠図は 0 行と 1 行を含まない。また、製織中にどの綜統枠も下がったまま、または上がったまま動かないということはないので紋枠図は 0 列と 1 列を含まない。また、列方向に循環シフトした紋枠図は等価であるとして除外する。綜統通図の行の順序を考慮することにより、紋枠図における列の順序の違いは吸収されるため、列の順序は考えない。紋枠図は 4 行 2 列の行列であり、可能な列は、図 2.2 に示す 14 通りである。これらから 2 列を選んで得られる紋枠図から等価なものを除外すると、図 2.3 に示す 3 通りが得られる。紋枠図の各列を、第 4 行目 (f_1) を最下位ビット、第 1 行目 (f_4) を最上位ビットとして、1 から 15 の値とみなす。16 進数の表記法と同様に、10 から 14 の値は A から E のアルファベットを用いると、ここでの紋枠図は 2 桁の英数字で表される。ただし、等価な紋枠図は最小の値で表すものとする。

上で数え上げた綜統通図と紋枠図を組み合わせ、組織図の種類を数える。一般には、1 つの紋枠図と 4 通りの綜統通図の組み合わせにより、4 通りの組織図が得られる。しかし、図 2.3 の 2 つの紋枠図 3C と 5A は、それぞれ第 1 列と第 2 列を入れ替えたものが、元の紋枠図を列方向に平行移動したものとなっている。そのため、第 1 行と第 2 行を入れ替えた綜統通図から得られる組織図は等価である。たとえば、図 2.1 に示す 4 通りの綜統通図の第 1 行と第 2 行を入れ替えたものを考えると、No.1 は No.4 と等価であり、No.2 と No.3 と等価な綜統通図はないため、3 通りの組織図が得られる。そのため、綜統枠が 2 枚で製織可能な織物組織は $2 \times 3 + 1 \times 4 = 10$ 通りとなる。

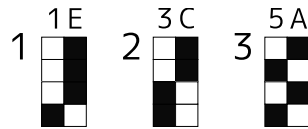


図 2.3: 3通りの紋枠図

2.3.2 綜統枠 3 枚の場合

ここでは、3枚の綜統枠で製織でき、かつ3枚の綜統枠で十分な織物組織を数える。まず、綜統枠が h_1, h_2, h_3 の3枚の場合の綜統通図の数を数える。綜統通図は行方向に環状で、行方向に循環シフトしたものは等価であると考える。4本のたて糸が3枚の綜統枠のうちのいずれかの綜統に通るので、2本のたて糸が、同じ綜統枠の綜統に通る。その綜統枠は h_1, h_2, h_3 の3通りである。 $h_i (i = 1, 2, 3)$ を固定すると、同じ数を2つ含む4つの数の順列と考えられる。また、行方向のシフトによる等価な綜統通図が4通りあるので、 $3 \times (4! / 2!) / 4 = 9$ となる。図 2.4 に9通りの綜統通図を示す。

次に、紋枠図の数を数える。綜統枠2枚の場合と同様に、0行(0列)と1行(1列)を含まないものを数える。また、列方向に循環シフトした紋枠図は等価であるとして除外する。また、綜統通図の行の順序を考慮することにより、紋枠図における列の順序の違いは吸収されるため、列の順序は考えない。紋枠図は4行3列の行列であり、可能な列は、図 2.2 に示す14個である。そこから相異なる3つの列を選んでできる紋枠図の集合を U とすると、 $|U| = {}_{14}C_3 = 364$ 通り。ここから、0行を含む紋枠図と1行を含む紋枠図を取り除く。0行を含む紋枠図の集合を X とし、1行を含む紋枠図の集合を Y とする。 i 行目がすべて0の紋枠図の集合を $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ とすると、 $|A_i| = {}_7C_3 = 35$ である。また、相異なる i, j, k に対して $|A_i \cap A_j| = 1$ かつ、 $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ である。よって0行を含む紋枠図の個数は、 $|X| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \sum |A_i \cap A_j| = 4 \times 35 - 6 = 134$ 。同様にして、1行を含む紋枠図の個数も $|Y| = 134$ である。次に、 $|X \cap Y|$ を計算する。0行と1行の決め方が ${}_4C_2 \times 2 = 12$ 通りある。残りの2行は4通り。よって、 $|X \cap Y| = {}_4C_2 \times 2 \times 4 = 48$ である。したがって、紋枠図の種類は、 $|U| - |X| - |Y| + |X \cap Y| = 364 - 134 - 134 + 48 = 144$ となる。

次に、列方向の循環シフトによる等価な紋枠図を削除する。上の144個の集合には、一般にひとつの紋枠図についてそれを列方向に循環シフトした4通りの等

価な紋柵図が含まれている。ただし、図 2.5 に示す 4 通りの紋柵図については、列方向に 2 回循環シフトすると、元の紋柵図の列を入れ替えたものと一致する。2 回の循環シフトで元の列と同一の列になるのは、図 2.2 の列 5 と列 A である。2 回の循環シフトで互いに入れ替わる列の対は (1,4), (3,C), (B,E) である。これらを組み合わせてできる紋柵図は図 2.5 の 4 通りのみである。そのため、これらの紋柵図については、列方向に循環シフトしてできる等価な紋柵図は 2 通りである。これらを考慮することにより、列方向の循環シフトによる等価な紋柵図を削除すると $(144 - 4 \times 2) / 4 + 4 = 38$ 通りとなる。図 2.6 に 38 通りの紋柵図を示す。綜統棒 2 枚の場合と同様に、紋柵図を 3 桁の英数字で表し、等価な紋柵図を最小の値で表した数を各紋柵図の上に示し、その昇順で示した。

一般には、1 つの紋柵図と 9 通りの綜統通図の組み合わせにより、9 通りの組織図が得られる。しかし、上で述べたように、図 2.6 の紋柵図 14A, 35C, 3AC, 5BE は、ある列を入れ替えたものが、元の紋柵図を列方向に 2 回循環シフトしたものとなっている。そのため、紋柵図において入れ替えた列に対応して綜統通図の行を入れ替えると、得られる組織図は等価である。たとえば、紋柵図 14A において、第 1 列と第 2 列を入れ替えたものは、元の紋柵図を列方向に 2 回循環シフトしたものに等しい。一方、図 2.4 に示す 9 通りの綜統通図の第 3 行と第 2 行を入れ替えると、No.1 は No.5 と、No.2 は No.4 と、No.3 は No.6 と、No.7 は No.8 と一致する。このような入れ替えで No.9 と一致する綜統通図はないため、5 通りの組織図が得られる。図 2.7 に紋柵図 14A と 9 通りの綜統通図を組み合わせることができる 9 通りの組織図を示す。上で述べたように、これらのうち、異なる組織図は 5 通りである。紋柵図 35C, 3AC では、第 1 列、第 3 列に関して同様であり、紋柵図 5BE では、第 2 列、第 3 列に関して同様である。そのため、組織図の数は $34 \times 9 + 4 \times 5 = 326$ となる。

綜統棒を 2 枚使用した場合と、3 枚使用した場合の織物組織数に重複はないため、綜統棒が 3 枚で製織可能な織物組織は $10 + 326 = 336$ 通りとなる。

2.4 長目綜統を使用した場合

綜統棒が 2 枚の場合は、長目綜統を導入しても製織可能な組織は増加しない。その理由は、1 本のたて糸を 2 本の綜統に通すと、そのたて糸は組織されない、つま

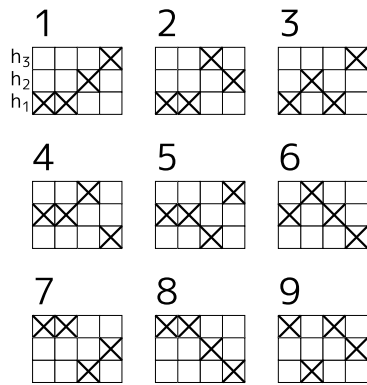


図 2.4: 9通りの綜統通図

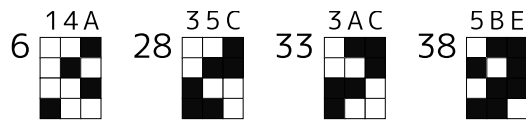


図 2.5: 4通りの紋栓図

り、どのよこ糸とも交差しないたて糸となるからである。したがって、綜統枠が3枚の場合のみを考える。この場合でも、長目綜統を使用して、1本のたて糸を3本の綜統に通すと、そのたて糸は組織されない糸となる。そのため、複数の綜統を通るのは、2本の綜統を通る場合のみを考えればよい。3本の綜統から2本を選ぶ選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通りであるため、4本のたて糸すべてが、2本の綜統を通るとすると、綜統の通し方が同じたて糸が存在する。よって、普通綜統を使用しても、綜統枠3枚で製織可能である。そのため、2本の綜統を通るたて糸の本数は1本、2本、3本の場合を考える。以降、2本の綜統を通るたて糸を2HLDたて糸と呼び、1本の綜統を通るたて糸を1HLDたて糸と呼ぶことにする。

普通綜統のみを使用した場合の紋栓図は、各列がたて糸の動きを表している。長目綜統を使用した場合は、2HLDたて糸の動きは、紋栓図の異なる2列の論理和で表すことができ、新たなたて糸の動きとなる。しかし、この2列のとり方によっては、そのたて糸が組織されない場合や、新たなたて糸の動きとならない場合がある。また、2HLDたて糸が2本以上の場合には、組織されないよこ糸が現れる場合もある。これらを考慮して、2HLDたて糸が通る綜統を決める必要がある。

以下では、2HLDたて糸の本数が1本、2本、3本のそれぞれの場合において、2列の論理和で表わされる列も含めて4行4列の紋栓図を考える。その4列を並べて組織図がつくられる。組織図は行方向へ循環シフトしたものは、すべて等価であ

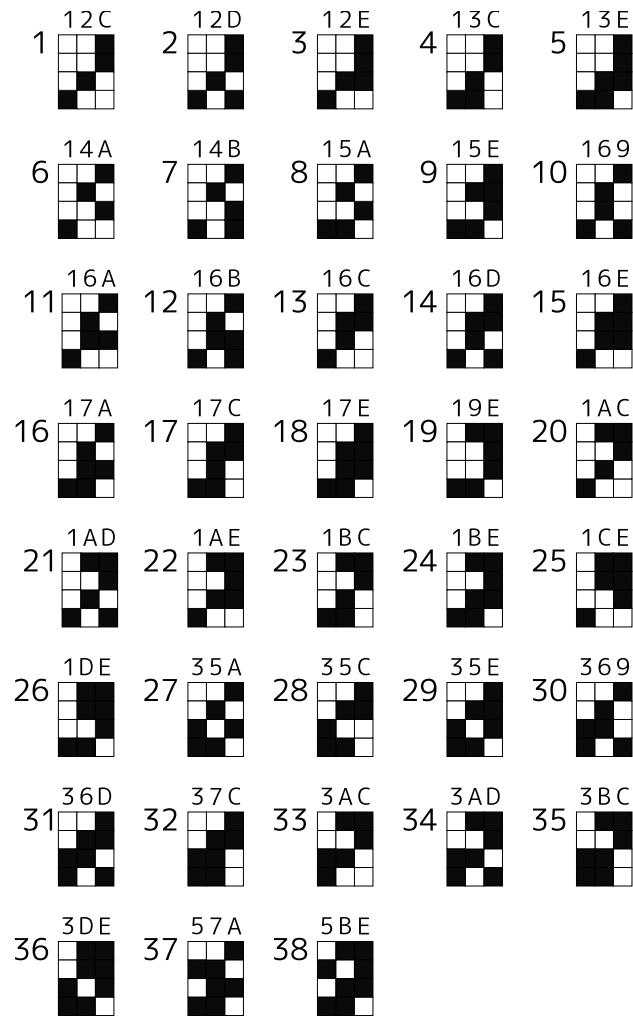


図 2.6: 38通りの紋柱図

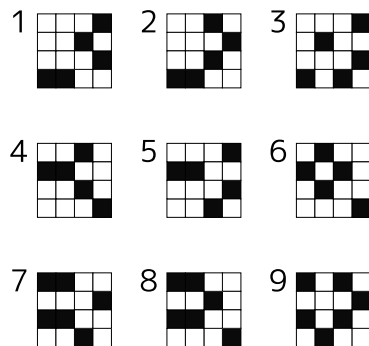


図 2.7: 9通りの組織図

るので、この4列の並べ方は、すべてが異なる4つのものからなる円順列の種類と同じで、 $4!/4 = 6$ 通りである。紋栓図の条件は、長目綜統を使用しても普通綜統を使用した場合と同じであるため、図2.6の38通りの紋栓図を基にして考えることができる。この紋栓図の数を数えることにより、織物組織数を数える。

2.4.1 2HLD たて糸が1本の場合

2HLD たて糸を w_1 とし、他のたて糸を w_2, w_3, w_4 とする。 w_2, w_3, w_4 はすべて異なる綜統枠の綜統に通る。なぜなら、同じ綜統枠の綜統に通る糸が存在すれば、その組織は、普通綜統を用いても、綜統枠3枚で製織可能だからである。

図2.6の紋栓図を基に、 w_1 が通る2本の綜統を変えながら、条件を満たす紋栓図を数え上げたところ、図2.8に示すように38通りの紋栓図が得られた。図2.8で、各たて糸の動きの左側の3列が3本の1HLD たて糸の動きであり、右側の1列が、1本の2HLD たて糸の動きである。なお、紋栓図14Aの第1列と第3列を選んだ場合と、第2列と第3列を選んだ場合の4本のたて糸の動きは等価である。つまり、一方の紋栓図からできる組織図と等価な組織図を、もう一方の紋栓図からつくることができる。紋栓図35Cは第1列と第2列、第2列と第3列、紋栓図3ACは第1列と第2列、第2列と第3列に関して同様である。一般には、図2.8に示す紋栓図ひとつに対し、6通りの組織図が得られる。唯一の例外は、紋栓図14Aの第1列と第2列を選んだ場合(図2.8 No.7)である。図2.8 No.7において、第1列と第2列を入れ替えたものが、元の紋栓図を列方向に2回循環シフトしたものとなっている。そのため、それらの列を入れ替えた組織図は等価であり、6通りの列の並べ方から3通りの組織図しか得られない。そのため、2HLD たて糸が1本の場合の組織図は、 $37 \times 6 + 3 = 225$ 通りとなる。

2.4.2 2HLD たて糸が2本の場合

2HLD たて糸を w_1, w_2 とし、1HLD たて糸を w_3, w_4 とする。 w_1 と w_2 の綜統への通し方は異なるものとする。 w_1 と w_2 が共に通っている綜統と同じ綜統枠の綜統に w_3, w_4 のいずれかが通ることはない。なぜなら、その組織図は、2HLD たて糸が1本の綜統通図で製織することができるからである。図2.9に例を示す。よっ

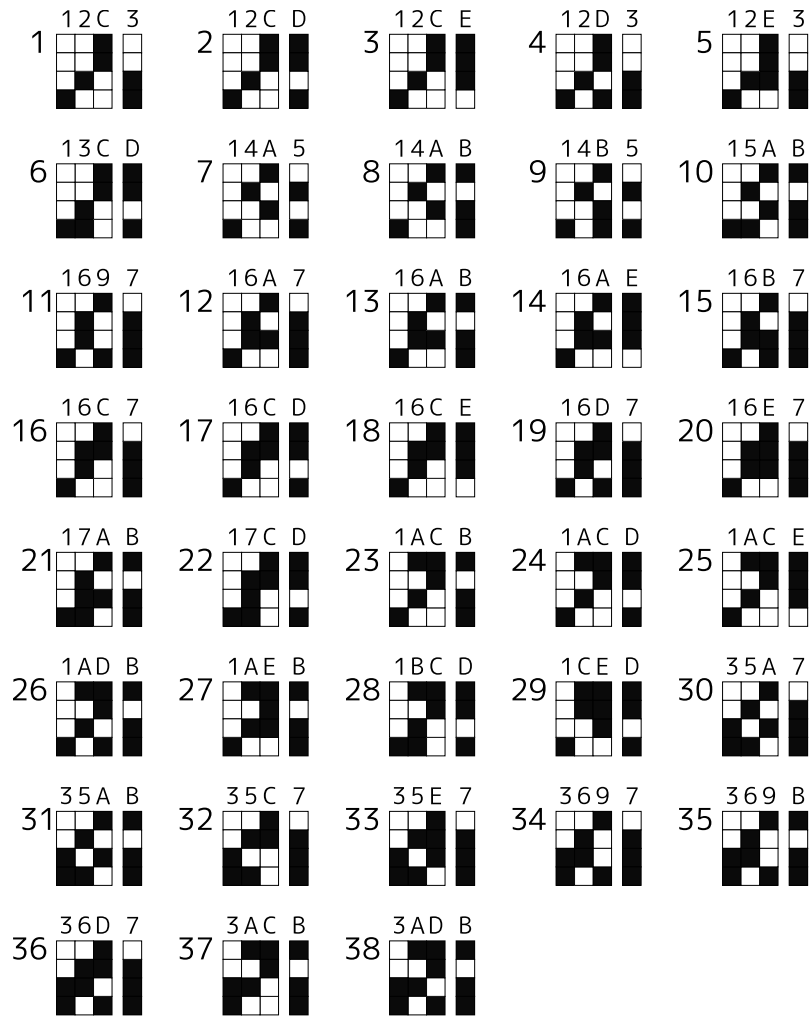


図 2.8: たて糸の動きの組合せ 38 通り

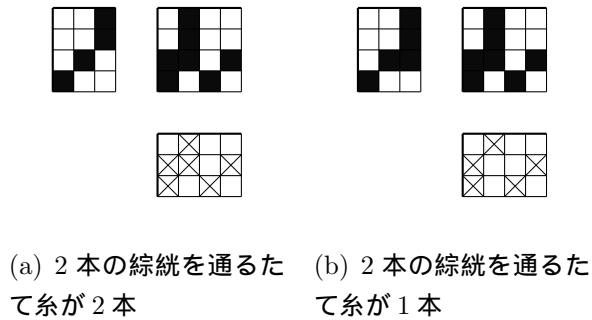


図 2.9: 同じ組織図

て、この場合、 w_1 と w_2 の綜統への通し方が決まれば、 w_3 と w_4 の綜統への通し方は2通りに定まる。

図 2.6 の紋栓図を基に、 w_1 、 w_2 が共に通る1本の綜統を変えながら、条件を満たす紋栓図を数え上げたところ、15通りの紋栓図が得られた。これを図 2.10 に示す（左側の2列が2本の1HLD たて糸の動きであり、右側の2列が、2本の2HLD たて糸の動きである）。なお、紋栓図 14A の第1列と第3列を選んだ場合の4本のたて糸の動きと、紋栓図 14A の第2列と第3列を選んだ場合の4本のたて糸の動きは等価である。

一般には、1つの紋栓図を選べば、6通りの組織図が得られる。例外は、3つの紋栓図 14A、35C、3AC である。紋栓図 14A の紋栓図の第1列と第2列を選んだ場合が図 2.10 の No.4 である。この図において、第1列と第2列を入れ替え、第3列と第4列を入れ替えたものが、元の紋栓図を列方向に2回循環シフトしたものとなっている。そのため、それらの列を入れ替えた組織図は等価であり、6通りの列の並べ方から4通りの組織図しか得られない。紋栓図 35C の第1列、第3列を選んだ場合、紋栓図 3AC の第1列、第3列を選んだ場合も同様である。そのため、2HLD たて糸が2本の場合の組織図は、 $12 \times 6 + 3 \times 4 = 84$ 通りとなる。

2.4.3 2HLD たて糸が3本の場合

2HLD たて糸を w_1 、 w_2 、 w_3 とし、1HLD たて糸を w_4 とする。 w_1 、 w_2 、 w_3 の綜統への糸の通し方はすべて異なる。

図 2.6 の紋栓図を基に、 w_4 が通る1本の綜統を変えながら、条件を満たす紋栓図を数え上げたところ図 2.11 に示す8通りの紋栓図が得られた（左側の1列が1本

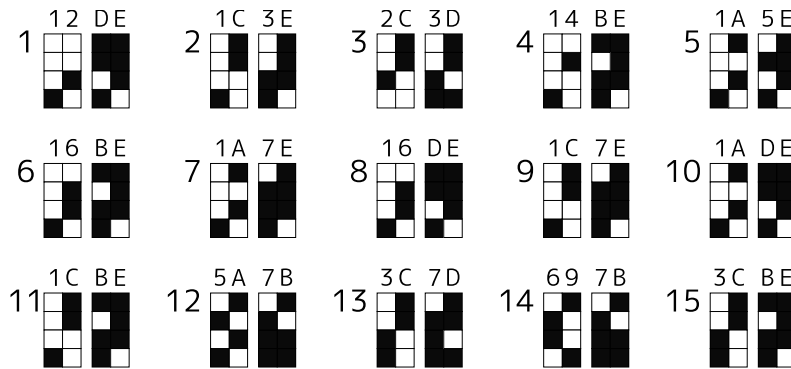


図 2.10: たて糸の動きの組合せ 15 通り

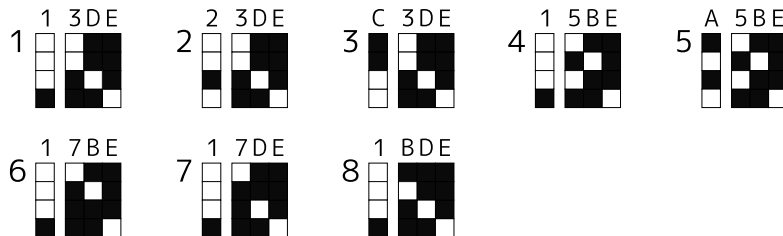


図 2.11: たて糸の動きの組合せ 8 通り

の 1HLD たて糸の動きであり、右側の 3 列が、3 本の 2HLD たて糸の動きである。) なお、紋柵図 14A の第 1 列を選んだ場合の 4 本のたて糸の動きと、紋柵図 14A の第 2 列を選んだ場合の 4 本のたて糸の動きは等価である。

一般には、1 つの紋柵図を選べば、6 通りの組織図が得られる。唯一の例外は、紋柵図 14A の第 3 列を選んだ場合 (図 2.11 No.5) である。図 2.11 No.5 において、第 3 列と第 4 列を入れ替えたものが、元の紋柵図を列方向に 2 回循環シフトしたものとなっている。そのため、それらの列を入れ替えた組織図は等価であり、6 通りの列の並べ方から 3 通りの組織図しか得られない。2HD たて糸が 3 本の場合の組織図は、 $7 \times 6 + 3 = 45$ となる。

以上より、普通綜統を使った場合には 4 枚の綜統枠が必要であるが、長目綜統を導入すれば 3 枚の綜統枠で製織可能な織物組織は $225 + 84 + 45 = 354$ である。

2.5 まとめ

たて糸 4 本、よこ糸 4 本からなる織物組織では、第一種等価組織を除くと 1,446 通りの織物組織が存在する。4 枚の綜統枠があれば、これらすべてを製織できるが、

3枚の綜統枠で普通綜統のみを使う場合に製織可能な織物組織は、この中の336通りである。長目綜統を導入することで、綜統枠3枚のときに新たに製織可能となる織物組織は354通りであり、綜統枠3枚で製織可能な織物組織は336通りから690通りに増加する。つまり、普通綜統のみを使う場合と比較すると、製織可能な織物組織が約2倍に増えることが分かった。

第3章 綜統枠数最小化問題

第1章で述べたように，組織図が与えられたとき，長目綜統を導入したドビー織機によりその織物を製織するのに必要な最小の綜統枠の数を求める問題を綜統枠数最小化問題と呼ぶ．本章では，綜統枠数最小化問題に対する発見的アルゴリズムを提案する．まず，必要な最小綜統枠枚数が，織物組織図をブール行列とみなしたときのブール階数であることを示す．次に，行列のブール階数を求める問題が，2部グラフの2部クリーク被覆問題に変換できることを示す．さらに，2部クリーク被覆問題がグラフ彩色問題に変換できることを示す．グラフ彩色問題は代表的な組合せ最適化問題であり，多くの発見的アルゴリズムが提案されている．これらのアルゴリズムを適用することで，綜統枠数を最小化するアルゴリズムを得ることができる．実際に製織されている織物組織図に対して実験を行い普通綜統のみを使用する場合と比較して必要綜統枠枚数を大幅に減らせる組織図があることを示す．

3.1 ブール階数

A を m 行 n 列のブール行列とする． A のブール階数 (Boolean rank) とは， A を m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C のブール積 $A = BC$ として表現することができる最小の r のことをいう．ブール階数はシャイン階数 (Schein rank) とも呼ばれる [14]．以下では，ブール階数を単に階数と呼ぶ．列ベクトルの集合 S があり，行列 A の任意の列を S の列ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする．そのような S の最小サイズが A の階数であると考えられる． B に現れる各列が S の要素である．同様に，行ベクトルの集合 S' があり，行列 A の任意の行を S' の行ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする．そのような S' の最小サイズが A の階数であるともできる． C に現れる各行が S' の要素である．

綜続枠数最小化問題は、ブール行列 W をブール行列 P と T の積で表したときの P の列数 (= T の行数 = 綜続枠数) を最小化する問題である。したがって、綜続枠数最小化問題を解くには組織図 W の階数を求めればよいことになる。

ブール行列の階数を求める問題は NP 困難であり [15]、厳密解を求めるための多項式時間アルゴリズムは未だ見つかっておらず、今後も望むことは難しい。そのため発見的アルゴリズムや近似アルゴリズムを使うのが実際的である。

3.2 2部クリーク被覆問題

グラフ $G = (V, E)$ のクリークとは、頂点集合 V の部分集合 $V_S \subset V$ を頂点集合とする部分グラフで、 V_S の任意の2頂点が隣接しているものをいう。グラフ $G = (V, E)$ が2部グラフであるとは、頂点集合 V が2つの集合 X, Y に分割され、 E の各辺は一方の端点を X に、他方の端点を Y にもっているときをいう。このような2部グラフを $B = (X, Y, E)$ と表記する。2部グラフ $B = (X, Y, E)$ において、 X の部分集合 $X_S = \{x_1, \dots, x_p\}$ と Y の部分集合 $Y_S = \{y_1, \dots, y_q\}$ を頂点集合とする部分グラフ $B' = (X_S, Y_S, E_S)$ で、任意の2頂点 $x_i \in X_S, y_j \in Y_S$ が隣接しているものを2部クリークという。以降、グラフが2部グラフの場合にクリークと言えば、2部クリークのことを指す。また、 B の部分グラフ $B'' = (X, Y, E_S)$ を B' と同一視して、2部クリークと呼ぶこともある。2部グラフ B のクリーク被覆とは、 B の2部クリークの集合 C で、 B のどの辺も C の少なくとも1つの2部クリークに含まれているものをいう。2部クリーク被覆問題とは、与えられた2部グラフ B に対し最小サイズのクリーク被覆 C を求める問題である。なお、本論文で扱うグラフは単純グラフに限る。

3.3 発見的アルゴリズムの提案

本節では、ブール行列の階数を求める問題が、代表的な組合せ最適化問題であるグラフ彩色問題に変換されることを示す。グラフ彩色問題に関しては多くの発見的アルゴリズムが提案されており、それらを用いてブール行列の階数を求めることができる。

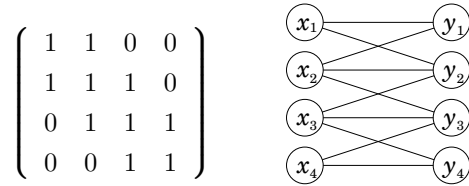


図 3.1: ブール行列 W と対応する 2 部グラフ B_W

3.3.1 グラフ彩色問題への変換

ブール階数を求める問題から 2 部クリーク被覆問題への変換

ブール行列の階数を求める問題は、2 部クリーク被覆問題と等価である [15] . 行列 W から 2 部グラフへの変換は次のように行う . m 行 n 列のブール行列 W から、 m 個の頂点からなる頂点集合 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ と、 n 個の頂点からなる頂点集合 $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ を作る . $W_{i,j}$ が 1 のとき、そしてそのときだけ、2 部グラフの頂点 x_i と頂点 y_j を辺で結ぶ . こうしてできた 2 部グラフを B_W とする . 図 3.1 に例を示す . この例で行列 W のブール階数は 3 である . また、 B_W は 3 個の 2 部クリークで被覆できる .

定理 3.1. ブール行列 W のブール階数は、2 部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズに等しい .

この定理を証明するために、まず、次の補題 3.1 と補題 3.2 を示す . なお、この証明において記号 \sum および $+$ は論理和を表す .

補題 3.1. m 行 n 列のブール行列 W , m 行 r 列のブール行列 P , r 行 n 列のブール行列 T がある . このとき、 $W = PT$ ならば $W = \sum_{k=1}^r P_{*k} T_{k*}$ であり、逆に、 $W = \sum_{k=1}^r P_{*k} T_{k*}$ であるなら $W = PT$ である .

【補題 3.1 の証明】 $(PT)_{i,j} = (\sum_{k=1}^r P_{*k} T_{k*})_{i,j}$ であることを証明する . 左辺 = $\sum_{k=1}^r P_{i,k} T_{k,j} = P_{i,1} T_{1,j} + \dots + P_{i,r} T_{r,j}$ なので、左辺=1 となるとき、ある s ($1 \leq s \leq r$) が存在して、 $P_{i,s} T_{s,j} = 1$ である . よって、 $P_{i,s} = T_{s,j} = 1$ であり、これより、 $(P_{*s} T_{s*})_{i,j} = 1$ である . 右辺 = $(P_{*1} T_{1*} + \dots + P_{*r} T_{r*})_{i,j}$ であるので、 $(P_{*s} T_{s*})_{i,j} = 1$ より、右辺=1 である .

逆に、右辺=1 とする . このとき、ある t ($1 \leq t \leq r$) が存在して、 $(P_{*t} T_{t*})_{i,j} = 1$ である . これより、 $P_{i,t} = 1$ かつ $T_{t,j} = 1$ であるので、左辺=1 となる . ■

m 行 1 列の行列 $A = (a_1, \dots, a_m)^T$ と 1 行 n 列の行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ の積 AB をクロスベクトルと呼ぶ。クロスベクトル AB を $c(A, B)$ と書く。つまり、 $c(A, B)$ は (i, j) 成分を $a_i b_j$ とする m 行 n 列の行列である。補題 3.1 より、 W のブル階数は W を最小数のクロスベクトルの論理和で表したときのクロスベクトルの数に一致する。

二つの行列 A, B の行数、列数がともに等しく、かつ、すべての (i, j) 成分について $A_{i,j} \leq B_{i,j}$ が成り立つ場合に $A \leq B$ と表す。

補題 3.2. $M \leq W$ で、かつ階数が 1 であるブル行列 M を変換した B_M は 2 部グラフ B_W の 2 部クリークである。逆に、 B_W の 2 部クリーク B_C に対応するブル行列 $C \leq W$ を考えると、その階数は 1 である。

【補題 3.2 の証明】 $M \leq W$ で、かつ階数が 1 である行列 M を考える。階数の定義から M は m 行 1 列の行列 $A = (a_1, \dots, a_m)^T$ と 1 行 n 列の行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ の積で表される。 $R = \{i \mid a_i = 1, 1 \leq i \leq m\}$, $C = \{j \mid b_j = 1, 1 \leq j \leq n\}$ とすると、 $M_{i,j} (i \in R, j \in C)$ はすべて 1 であるため、 M から変換した 2 部グラフ B_M は B_W の 2 部クリークとなっている。

B_W の 2 部クリーク $H = (X', Y', E')$ を考える。 $B_C = (X, Y, E')$ とすると、任意の 2 頂点 $x_i \in X', y_j \in Y'$ は隣接しているため、変換して B_C になるようなブル行列 $C \leq W$ では、 $\{C_{i,j} \mid x_i \in X', y_j \in Y'\}$ の成分はすべて 1 である。そのため、 C の列にはすべての成分が 0 である列を除くと、1 通りのパターンしか存在しない。この列を A とする。同様に、 C の行にはすべての成分が 0 である行を除くと、1 通りのパターンしか存在しない。この行を B とすると、 $C = c(A, B)$ と表すことができる。つまり、 $C \leq W$ で、かつ階数が 1 である。■

【定理 3.1 の証明】 ブル行列 W の階数を r とし、2 部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズを b とする。階数の定義から m 行 n 列のブル行列 W は m 行 r 列のブル行列 P と r 行 n 列のブル行列 T の積で $W = PT$ と表すことができる。よって、補題 3.1 より $W = \sum_{i=1}^r P_{*i} T_{i*}$ と表すことができる。階数の定義からクロスベクトル $P_{*i} T_{i*}$ の階数は 1 である。これらの r 個のクロスベクトルに対応する r 個の 2 部グラフを考える。補題 3.2 より階数が 1 である行列は B_W では 2 部クリークに対応する。よって、 B_W のすべての辺は r 個の 2 部クリークで被覆できることになり、 $b \leq r$ が成り立つ。

$\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B_W における最小クリーク被覆とする．補題 3.2 より, B_W の 2 部クリーク Q_i に対応するブール行列 $M_{Q_i} \leq W$ は階数が 1 である．階数の定義から, M_{Q_i} はクロスベクトルで $M_{Q_i} = c(A_i, B_i)$ と表すことができるので, W は b 個のクロスベクトルの和 $W = \sum_{i=1}^b c(A_i, B_i)$ で表すことができる．よって, 補題 3.1 より AB と表すことができる．ただし, A は列ベクトル A_1, \dots, A_b をこの順に並べた n 行 b 列の行列, B は行ベクトル B_1, \dots, B_b をこの順に並べた b 行 m 列の行列である．よって, $r \leq b$ である．以上から $r = b$ となる．■

2 部クリーク被覆問題からクリーク分割問題への変換

グラフ G のクリーク分割とは, G のクリークの集合 \mathcal{C} で, G のどの頂点も \mathcal{C} のちょうど 1 つのクリークに含まれているものをいう．最小クリーク分割問題とは, 与えられたグラフ G に対して最小サイズのクリーク分割 \mathcal{C} を求める問題である [16] .

2 部グラフ $B_W = (X, Y, E)$ からグラフ $G_B = (V_B, E_B)$ への変換を次のように行う [17] . B_W の辺 e_i を G_B の頂点とみなす．つまり $V_B = E$ とし, B_W において異なる 2 つの辺 e_i, e_j を含む 2 部クリークが存在するとき, そして, そのときだけ G_B において頂点 e_i と頂点 e_j を隣接させる．図 3.2 に例を示す．たとえば, B_W において e_1 と e_2 の端点である x_1, y_1, y_2 の 3 つの頂点で誘導される部分グラフは e_1 と e_2 を含む 2 部クリークである．そのため, G_B において e_1 と e_2 が隣接する．このとき, 次の定理が成立する．

定理 3.2. 2 部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズは, グラフ G_B の最小クリーク分割のサイズに等しい．

この定理を証明するために, まず, 次の補題 3.3 を示す．

補題 3.3. C を G_B の極大クリークとし, その頂点集合を V_C とする．これに対応する B_W の辺集合を E_C とする．このとき, B_W の辺集合 E_C のすべての辺はひとつの 2 部クリークをなす．

【補題 3.3 の証明】 E_C が 2 部クリークになっていないとする． B_W において, 辺集合 E_C の端点の集合を $X_{E_C} \subset X$ と $Y_{E_C} \subset Y$ とする．いま, 2 頂点 $x \in X_{E_C}$, $y \in Y_{E_C}$ の間に辺がないとする． $x \in X_{E_C}$ なので, x に接続する辺 $e_1 \in E_C$ が存在する．同様に, y に接続する辺 $e_2 \in E_C$ が存在する． e_1 と e_2 に対応する G_B の 2 頂

点は C に属するので隣接している．よって， B_W において e_1 と e_2 はひとつの 2 部クリークに含まれ， x と y は隣接していなければならない．つまり，辺 $(x, y) \in E$ である．この議論より， B_W において X_{E_C} の頂点と Y_{E_C} の頂点の間にはすべて辺が存在する．この辺集合を E'_C とすると $E_C \subset E'_C$ である． G_B の構成法より， E'_C に対応する G_B の頂点はクリークをなし， C を真に含む．これは C が極大であることに反する．よって， B_W の辺集合 E_C に含まれるすべての辺はひとつの 2 部クリークをなす．■

【定理 3.2 の証明】2 部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズを b ，グラフ G_B の最小クリーク分割のサイズを p とする．

$Q = (X_Q, Y_Q, E_Q)$ を B_W における 2 部クリークとする． G_B の構成法より， G_B において E_Q に対応する頂点の集合で誘導される部分グラフ G_Q はクリークである． $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B_W における最小 2 部クリーク被覆とする． Q_i に対応する G_B のクリークを G_{Q_i} として， \mathcal{Q} に対応する G_B のクリーク集合を $\mathcal{C} = \{G_{Q_1}, \dots, G_{Q_b}\}$ とする． B_W の任意の辺は \mathcal{Q} の少なくともひとつの 2 部クリーク Q_i に含まれているため， G_B の任意の頂点は \mathcal{C} の少なくともひとつのクリーク G_{Q_i} に含まれている． G_B において複数のクリークに含まれる頂点が存在する場合には，その頂点がただひとつのクリークに含まれるようにする．クリークから頂点を除去しても残りのグラフはやはりクリークなので，このようにして G_B におけるクリーク分割 $\{G'_{Q_1}, \dots, G'_{Q_b}\}$ をつくることができる．そのため， $p \leq b$ が成り立つ．

次に， $p \geq b$ を示す． $\{C_1, \dots, C_p\}$ を G_B の最小クリーク分割とする．各クリーク C_i に対し，それを含む極大クリーク C'_i を考えることで， $\{C_1, \dots, C_p\}$ に対応して，極大クリークによる頂点被覆 $\{C'_1, \dots, C'_p\}$ が存在する．補題 3.3 より， $\{C'_1, \dots, C'_p\}$ に対応して， B において 2 部クリーク被覆 $\{B_{G_1}, \dots, B_{G_p}\}$ が存在し， $b \leq p$ が成り立つ．以上から $b = p$ が成立する．■

クリーク分割問題からグラフ彩色問題への変換

グラフ G の彩色とは，隣接する頂点に異なる色を割り当てるという条件で，すべての頂点に色を割り当ててをいう．グラフ彩色問題とは与えられたグラフ G を最小の色数で彩色する問題である [16]．そのときの色数を G の彩色数と呼び $\chi(G)$ で表す．グラフの頂点集合の部分集合で，任意の 2 頂点が隣接していないものを安定集合と呼ぶ．グラフ $G = (V, E)$ の補グラフとは，辺の集合として E に含ま

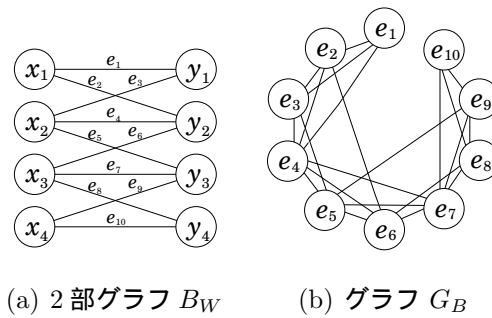


図 3.2: 2部グラフ B_W と対応するグラフ G_B

れていない辺全体の集合 $E^C (= V \times V - E)$ をもつグラフ $\bar{G} = (V, E^C)$ である。グラフ G の補グラフ \bar{G} の補グラフを考えると、それは G である。グラフ $G = (V, E)$ においてクリークを構成する頂点集合 $V' \subset V$ は、補グラフ \bar{G} においては安定集合となる。逆に G の安定集合は補グラフ \bar{G} ではクリークを構成する。安定集合はグラフ彩色において同じ色を割り当てる頂点集合となることができる。これらのことから、グラフ G の最小クリーク分割のサイズは補グラフ \bar{G} の彩色数 $\chi(\bar{G})$ に等しい。

グラフ彩色アルゴリズム

グラフ彩色問題はブール行列の階数を求める問題と同じく NP 困難であり、規模の大きな問題例に対して常に実用的な時間で厳密解を求めるアルゴリズムは未だ見つかっていない。提案されている発見的アルゴリズムの主なものとしては LF 法、LFI 法 [18]、RLF 法 [19]、DSATUR 法 [20]、DSI 法 [20] などがある。

LF 法は次数の降順に、頂点に対して割り当て可能な最小の色番号を割り当てるアルゴリズムである。LF 法に交換法 [18] を組み込んだのが LFI 法である。交換法とは、新しい色番号を導入する必要がある場合に、既に色番号を割り当てた頂点の色番号を交換し、新たな色番号の導入を遅らせる方法である。

RLF 法は次のようなアルゴリズムである。はじめに次数が最大である頂点に色番号 1 を割り当てる。さらに、ある基準で選んだ頂点に色番号 1 を割り当てる。これを繰り返し、色番号 1 を割り当てることができる頂点がなくなったら、彩色済みの頂点と、それに接続する辺を除去し、残りのグラフに対して色番号 2 で同様の処理を行う。すべての頂点が彩色されるまで、色番号を増加させてこの操作を

繰り返す．

頂点 v の飽和次数とは，彩色アルゴリズムの実行過程において， v に隣接し，かつ既に彩色された頂点において割り当てられた色番号の種類をいう．DSATUR 法は，彩色されていない頂点の中で飽和次数が最大の頂点に，割り当て可能な最小の色番号を割り当てる．DSATUR 法に交換法を組み込んだのが DSI 法である．

これらのアルゴリズムを実装して実験を行なったところ，得られた彩色可能数の平均が最も小さいアルゴリズムは DSI 法であった．そこで 3.4 節で述べる実験には DSI 法を用いた．

グラフ彩色問題の解からブール行列 P, T を求める方法は次のとおりである．グラフ彩色アルゴリズムにより同じ色番号を割り当てられた頂点集合は，2部クリーク被覆問題のひとつの 2部クリークをなす辺集合に対応する．2部クリーク被覆の各 2部クリークに対応させて，階数が 1 であるブール行列を作ることができる．これにより，グラフ彩色問題において r 色で彩色可能な解が得られれば， m 行 n 列のブール行列 W を， m 行 r 列のブール行列 P と r 行 n 列のブール行列 T の積で表すことができる．

3.4 実験

実験の対象とした織物組織は，実際にドビー織機で製織されているものを網羅的に集めた 747 種類の織物組織である [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]．このうち，長目綜統導入の効果がないことが明らかなものは除外し，さらに第一種等価組織を除いた．こうして得られた 706 種類を対象に実験を行った．これらの織物組織のたて糸本数，よこ糸本数の分布を図 3.3 に示す．普通綜統のみを使用する場合，与えられた組織図の列数と等しい綜統枠枚数があれば，その組織を製織することが可能であるが，組織図の中に同じ列パターンが複数含まれているときには，綜統枠の枚数を減らすことができる．つまり，同じ列パターンに対応するたて糸は同じ綜統枠で制御できるので，組織図の中の異なる列パターンの数の綜統枠で製織することができる．

DSI 法は発見的アルゴリズムであるため，必要綜統枠枚数の最小値が得られる保証はない．そこで，組織図の異なる列パターンの数と，DSI 法を用いて求めた彩色可能数を比較し，小さい方を採用し織方図を作成した．

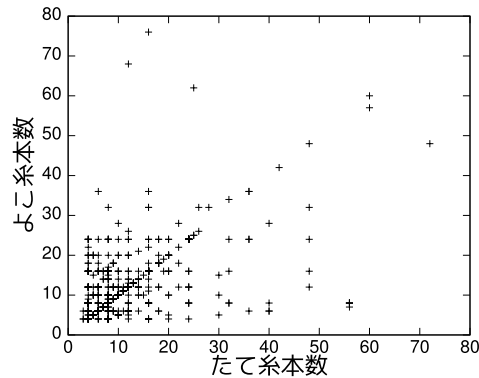


図 3.3: たて糸本数とよこ糸本数の分布

表 3.1: 製織可能な織物組織数

綜統枠枚数	織物組織数	
	普通綜統のみ	長目綜統導入
8	474	539
16	691	696
24	706	706

3.4.1 実験結果

織機が装着している綜統枠枚数毎の製織可能な織物組織数を表 3.1 に示す．表 3.1 より 706 種類の織物組織のうち，8 枚の綜統枠が装着された織機で普通綜統のみを使用する場合には製織可能なものは 474 種類である．しかし，長目綜統を導入することにより製織可能なものが 539 種類に増加する．また，16 枚の綜統枠が装着された織機であれば製織可能なものは 691 種類から 696 種類に増加し，長目綜統導入の効果を確認することができた．表 3.2 では，普通綜統のみを使用する場合の必要綜統枠枚数により，706 種類の織物組織を 4 つのグループに分けた．そして，各グループで長目綜統を導入した場合の必要綜統枠枚数を，普通綜統のみを使用した場合と比較した．各グループの，長目綜統の導入による必要綜統枠の平均減少枚数を D_{AVG} で表す．また，必要綜統枠枚数を減少させることができた織物組織数を N_{DEC} で表す．表 3.2 から，普通綜統のみ使用時の必要綜統枠枚数が増加するにつれて，綜統枠枚数を減らすことができた織物組織の割合が概ね増加することがわかる．つまり，多くの綜統枠枚数が必要である複雑な組織ほど，長目綜統導入の効果が大きい．

表 3.2: 必要綜統枠の減少枚数

綜統枠枚数	織物組織数	綜統枠枚数 (長目綜統導入)	D_{AVG}	N_{DEC}
4-8	474	3-8	0.53	137
9-12	148	4-12	1.61	86
13-16	69	7-16	2.43	40
17-24	15	11-24	2.20	8

製織工場で使われているドビー式織機で 24 枚の綜統枠が装着されているものはまれで、8 枚または 16 枚の綜統枠が装着されたものが多い。16 枚を超える綜統枠枚数が必要な場合には、ジャカード式織機が用いられることもある。そこで、普通綜統のみ使用時に必要綜統枠枚数が 17 枚以上であった 15 種類の組織図に対する実験結果について検討する。必要綜統枠枚数を減少させることができたのは、このうち 8 種類で、それらについて普通綜統のみを使用した場合の織方図と、長目綜統を導入した場合の織方図を図 3.4-図 3.7 に示す。組織図の列数 p 、組織図の異なる列パターンの数 q 、提案アルゴリズムにより得られた必要綜統枠枚数 r を図のキャプション中に $(p \rightarrow q \rightarrow r)$ の形で表記した、15 種類の組織図のうち、必要綜統枠枚数を減少させることができなかったのは 7 種類で、それらの組織図を図 3.8 に示す。

3.4.2 考察

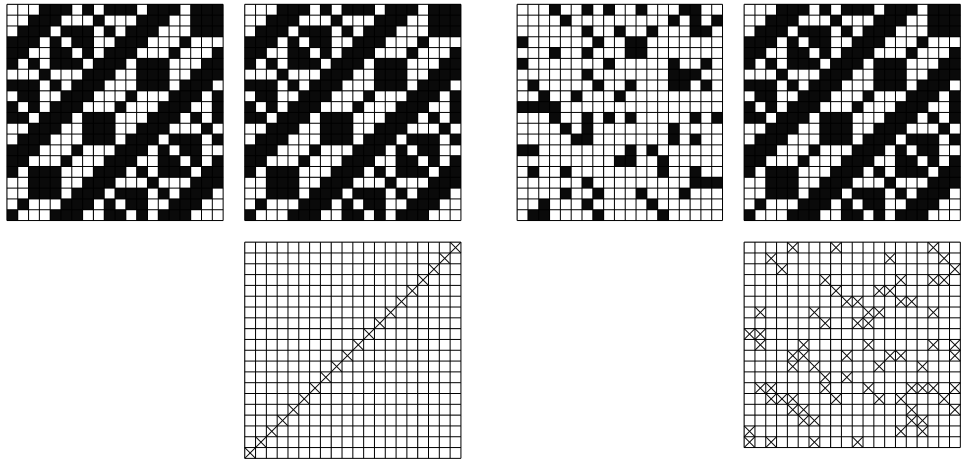
図 3.4(b) の組織のよこ糸本数は 9 本である。 P を単位行列、 T を W と同一にすることで $W = PT$ の関係が成り立ち、9 枚の綜統枠で製織可能である。しかし、提案アルゴリズムでは、そのような解を見つけることができなかった。それは、使用したグラフ彩色アルゴリズムが発見的アルゴリズムであり、必ずしも最適解を見つけられないためである。より性能の良いグラフ彩色アルゴリズムを使うことでこのようなことは、起こりにくくなると考えられる。

綜統枠枚数を減らすことができなかった図 3.8(a) と、2 枚だけ減らすことができた図 3.7(a) は共に、組織のすべての列が、ある列パターンを列方向に循環シフトしたパターンである。これは、行に関しても同様である。与えられた組織が長目綜統を導入することで、綜統枠枚数を減らすことができない、または、大きく減

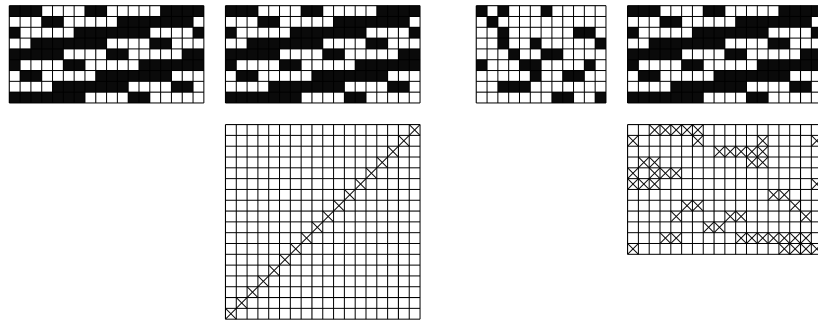
らすことができないのは，組織のこのような性質と深く関係していると考えられる．但し，1.5 節で紹介した朱子織 [7] のように，組織のすべての列が，ある列パターンを循環シフトしたパターンであっても大幅に必要綜統枠数を減らせる例もあるので問題は複雑である．

3.5 まとめ

本章では，綜統枠数最小化問題に対するアルゴリズムを提案した．まず，長目綜統を導入したときに必要な最小綜統枠枚数が，組織図に対応するブール行列のブール階数であることを示した．次に，ブール階数を求める問題がグラフ彩色問題に変換でき，グラフ彩色問題の解から織方図を求めることができることを示した．実際に織物として生産されている組織に対して実験を行い，必要綜統枠枚数を大きく減らせる組織図があることを確認した．

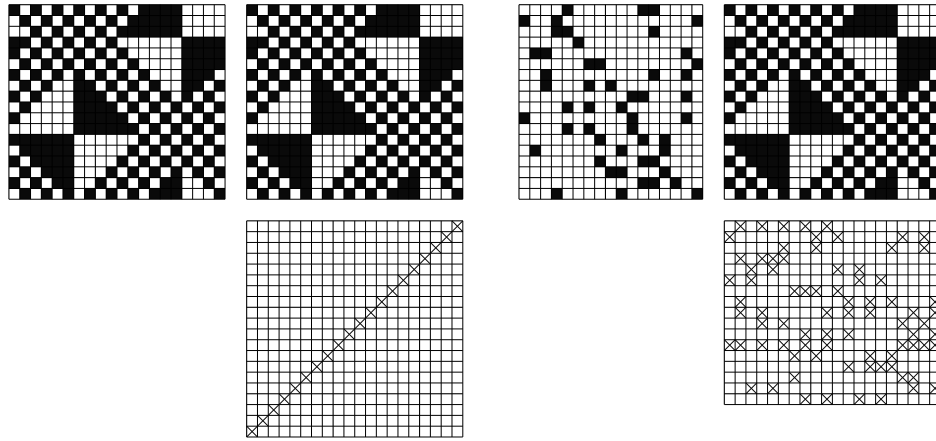


(a) 飾斜紋織 [22]p.57 (20→20→19)

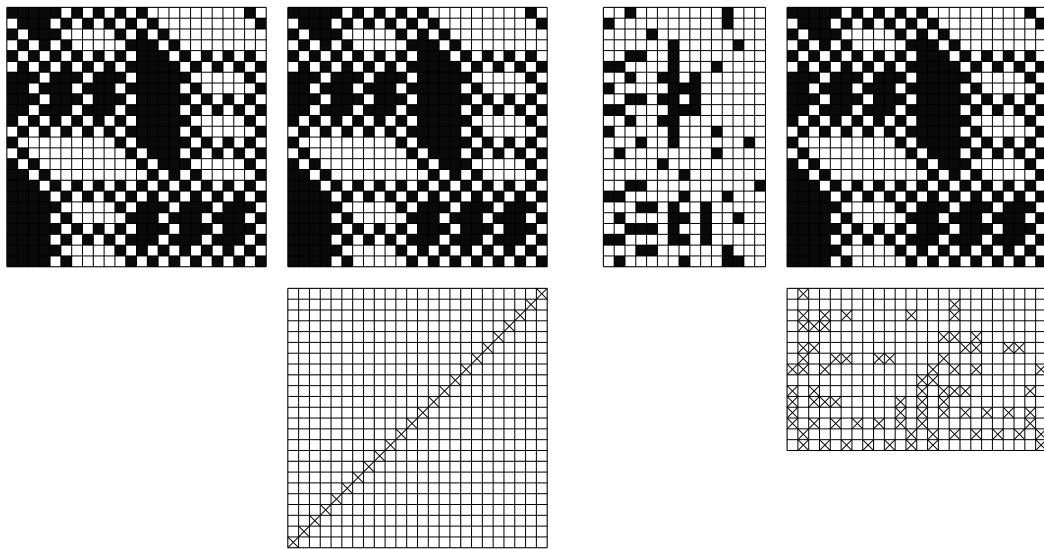


(b) 緩斜紋織 [23]p.205 (18→18→12)

図 3.4: 長目綜統導入の効果があつた織方図(1)(左: 普通綜統のみ使用, 右: 長目綜統導入)

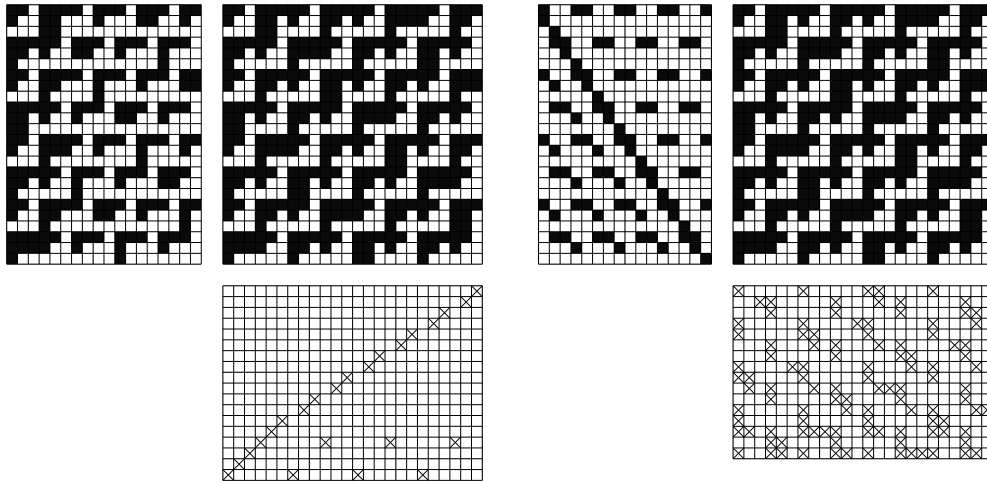


(a) 特別蜂巢織 [23]p.225 (20→20→17)

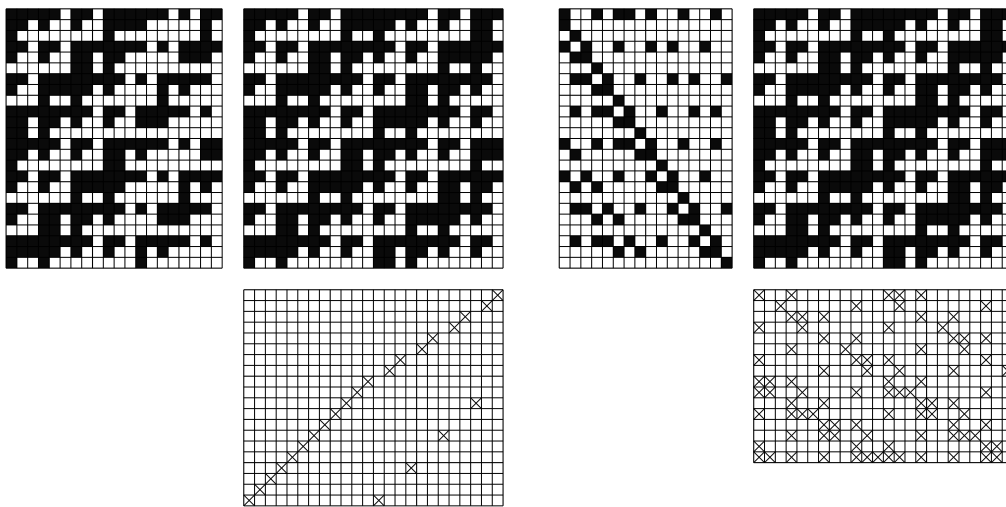


(b) グレーシアン織 [23]p.227 (24→24→15)

図 3.5: 長目綜織導入の効果があつた織方図(2) (左: 普通綜織のみ使用, 右: 長目綜織導入)

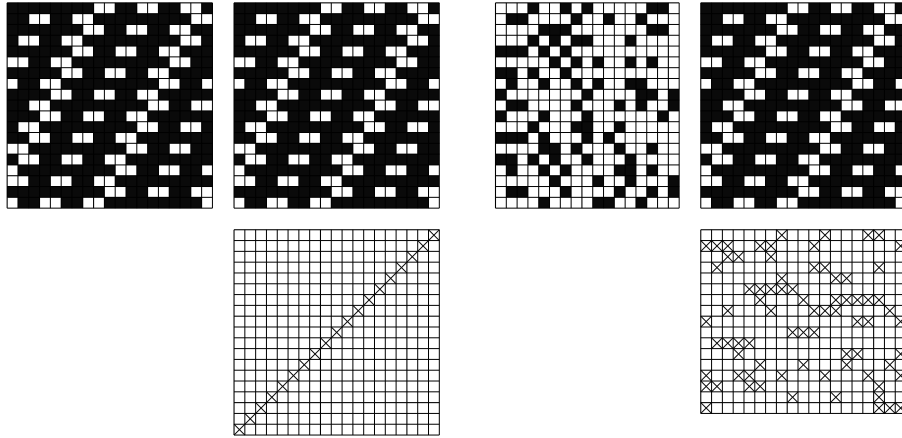


(a) 普通接結三重織 [24]p.14 (24→18→16)

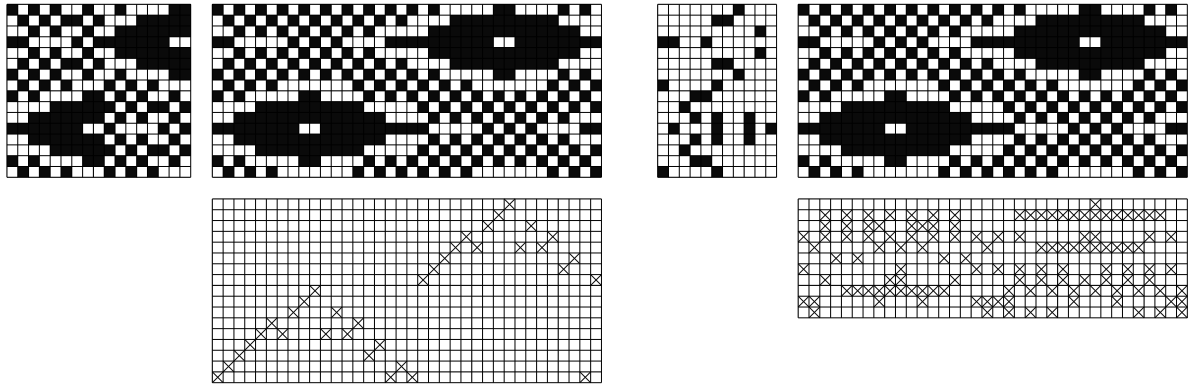


(b) 普通接結三重織 [24]p.14 (24→20→16)

図 3.6: 長目綜織導入の効果があつた織方図(3) (左: 普通綜織のみ使用, 右: 長目綜織導入)

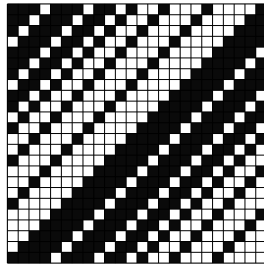


(a) 斜めコード織 [24]p.80 (19→19→17)

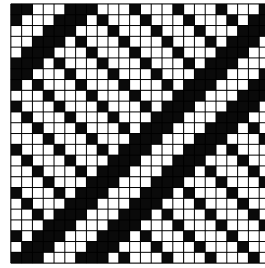


(b) 小紋柄 [28]p.48 (36→17→11)

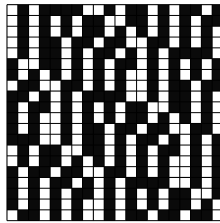
図 3.7: 長目綜織導入の効果があった織方図 (4) (左: 普通綜織のみ使用, 右: 長目綜織導入)



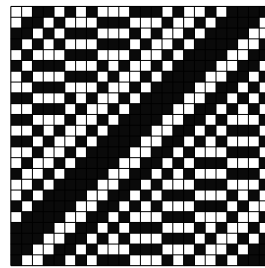
(a) ぼかし斜紋織 [22]p.57



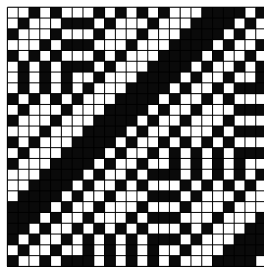
(b) 重斜紋織 [22]p.56



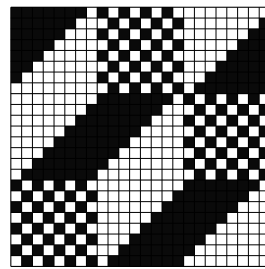
(c) 変わり撚れ斜紋織 [23]p.215



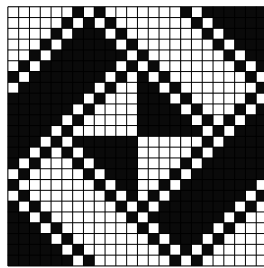
(d) 飾り斜紋織 [23]p.216



(e) 飾り斜紋織 [23]p.216



(f) 特別蜂巢織 [23]p.225



(g) グレーシアン織 [23]p.227

図 3.8: 長目綜統導入の効果がなかった7つの織物組織図

第4章 集合被覆アプローチ

第3章では、総統棒数最小化問題をグラフ彩色問題に変換し、発見的アルゴリズムを用いて解いた。本章では総統棒数最小化問題と等価である2部クリーク被覆問題を集合被覆問題に変換し整数計画ソルバを用いて解く。実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行い提案手法の性能を調べた。集合被覆問題に変換せずに直接的に整数計画問題として定式化し整数計画ソルバで解く場合と比較すると、本章の方法は格段に少ない変数、制約式で問題を記述することができ、計算時間を大幅に短縮できた。また、少数の例外を除き、すべての問題例に対し最小総統棒枚数を厳密に求めることができた。

4.1 集合被覆問題への変換

4.1.1 2部クリーク被覆問題から集合被覆問題への変換

集合被覆問題とは、台集合 S とその部分集合の族 \mathcal{S} が与えられたときに、 S の任意の要素が \mathcal{S} の少なくとも1つの部分集合に含まれるような最小サイズの集合族 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ を求める問題である [16]。

$B = (X, Y, E)$ を2部グラフとし、 \mathcal{C} を B の2部クリーク被覆とする。 \mathcal{C} の各2部クリークを、それを含む任意の極大2部クリークと置き換えて得られるクリーク被覆 \mathcal{C}' は、元の2部クリーク被覆 \mathcal{C} とサイズが同じか小さい。そのため、2部クリーク被覆問題は極大な2部クリークのみによる最小サイズの2部クリーク被覆を求める問題と考えることができる。

$\{C_1, \dots, C_q\}$ を B のすべての極大2部クリークの集合とする。極大クリーク C_i の辺集合を E_i で表すと、 B の極大2部クリーク被覆問題は、 B の辺の集合 E を台集合とし、その部分集合の族を $\{E_1, \dots, E_q\}$ としたときの集合被覆問題ととらえることができる。

4.1.2 極大2部クリーク列挙アルゴリズム

グラフ G の極大クリークは補グラフ \bar{G} の極大安定集合であるため、極大安定集合の列挙アルゴリズムを用いて極大クリークを列挙することができる。

2部グラフ $B = (X, Y, E)$ に対して、 B の補グラフ \bar{B} を作成し、両端点が X に含まれるすべての辺と、両端点が Y に含まれるすべての辺を削除して得られるグラフを B' とする。 B' に極大安定集合列挙アルゴリズムを適用することで、2部グラフ B の極大2部クリークを列挙することができる。Unoらは極大2部クリーク1つあたりの列挙時間が B の頂点数、辺の数に依存しない極大2部クリーク列挙アルゴリズムを提案している [30]。

4.1.3 集合被覆問題の0-1整数計画問題への定式化

集合被覆問題 (S, \mathcal{S}) を考える。 $S = \{s_1, \dots, s_s\}$ 、 $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_t\}$ とすると、集合被覆問題は s 行 t 列の行列 A を用いて以下のように0-1整数計画問題として定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{j=1}^t x_j \\ & \text{subject to} && Ax \geq 1, \\ & && x_j \in \{0, 1\} \quad (1 \leq j \leq t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで、 A は $s_i \in S_j$ のとき $A_{i,j} = 1$ で、 $s_i \notin S_j$ のとき $A_{i,j} = 0$ である。

2部グラフ $B = (X, Y, E)$ の2部クリーク被覆問題に対しては、 $S = E$ 、 $\mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_q\}$ とすれば、0-1整数計画問題として定式化することができる。

4.2 クロスベクトルに基づく0-1整数計画問題としての定式化

4.1節では、2部グラフのクリーク被覆問題を集合被覆問題としてとらえ、0-1整数計画問題として定式化したが、ここでは比較のために、2部グラフのクリーク被覆問題 (= ブール行列のブール階数を求める問題) を0-1整数計画問題として定式化する。

W を m 行 n 列のブール行列, P を m 行 r 列のブール行列, T を r 行 n 列のブール行列として $W = PT$ であるとする. このとき $PT = P_{*1}T_{1*} + P_{*2}T_{2*} + \cdots + P_{*r}T_{r*}$ である [14]. $P_{*k}T_{k*}$ のように m 次列ベクトルと n 次行ベクトルの積によって得られる m 行 n 列の 0-1 行列をクロスベクトルと呼ぶ. クロスベクトルのブール階数は 1 である. クロスベクトルを用いると, W のブール階数を求める問題は W を最小個数のクロスベクトルの論理和で表す問題であるといえる. $P_{*k}T_{k*}$ を Y^k と表記し, u をブール階数の上界とすると, ブール階数を求める問題を次のように定式化することができる.

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{k=1}^u x_k \\
& \text{subject to} && u W_{i,j} \geq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\
& && W_{i,j} \leq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \tag{4.2} \\
& && Y^k = P_{*k}T_{k*} \quad (1 \leq k \leq u) \\
& && x_k = 0 \text{ iff } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{i,j}^k = 0 \quad (1 \leq k \leq u) \\
& && x_k \in \{0, 1\} \quad (1 \leq k \leq u).
\end{aligned}$$

ここで, x_k は非ゼロのクロスベクトルの個数を数えるための変数である. 式 (4.2) を 0-1 整数計画問題に変形する. まず Y^k がクロスベクトル $P_{*k}T_{k*}$ であるという条件は $P_{i,k} + T_{k,j} \leq Y_{i,j}^k + 1$, $Y_{i,j}^k \leq P_{i,k}$, $Y_{i,j}^k \leq T_{k,j}$ という制約式により記述することができる. 次に, 任意の i, j について $Y_{i,j}^k = 0$ のとき, そして, そのときに限り $x_k = 0$ であるという条件は $P_{i,k} \leq x_k$, $T_{k,j} \leq x_k$ という式により記述する. これらの変更を施した定式化を示す.

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{k=1}^u x_k \\
& \text{subject to} && u W_{i,j} \geq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\
& && W_{i,j} \leq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\
& && P_{i,k} + T_{k,j} \leq Y_{i,j}^k + 1 \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
& && Y_{i,j}^k \leq P_{i,k} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
& && Y_{i,j}^k \leq T_{k,j} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
& && P_{i,k} \leq x_k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq u) \\
& && T_{k,j} \leq x_k \quad (1 \leq k \leq u, 1 \leq j \leq n) \\
& && P_{i,k} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq u) \\
& && T_{k,j} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
& && Y_{i,j}^k \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
& && x_k \in \{0, 1\} \quad (1 \leq k \leq u).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

この定式化ではブール階数の上界 u が必要であるが，第 3 章で提案した発見的アルゴリズムにより得られた総続棒枚数を u の値として用いた．

この記述には変数間に対称性が存在し，整数計画ソルバで解く場合には計算時間の増大を招く [31]．そのため対称性を除くために下のような制約式を追加する．まず，クロスベクトルの個数を数えるための変数である x_k のうち，1 となるものと，0 となるものの間の対称性を除去するために $x_k \geq x_{k+1}$ ($1 \leq k \leq u-1$) を追加する．

さらに， $x_k = 1$ となる相違なる k について Y^k 間の区別をつけることで対称性を除去することを考える．このために，ひとつのクロスベクトルで表される W の 1-成分は 2 部グラフ B_W の 2 部クリークに対応することに注意する．したがって，同一の 2 部クリークに含まれない 2 つの辺 e_1, e_2 に対応する W の 2 つの 1-成分は異なるクロスベクトルで表さなければならない．3.3.1 節と同様にグラフ $G_B = (V_B, E_B)$ を 2 部グラフ $B_W = (X, Y, E)$ から次のように構成する． B_W の辺 e_i を G_B の頂点とみなす．つまり $V_B = E$ とする． B_W において異なる 2 つの辺 e_i, e_j がひとつの

2部クリークに含まれるとき，そして，そのときだけ G_B において頂点 e_i と e_j を隣接させる．図 3.2 を参照されたい．

S を G_B の安定集合とすると， S の任意の 2 頂点に対応する B_W の 2 辺は同一の 2 部クリークには含まれない．我々は G_B の最大安定集合を見つけ，そこに含まれる頂点に対応する B_W の辺 (W の 1-成分) がそれぞれ異なる 2 部クリークに属することを制約式として加えた．具体的には， G_B の最大安定集合に対応する， W の 1-成分の集合 $\{W_{i_1,j_1}, W_{i_2,j_2}, \dots, W_{i_l,j_l}\}$ から $Y_{i_a,j_a}^a = 1$ ， $P_{i_a,a} = 1$ ， $T_{a,j_a} = 1$ ， $x_a = 1$ ($1 \leq a \leq l$) という制約式を追加した．

なお我々の実験では 706 すべての問題例に対して整数計画ソルバにより G_B の最大安定集合を求めることができた．その計算時間は 703 の問題例で 60 秒以内であり，最も時間がかかった問題例でも約 12 分であった．この最大安定集合のサイズを l とした．

4.3 実験および考察

整数計画問題を解くために整数計画ソルバを利用することには，次のような利点がある [31]．整数計画ソルバは内部で分枝限定法により解を求めているため，最適解を得るまでの時間を見積もることは困難であるが，時間さえ十分にかければ原理的には最適解を求めることができる．もし制限時間内に計算が終了しなくても，計算を打ち切った時点での上界と下界を得ることができる．

本章では 2 部クリーク被覆問題を集合被覆問題として定式化し，整数計画ソルバを用いて解く (以下，提案法という)．実験の対象としたのは第 3 章で使用した 706 種類の織物組織である．極大 2 部クリークの列挙には `Uno` のプログラム [32] を使用した．提案法との比較のために，4.2 節で述べたように，プール階数を求める問題を直接 0-1 整数計画問題として定式化し，整数計画ソルバを用いて解く方法 (以下，直接法と呼ぶ) も試みた

使用した計算機の CPU は Xeon 3.00 [GHz]，メモリ容量は 8 [GHz] である．整数計画ソルバには ILog 社の CPLEX10.0 を使用し，制限時間を 1 時間とした．

4.3.1 実験結果

織物組織に対応する2部グラフの極大2部クリークの列挙は706種類すべての問題例で0.01秒以内に完了した。それらの2部グラフの辺の数と極大2部クリーク数の分布を図4.1に示す。大半の(実際688の)問題例で極大クリークの個数は500以下であった。極大クリークが最も多い問題例では、その数は1,993であった。また、この図より辺の数と極大2部クリーク数には相関関係があることが見てとれる。

表4.1には、提案法と直接法で各制限時間内で計算が終了した問題例の数を示す。ここで計算が終了したとは、ある解を発見し、かつ、その解が最適であることが判明したことである。提案法では706の織物組織のうち、702の織物組織で1時間以内に計算が終了した。直接法では1時間以内に計算が終了したのは670で、計算が終了しなかった問題例が35であった。なお、この670の問題例は、提案法ではすべて2秒以内に計算が終了している。

表4.2には、提案法と直接法のそれぞれについて、2部グラフ B_W の辺数毎の変数の個数(平均)と制約式の数(平均)を示す。直接法の定式化では、ブール階数の上界を u とすると変数の個数と制約式の個数はともに $O(mnu)$ 個である。提案法の定式化では、部分集合の数を t とすると変数の個数は $O(t)$ 個であり、制約式の数は $O(mn)$ 個である。 t が B_W の頂点数の指数関数となるような問題例も考えられるが、実験の対象とした問題例の中では t は比較的小さく t が最大である問題例でも、その値は1,993であった。 mnu の値が最大である問題例では、 $m = 60$, $n = 57$, $u = 14$ であり、提案法と直接法との変数の個数には大きな差があった。

提案法で1時間以内に最適値が判明しなかった4つの組織図を図4.2に示す。これらの問題例を対象に、制限時間24時間として提案法を実行したところ図4.2(a)、図4.2(b)は計算が終了しなかったが、図4.2(c)は約4時間30分、図4.2(d)は約1時間10分で計算が終了した。これより、実験の対象とした706種類の織物組織のうち2つの織物組織を除いて、すべての織物組織について提案法により最適解が判明した。

上の結果を用いて、第3章の発見的解法では、いくつの問題例で最適値を求めることができたかを検証した。その結果、第3章の方法で得られた706の解のうち、約9割である633の問題例では最適解が求まっていたことが判明した。したがって71の問題例では解を改善することができた。その71の問題例のうち61の

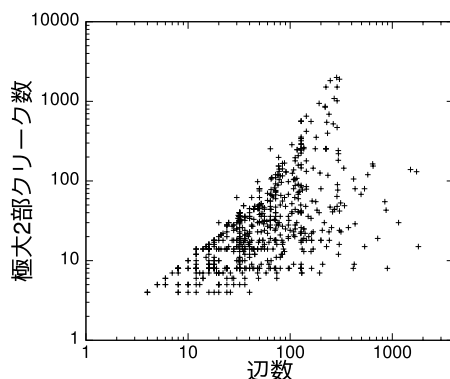


図 4.1: 2 部グラフの辺数と極大 2 部クリーク数の関係

表 4.1: 提案法と直接法の計算終了時間と問題例の数

計算時間	提案法	直接法
1 秒未満	681	604
1 秒以上 60 秒未満	17	44
60 秒以上 3,600 秒未満	4	22
合計	702	670

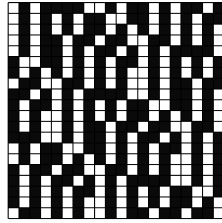
問題例では解のサイズを 1 または 2 改善することができ、残りの 10 の問題例では解のサイズを 3 から 5 改善することができた。

4.4 まとめ

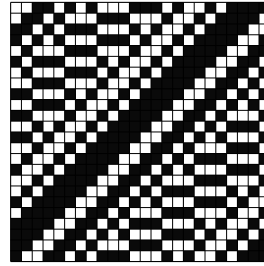
本章では、総統枠数最小化問題と等価である 2 部クリーク被覆問題を集合被覆問題に変換して整数計画ソルバで解く方法を提案した。また、実際にドビー織機

表 4.2: 変数と制約式の数 (平均)

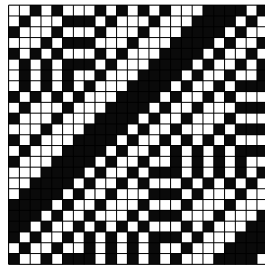
B_W の辺数	問題例	提案法		直接法	
		変数	制約式	変数	制約式
4–99	528	25	39	709	1,947
100–199	110	137	133	2,790	7,985
200–299	40	252	250	6,579	19,087
300–1,800	28	814	641	13,313	40,440



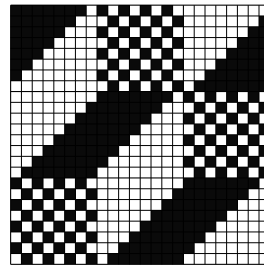
(a) 変わり撚れ斜紋織 [23]p.215



(b) 飾り斜紋織 [23]p.216



(c) 飾り斜紋織 [23]p.216



(d) 特別蜂巢織 [23]p.225

図 4.2: 提案法により 1 時間以内に計算が終了しなかった 4 つの組織図

で製織されている織物組織に対して実験を行い，その有効性を確認した．ブール階数を求める問題を集合被覆問題に変換せずに直接的に整数計画問題として定式化し整数計画ソルバで解く方法と比べ，格段に少ない変数，制約式で問題を記述することができ，計算時間を大幅に短縮することができた．実験の対象とした問題例のうち，2 つの問題例を除きすべての問題例に対し最小綜絨枠枚数を厳密に求めることができた．

第5章 たて糸張力を均一にする条件 下での定式化

製織工場においては、製織時のたて糸張力の管理には細心の注意が払われる。たて糸張力には推奨される適正值があり、適正值より高い場合、低い場合のいずれの場合でも、たて糸張力の不均一により生産性の低下、織物の欠陥が発生しやすくなる。前章までで考察した長目綜統の導入法では、過度の張力がかかるたて糸が存在し、張力の不均一が発生する場合がある。

本章では、たて糸張力が均一であるという新たな制約を加えた、より現実的な問題を考える。はじめに、製織時のたて糸張力の均一化の重要性について述べる。次に、この制約のもとでの綜統枠数最小化問題がブール行列の排他的ブール階数を求める問題と等価であることを示し、更に、排他的ブール階数問題が2部グラフの2部クリーク分割問題と等価であることを示す。これを用いて、たて糸張力均一という制約のもとでの綜統枠数最小化問題に対する発見的アルゴリズムを提案し、第3章、第4章の実験に用いた織物組織に対して実験を行う。

5.1 たて糸張力

本節では、たて糸張力と織物品質との関係、各種開口方式と、開口時の綜統枠の上昇距離について述べる。それにより高品質の織物生産には製織時のたて糸張力の均一化が重要であることを示す。

5.1.1 たて糸張力と織物品質

たて糸張力には推奨される適正值がある。たて糸張力が適正值より高い場合には、たて糸が過度に伸ばされ織物の品質に悪影響がある。また、たて糸が切れやすくなり、生産性が低下するおそれもある。逆に、たて糸張力が適正值より低い

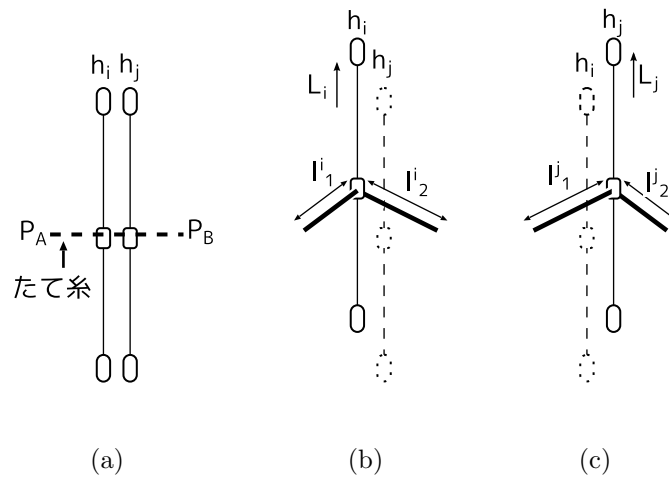


図 5.1: 開口時のたて糸の経路

場合には綜統枠が上昇しても、たて糸が十分に開口しないことにより、本来、よこ糸の上に位置するはずのたて糸がよこ糸の下に位置する可能性が生じ、所望の織物組織が正しく製織できないという欠陥（目飛び）が発生する。つまり、たて糸張力が適正值より高い場合、低い場合のいずれの場合でも、たて糸張力の不均一により織物の欠陥が発生し易くなるため、製織時のたて糸張力の管理は非常に重要である。

5.1.2 異なる綜統枠によって開口されたたて糸にかかる張力

織機では、異なる綜統枠によって開口されるたて糸の張力が等しくなるように綜統枠の上昇距離が設計されている。図 5.1(b) に示すように綜統枠 h_i の上昇により開口されたたて糸 A の、織前から綜統の目までの距離を l_1^i 、綜統の目からバックビームまでの距離を l_2^i とする。また、図 5.1(c) に示すように綜統枠 h_j の上昇により開口されたたて糸 B の、織前から綜統の目までの距離を l_1^j 、綜統の目からバックビームまでの距離を l_2^j とする。綜統枠 h_i の上昇により開口されたたて糸 A の長さ $l^i = l_1^i + l_2^i$ と、綜統枠 h_j の上昇により開口されたたて糸 B の長さ $l^j = l_1^j + l_2^j$ が等しくなるように、綜統枠 h_i の上昇距離 L^i と、綜統枠 h_j の上昇距離 L^j は設計される。このため、異なる綜統枠によって開口されるたて糸 A とたて糸 B の張力は等しくなる。

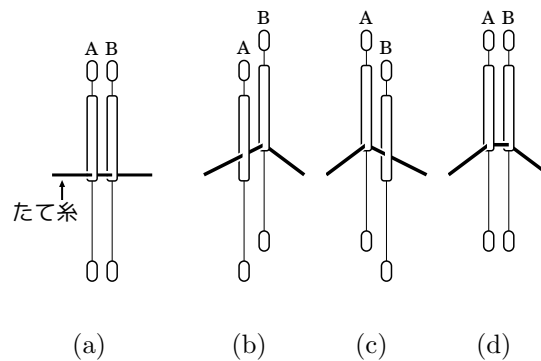


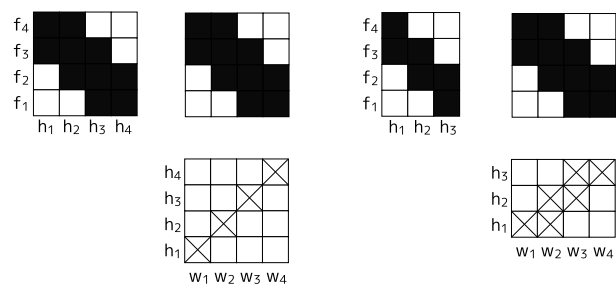
図 5.2: 長目綜統を用いた製織の模式図

5.2 長目綜統を導入した場合のたて糸張力

長目綜統を導入した織機では、1本のたて糸を複数の長目綜統に通すことが可能である。図 5.2 は長目綜統を導入した織機での綜統の動きを模式的に表したものである。図 5.2 の (b) (c) の状態では、開口されたたて糸の経路は普通綜統により開口されたときと同じである。しかし同図 (d) の状態では、たて糸は2つの長目綜統の上昇により開口され、普通綜統により開口されたときと比べると、たて糸の経路が長く、たて糸張力が増大する。

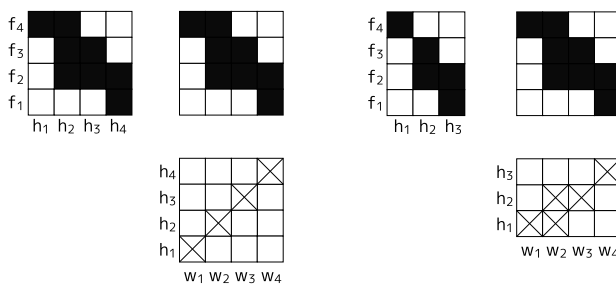
図 5.3 は、長目綜統を導入することにより必要綜統枠枚数を4枚から3枚に減少させることができる例である。図 5.3(b) の織方図では、たて糸 w_2 は綜統枠 h_1, h_2 の綜統の目を通っている。よこ糸 f_3 が通されるとき、綜統枠 h_1, h_2 がともに上昇し、図 5.2 (d) の状態となる。よこ糸 f_2 が通されるとき、たて糸 w_3 も同様の状態となる。長目綜統を導入することにより、綜統枠の少ない織機で所望の織物を製織することが可能であっても、製織時にたて糸が切れて織機を停止することになると生産性が低下したり、織物に欠陥が発生するおそれがある。これでは長目綜統導入の意義が低下する。

長目綜統を導入することにより必要綜統枠枚数を減少させることができる別の例を図 5.4 に示す。図 5.4(a) に示すように、この織物は普通綜統のみを用いる場合には4枚以上の綜統枠を装備した織機でしか製織することはできない。それは、紋柱図の列のパターンが4つ存在であるからである。図 5.4(b) は長目綜統を導入した場合の織方図であるが、この綜統通図を見ると、たて糸 w_2 は二つの綜統枠 h_1, h_2 の綜統を通っている。しかし紋柱図の各行を見ると綜統枠 h_1, h_2 が同時に開口



(a) 普通綜統のみを使う場合 (b) 長目綜統を導入した場合

図 5.3: 同じ組織図の織方図 (1)



(a) 普通綜統のみを使う場合 (b) 長目綜統を導入した場合

図 5.4: 同じ組織図の織方図 (2)

することはない．そのため，図 5.2(d) のような状態は発生せず，開口されたたて糸張力の増大は発生しない．以下では，所望の織物を長目綜統を導入して製織する場合，開口されるたて糸が，ただひとつの長目綜統によってのみ開口するような最小の綜統枠数の織方図を求める問題を考える．この問題を，均一張力綜統枠数最小化問題と呼ぶ．

5.3 排他的ブール階数

5.2 節での考察から，次のように“排他的ブール階数”を導入する． A を m 行 n 列のブール行列とする． A は， m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C の積 $A = B \times C$ として表現することができるとする．右辺はブール積ではなく，通常の行列の積であることに注意されたい． A の排他的ブール階数 (exclusive

Boolean rank) とは, このようにブール行列 B と C の積で表したときの最小の r のことをいう.

P を紋枠図を表す m 行 r 列の行列, T を綜統通図を表す r 行 n 列の行列とする. $(P \times T)$ の (i, j) 成分を $(P \times T)_{i,j}$ とする. P におけるよこ糸 f_i に対応する行は, よこ糸 f_i が通るときに, どの綜統枠が上昇するかを示している. また, T におけるたて糸 w_j に対応する列は, たて糸 w_j が通る綜統の枠を表している. よって, $(P \times T)_{i,j}$ は, w_j が通る綜統で, よこ糸 f_i が通るときに上昇しているものの個数を表す. これより, 次の観察を得る.

観察 5.1. よこ糸 f_i が通るときにたて糸 w_j が開口される場合, そのたて糸は $(P \times T)_{i,j}$ 個の綜統によって開口される.

観察 5.1 により, 各たて糸が開口されるときにはただ一つの綜統の上昇によって開口されるなら, $(P \times T)$ のすべての非零成分は 1 である. したがって, 所望の織物を長目綜統を導入した織機で製織するとき, 各たて糸がただ一つの綜統の上昇によって開口されるという条件のもとで最小綜統枠数を求める問題は, $W = P \times T$ となる P の最小の列数 (T の最小の列数) を求める問題と等価になり, 行列 W の排他的ブール階数を求める問題に等しいことがわかる.

例として図 5.4(b) の織方図の行列表現を以下に示す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

左辺のブール行列 W は, 列数 3 のブール行列 P と行数 3 のブール行列 T との積で表される. このことから行列 W に対応する織物組織は 3 枚の綜統枠を持つ織機で製織することができ, たて糸が開口されるときに, 2 つ以上の綜統によって開口されることはない.

5.4 2部クリーク分割問題

第 3 章では, ブール行列 W のブール階数が 2 部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズに等しいことをみた (定理 3.1). 排他的ブール階数に対しても同様の定理が成り立つ. まず, 2 部クリーク分割を次のように定義する.

2部グラフ B のクリーク分割とは、 B の2部クリークの集合 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ で、 B のどの辺も \mathcal{C} のちょうど1つの2部クリーク C_i に含まれているものをいう。2部クリーク分割問題とは、与えられた2部グラフ B に対し最小サイズのクリーク分割 \mathcal{C} を求める問題である。

定理 5.1. ブール行列 W の排他的ブール階数は、2部グラフ B_W の最小クリーク分割のサイズに等しい。

この定理を証明するために、まず、次の補題 5.1 と補題 5.2 を示す。なお、以下において記号 \sum および $+$ は通常の和を表す。

補題 5.1. m 行 n 列のブール行列 W 、 m 行 r 列のブール行列 P 、 r 行 n 列のブール行列 T がある。このとき、 $W = P \times T$ ならば $W = \sum_{k=1}^r P_{*k} \times T_{k*}$ であり、逆に、 $W = \sum_{k=1}^r P_{*k} \times T_{k*}$ であるなら $W = P \times T$ である。

証明は省略する。

補題 5.1 より、 W の排他的ブール階数は W を最小数のクロスベクトルの和で表したときのクロスベクトルの数に一致する。

補題 5.2. ブール階数が1であるブール行列の排他的ブール階数は1であり、排他的ブール階数が1であるブール行列のブール階数は1である。

【補題 5.2 の証明】ブール階数が1である m 行 n 列のブール行列 M は、ブール階数の定義から m 行1列のブール行列 $A = (a_1, \dots, a_m)^T$ と1行 n 列のブール行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ のブール積で表すことができる。ブール積の演算が、通常の行列の積の演算と異なる点は、通常の演算では1と1の和が2になるのに対して、ブール演算では1と1の論理和が1となる点のみである。 $(AB)_{i,j} = a_i b_j$ であり、 A と B のブール積を求める際の演算には論理和は表れない。したがって、 $(A \times B)_{i,j} = a_i b_j$ でもあるため、 $(AB)_{i,j} = (A \times B)_{i,j}$ が成り立つ。よって M の排他的ブール階数は1である。

逆に、排他的ブール階数が1である m 行 n 列のブール行列 M は、排他的ブール階数の定義から m 行1列のブール行列 $A = (a_1, \dots, a_m)^T$ と1行 n 列のブール行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ の通常の行列の積で表すことができる。 $(A \times B)_{i,j} = a_i b_j$ であり、 A と B の通常の行列の積を求める際の演算には和は表れない。したがって、

$(AB)_{i,j} = a_i b_j$ でもあるため, $(A \times B)_{i,j} = (AB)_{i,j}$ が成り立つ. よって M のブール階数は 1 である. ■

ここで 3.3.1 節で示した補題 3.2 を再掲する.

補題 3.2 再掲 $M \leq W$ で, かつ階数が 1 であるブール行列 M を変換した B_M は 2 部グラフ B_W の 2 部クリークである. 逆に, B_W の 2 部クリーク B_C に対応するブール行列 $C \leq W$ を考えると, そのブール階数は 1 である.

【定理 5.1 の証明】ブール行列 W の排他的ブール階数を r とし, 2 部グラフ B_W の最小クリーク分割のサイズを b とする. 排他的ブール階数の定義から m 行 n 列のブール行列 W は m 行 r 列のブール行列 P と r 行 n 列のブール行列 T の通常の行列の積で $W = P \times T$ と表すことができる. よって, 補題 5.1 より $W = \sum_{i=1}^r P_{*i} \times T_{i*}$ と表すことができる. 補題 5.2 からクロスベクトル $P_{*i} \times T_{i*}$ の排他的ブール階数は 1 である. これらの r 個のクロスベクトルに対応する r 個の 2 部グラフを考える. 補題 3.2 より排他的ブール階数が 1 である行列は B_W では 2 部クリークに対応する. よって, B_W のすべての辺は r 個の 2 部クリークで分割できることになり, $b \leq r$ が成り立つ.

$Q = \{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B_W における最小クリーク分割とする. 補題 3.2 より, B_W の 2 部クリーク Q_i に対応するブール行列 $M_{Q_i} \leq W$ は排他的ブール階数が 1 である. 排他的ブール階数の定義から, M_{Q_i} はクロスベクトルで $M_{Q_i} = c(A_i, B_i)$ と表すことができるので, W は b 個のクロスベクトルの和 $W = \sum_{i=1}^b c(A_i, B_i)$ で表すことができる. よって, 補題 5.1 より $A \times B$ と表すことができる. ただし, A は列ベクトル A_1, \dots, A_b をこの順に並べた n 行 b 列の行列, B は行ベクトル B_1, \dots, B_b をこの順に並べた b 行 m 列の行列である. よって, $r \leq b$ である. 以上から $r = b$ となる. ■

5.5 アルゴリズム

前節で, 均一張力総統粋数最小化問題を 2 部グラフ B_W の最小クリーク分割問題へと帰着した. しかし 2 部クリーク分割問題は NP 困難であることが知られている [33]. そのため発見的アルゴリズムや近似アルゴリズムを使うのが实际的である. 本節では, 発見的アルゴリズムを提案する. 提案アルゴリズムの概略は以下の通りである.

2部クリーク分割アルゴリズム Greedy-RLF

1. 2部グラフ B_W からグラフ G_B を構成する．その方法は3.3.1節で述べた方法と同じである．
2. グラフ G_B の極大クリーク C をひとつ選択する． C に含まれる頂点に対応する B_W の辺は B_W の極大2部クリークを構成する．この極大2部クリークを B_C とする．
3. B_W から B_C に含まれる辺を除去する．
4. B_W のすべての辺が除去されたら終了，そうでなければ，1.に戻る．

このアルゴリズムの出力は除去されたいくつかの2部クリーク B_C である．このアルゴリズムでは， G_B の極大クリーク C をどのように選択するかが残されている．本研究では以下の3通りの方法を試した．まず，グラフ G_B の補グラフ \overline{G}_B を構成し，次の(a)，(b)，(c)の3通りの方法で \overline{G}_B の安定集合を選択する． C を空集合とする．

- (a) \overline{G}_B の次数最小の頂点 v を選択する． v を C に加えて \overline{G}_B から v と隣接する頂点を削除する． \overline{G}_B に対して，この処理を \overline{G}_B が空集合になるまで繰り返す．
- (b) \overline{G}_B の次数最大の頂点 v を選択する． v を C に加えて \overline{G}_B から v と隣接する頂点を削除する． \overline{G}_B に対して，この処理を \overline{G}_B が空集合になるまで繰り返す．
- (c) U_1 を \overline{G}_B の，まだ選択されておらず，かつ選択された頂点に隣接していない頂点の集合であるとする． U_2 を \overline{G}_B の，まだ選択されておらず，かつ選択された頂点に隣接している頂点の集合であるとする． $d_U(w)$ を頂点 w に隣接する，頂点集合 U に含まれる頂点の数とする．はじめに， \overline{G}_B の次数最大の頂点 v を選択し， v を C に加える． v に隣接する頂点を U_2 とし， v に隣接しない頂点を U_1 とする． U_1 の中から $d_{U_2}(v')$ が最大の頂点 v' を選択し，この頂点に隣接する頂点を U_1 から U_2 に移す． \overline{G}_B に対して，この処理を U_1 が空集合になるまで繰り返す．この方法はグラフ彩色アルゴリズム RLF [19] の方法をもとにしたものである．

上の(a)，(b)，(c)で得られる \overline{G}_B の安定集合は，それぞれ G_B の極大クリークである．

表 5.1: 製織可能な織物組織数

綜統枠枚数	織物組織数	
	普通綜統のみ	長目綜統導入
8	474	507
16	691	693
24	706	706

5.6 実験

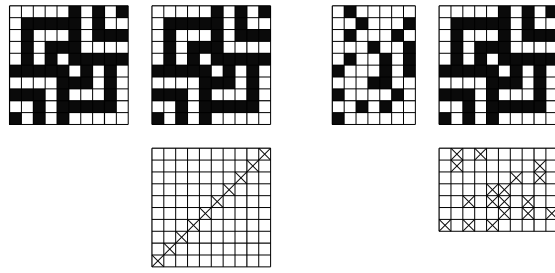
第3章, 第4章で実験に用いた706種類の織物組織に対して実験を行った. 前節の(a), (b), (c)に基づいた3通りの極大クリークの選択法を比較すると(c)の性能が最も良いことが分かった. そこで, 極大クリークの選択には(c)を使用することとした.

織機が装着している綜統枠枚数毎の製織可能な織物組織数を表5.1に示す. 表5.1より, 8枚の綜統枠が装着された織機で普通綜統のみを使用する場合には, 実験に用いた706種類の織物組織のうち製織可能なものは474種類である. しかし, たて糸張力が均一になるという条件のもとで長目綜統を導入した場合に製織可能なものが33種類増加し507種類になる. また, 16枚の綜統枠が装着された織機であれば製織可能なものは691種類から2種類増加し693種類になることがわかり, 合計35種類の織物組織がより少ない綜統枠枚数の織機で製織可能になった.

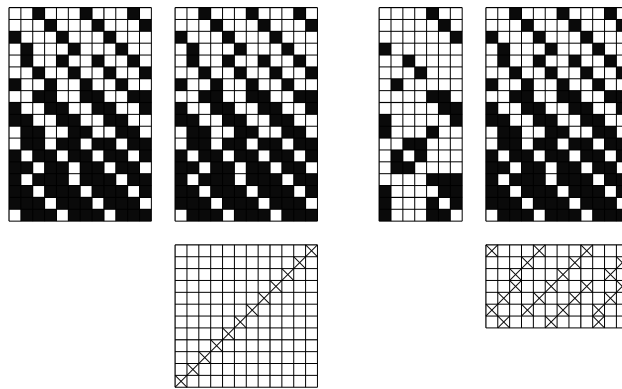
上記の35種類の織物組織の中で, 第5.7節の考察で述べる自明な製織可能綜統枠枚数よりさらに綜統枠枚数を減少させることができたものは3種類であった. その3種類を図5.5に示す. 組織図のたて糸本数 p , 普通綜統のみ使用時の必要綜統枠枚数 q , 自明な製織可能綜統枠枚数 r , 提案アルゴリズムにより得られた必要綜統枠枚数 s を図のキャプション中に $(p \rightarrow q(r) \rightarrow s)$ の形で表記した.

5.7 考察

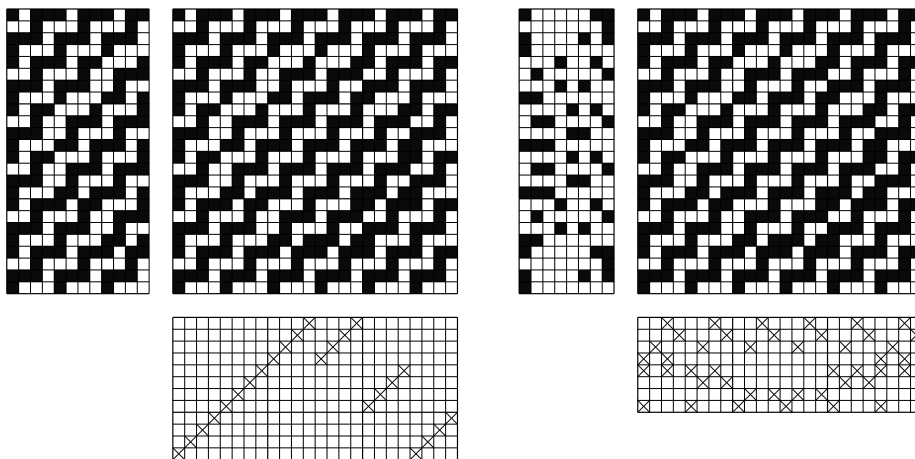
たて糸張力が均一になるという条件のもとで長目綜統を導入した場合の織方図は, 次のような方法でも作成することができる. 図5.6(a)の織物組織は10本のよこ糸からなっている. P を単位行列, T を W と同一にすることで $W = P \times T$ の



(a) 向斜子織 [23]p.205 (10→10(10)→7)



(b) ぼかし斜紋織 [28]p.48 (12→12(18)→7)



(c) 二重風通織 [28]p.48 (24→12(12)→8)

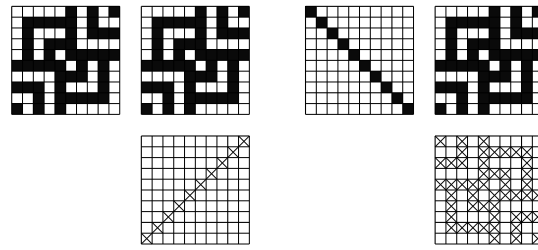
図 5.5: 長目綜紉導入の効果があつた織方図 (左: 普通綜紉のみ使用, 右: 長目綜紉導入)

関係が成り立ち，10枚の綜統枠による長目綜統を導入した場合の織方図(図5.6(a)右)を作成することができる．また，図5.6(c)の織物組織を考えると，異なる列のパターンが12である．したがって，普通綜統のみを使っても12枚の綜統枠で製織可能である．これに対し，異なる行のパターンを調べればこれも12通りであることが分かる．このことを利用しても，長目綜統を導入した場合の織方図(図5.6(c)右)を作成することができ，この織方図はたて糸張力が均一になるという条件のもとで長目綜統を導入した場合の織方図になっている．このように，特別なアルゴリズムを用いなくてもたて糸張力が均一になるという条件のもとで長目綜統を導入した場合の織方図を描くことができる．このようにして求めた綜統枠枚数を，自明な製織可能綜統枠枚数と呼ぶこととする．

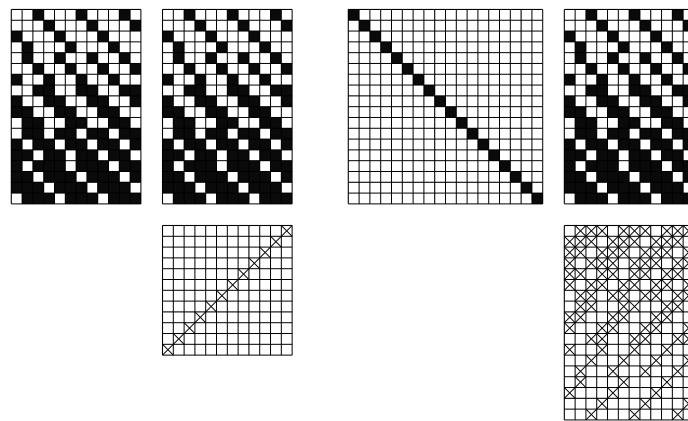
今回の実験結果から，より少ない綜統枠枚数の織機で製織可能になり，かつ，自明な製織可能綜統枠枚数より少ない綜統枠枚数で製織可能であることが分かったのは706種類の中でわずか3種類のみであった．これが，提案アルゴリズムの性能に起因するものか否かを判断するためには，今後，厳密解法を実装し今回の実験結果と厳密解を比較するなどの検証が必要である．

5.8 まとめ

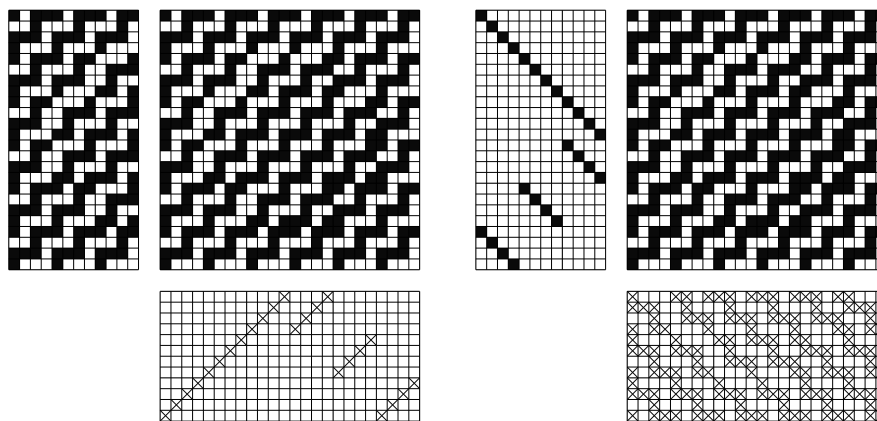
本章では，綜統枠数最小化問題に，より実際的な制約を加えた均一張力綜統枠数最小化問題について考えた．この問題がブール行列の排他的ブール階数を求める問題と等価であることを示し，更に，排他的ブール階数問題が2部グラフのクリーク分割問題に帰着することを示した．これを使い，均一張力綜統枠問題に対する発見的アルゴリズムを提案した．実際に製織されている706種類の織物組織に対して実験を行った結果，いくつかの織物組織ではより少ない綜統枠枚数の織機で製織できた．今後の課題は，この問題に対する厳密解法を実装し，本章で提案した発見的アルゴリズムの性能を評価することである．



(a) 向斜子織り [23]p.205



(b) ほかし斜紋織 [28]p.48



(c) 二重風通織り [23]p.48

図 5.6: 普通綜紬のみ使用時の織方図 (左) と長目綜紬導入時の自明な製織可能綜紬
 枠枚数による織方図 (右)

第6章 結論

本論文では，ドビー織機に長目綜統を導入した場合の効果を明らかにした．

第1章では，製織の原理，織方図，綜統など製織に関する基礎的なことについて説明した．次に，普通綜統と長目綜統の違いや本研究における長目綜統の導入方法について述べ，ドビー織機に長目綜統を導入することにより必要綜統枠数が減少する織物組織があることを示した．最後に，本研究の目的，本論文の構成を述べた．

第2章では，たて糸4本，よこ糸4本からなる織物組織を対象に，普通綜統のみを使用した場合と長目綜統を併用した場合とで，製織可能な織物組織数を数え上げ比較した．たて糸4本，よこ糸4本からなる織物組織では，第一種等価組織を除くと1,446通りの織物組織が存在する．4枚の綜統枠があれば，これらすべてを製織できるが，3枚の綜統枠で普通綜統のみを使う場合に製織可能な織物組織は，この中の336通りである．長目綜統を導入することで，綜統枠3枚のときに新たに製織可能となる織物組織は354通りであり，綜統枠3枚で製織可能な織物組織は336通りから690通りに増加する．つまり，普通綜統のみを使う場合と比較すると，製織可能な織物組織が約2倍に増えることが分かった．

第3章では，綜統枠数最小化問題に対するアルゴリズムを提案した．まず，長目綜統を導入したときに必要な最小綜統枠枚数が，組織図に対応するプール行列のプール階数であることを示した．更に，プール階数を求める問題がグラフ彩色問題に変換でき，グラフ彩色問題の解から織方図を求めることができることを示した．実際に織物として生産されている組織に対して実験を行い，必要綜統枠枚数を大きく減らせる組織図があることを示した．

第4章では，綜統枠数最小化問題と等価である2部クリーク被覆問題を集合被覆問題に変換して整数計画ソルバで解く方法を提案した．また，実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行い，その有効性を確認した．集合被覆問題に変換せずに直接的に整数計画問題として定式化し整数計画ソルバで解

く方法と比べ，格段に少ない変数，制約式で問題を記述することができ，計算時間を大幅に短縮することができた．実験の対象とした問題例のうち，2つの問題例を除きすべての問題例に対し最小綜統枠枚数を厳密に求めることができた．

第5章では綜統枠数最小化問題に，より実際的な制約を加えた均一張力綜統枠数最小化問題について考えた．この問題がブール行列の排他的ブール階数を求める問題と等価であることを示し，更に，排他的ブール階数問題が2部グラフのクリーク分割問題に帰着することを示した．これを使い，均一張力綜統枠問題に対する発見的アルゴリズムを提案した．実際に製織されている706種類の織物組織に対して実験を行った結果，織物組織によってはより少ない綜統枠枚数の織機で製織できることがわかった．

以上のように，本論文では，ドビー織機に長目綜統を導入した場合に生じる綜統枠数最小化に関する2つの問題をブール行列を用いて定式化し，これらの問題に対するアルゴリズムを提案した．具体的には，綜統枠数最小化問題をブール行列のブール階数を求める問題に定式化し，その問題を2部クリーク被覆問題に変換し，発見的解法，および厳密解法を提案した．また，均一張力綜統枠数最小化問題をブール行列の排他的ブール階数を求める問題に定式化し，この問題を2部クリーク分割問題に変換し，発見的アルゴリズムを提案した．

今後の課題は，5.7節で述べたように，均一張力綜統枠数最小化問題に対する厳密解法を実装し，第5章で提案した発見的アルゴリズムの性能を評価することである．

謝辞

本研究の遂行ならびに本論文の執筆に際し，終始多大なご指導を賜りました，名古屋大学大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻 教授 工学博士 平田富夫 先生に心より御礼申し上げます．

本研究の遂行に際し，日頃より貴重かつ多大なるご指導を頂きました，名古屋大学大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻 教授 工学博士 柳浦睦憲 先生に心より御礼申し上げます．

本論文の副査をしていただき，多くのアドバイスを頂きました名古屋大学大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻 教授 理学博士 神保雅一 先生，ならびに名古屋大学大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻 教授 工学博士 酒井正彦 先生に心より御礼申し上げます．

本研究の遂行に際し，数々の貴重なご意見を賜りました，あいち産業科学技術総合センター 尾張繊維技術センターの皆様心より御礼申し上げます．

本研究の遂行に対し，御理解をいただきました，愛知県産業労働部 新産業課の皆様心より御礼申し上げます．

本研究の遂行に対し，御理解をいただきました，あいち産業科学技術総合センター 産業技術センターの皆様心より御礼申し上げます．

本研究ならびに本論文がこうして結実したのは，諸先生方のご尽力は勿論のこと，平田研究室の自由闊達な雰囲気，ならびに筆者と共に平田研究室に在籍した諸氏の公私にわたる御協力のおかげです．この場を借りて，関係諸氏に深く感謝致します．

参考文献

- [1] 日本繊維機械学会繊維工学刊行委員会 (編). 繊維工学 (IV) 布の製造・性能及び物性. 日本繊維機械学会, 2002.
- [2] 高寺政行, 篠原昭. 織物組織に関する研究 (3) 4枚組織の数学的性質. 繊維学会 昭和61年度年次大会研究発表会講演要旨集, p. 194, 1986.
- [3] 文部省 (編). 織機 3. 実教出版, 1960.
- [4] 渡辺健人. 綜紵を減少して紋ブロードの千鳥模様を織成する方法. 特許公告昭 39-000185, 1964.
- [5] 渡辺健人. 既設ドビー機で平織を主体とした組織で構成されたジャカード模様を織成する方法. 特許公告昭 39-000186, 1964.
- [6] 渡辺健人. 綜紵を減少して柄出経系の飛模様をドビー機により織成する装置. 実用公告昭 40-021018, 1965.
- [7] J. A. Hoskins and W. D. Hoskins. Satin and long-eyed heddles. *The Weaver's Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 25–26, 1981.
- [8] J. A. Hoskins. Factoring binary matrices: A weaver's approach. *Combinatorial Mathematics IX Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 952/1982, pp. 300–326, 1982.
- [9] 廣津淳司, 柄崎和孝. 二重織物の織成方法. 特開 2009-68144, 2009.
- [10] R. M. Dawson. Enumeration and identification by elimination of weave families of given repeat size. *Textile Research Journal*, Vol. 70, No. 4, pp. 304–310, 2000.

- [11] 吳祐吉, 松橋房江, 篠原昭. 織物組織に関する基礎的研究 第1報 織物組織の数量化. 繊維学会誌, Vol. 17, No. 10, pp. 989–993, 1961.
- [12] 吳祐吉, 松橋房江, 篠原昭. 織物組織に関する基礎的研究 第2報 織物組織の正則と不規則. 繊維学会誌, Vol. 17, No. 10, pp. 989–993, 1961.
- [13] P. Gu and K. Greenwood. The scope for fabric engineering of the weave. *Journal of Textile Institute*, Vol. 77, No. 2, pp. 88–103, 1986.
- [14] K. H. Kim. *Boolean Matrix Theory and Applications*. Marcel Dekker, 1982.
- [15] J. Orlin. Contentment in graph theory: covering graphs with cliques. *Proceedings. Series A, Mathematical sciences / Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Vol. 80, pp. 406–424, 1977.
- [16] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979.
- [17] H. U. Simon. On approximate solutions for combinatorial optimization problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 3, pp. 294–310, 1990.
- [18] D. W. Matula, G. Marble, and J. D. Isaacson. Graph coloring algorithms. *Graph Theory and Computing*, pp. 109–122, 1972.
- [19] F. T. Leighton. A graph coloring algorithms for large scheduling problems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 84, pp. 489–506, 1979.
- [20] D. Breaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, Vol. 22, pp. 251–256, 1979.
- [21] 大野一郎. 毛織物事典. 丸善, 1953.
- [22] 久世栄一. 最新毛織技術と毛織物解説. 日本羊毛工業会連合会「羊毛」編集部, 1956.
- [23] 文部省 (編). 織機 1. 実教出版, 1958.

- [24] 文部省 (編). 織機 2. 実教出版, 1959.
- [25] 井上孝. 現代繊維辞典. センイ・ジャーナル, 1965.
- [26] 寺田商太郎. やさしい織物の解説. 繊維研究社, 1979.
- [27] 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編). テキスタイル&ファッション. 一宮地場産業ファッションデザインセンター, 2000.
- [28] 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編). テキスタイル&ファッション. 一宮地場産業ファッションデザインセンター, 2001.
- [29] 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編). テキスタイル&ファッション. 一宮地場産業ファッションデザインセンター, 2002.
- [30] T. Uno, M. Kiyomi, and H. Arimura. Lcm ver.2: Efficient mining algorithms for frequent/closed/maximal itemsets. *IEEE ICDM'04 Workshop FIMI'04*, 2004.
- [31] 宮代隆平, 松井知己. ここまで解ける整数計画. システム/制御/情報, Vol. 50, No. 9, pp. 363–368, 2006.
- [32] T. Uno. 公開プログラム. <http://research.nii.ac.jp/~uno/>.
- [33] T. Kratzke, B. Reznick, and D. West. Eigensharp graphs: Decomposition into complete bipartite subgraphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 308, pp. 637–653, 1998.

発表文献

学会誌等

- [1] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “長目綜統導入による製織可能な織物組織の増加,” *Journal of Textile Engineering*, Vol. 53, No. 2, pp. 69–77, 2007.
- [2] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “長目綜統を導入したドビー織機における綜統枠枚数の最小化,” *Journal of Textile Engineering*, Vol. 53, No. 5, pp. 185–195, 2007.
- [3] 松浦 勇, 柳浦陸憲, 平田富夫, “ドビー織機の綜統枠数最小化問題に対する集合被覆アプローチ,” *情報処理学会論文誌*, Vol. 49, No. 4, pp. 1234–1243, 2009.

国際会議

- [1] Isamu Matsuura, Masayoshi Andoh, Tomio Hirata, “Weaving Complicated Design Cloth through Combinatorial Optimization,” *INFORMS International*, Puerto Rico, p.35 (2007).
- [2] Isamu Matsuura, Mutsunori Yagiura, Tomio Hirata, “A Textile Design and Boolean Rank Problem,” *IADIS International Conference Applied Computing 2009*, Rome, pp. 345–352 (2009).

その他

- [1] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “長目綜統を用いた場合に製織可能な織物組織数,” 平成 18 年度 繊維学会秋季研究発表会予稿集 (2006).
- [2] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “長目綜統を用いた場合の織物組織数の増加,” *電子情報通信学会技術研究報告 (COMP2006-37)*, pp. 49–56 (2006).

- [3] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “ドビー織機における必要綜統枠枚数の最小化,” 情報処理学会研究報告 (2007-AL-112), pp. 25–32 (2007).
- [4] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “長目綜統を導入したドビー織機における必要綜統枠枚数の最小化,” 日本繊維機械学会第 60 回予稿集, pp. 70–71 (2007).
- [5] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “織方図作成における最適化問題のグラフによる定式化,” 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1584, pp. 212–224 (2007).
- [6] 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫, “ドビー織機における必要綜統枠枚数の最小化,” FIT2007 第 6 回情報科学技術フォーラム予稿集, pp.9–12 (2007).
- [7] 松浦 勇, 平田富夫, “たて糸張力均一条件下における綜統枠数最小化,” 電子情報通信学会技術研究報告 (COMP2011-43), pp. 53–60 (2011).