

## - 学位論文 -

# カイラル摂動論に基づく有効模型を用いた 有限密度 2-color QCD における中間子質量の変化の研究

名古屋大学 大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻  
山岡 哲朗

平成 24 年 3 月 26 日

### 概要

原子核を構成する核子(陽子と中性子)の質量生成機構と密接に関わっていると考えられているのが、クォークとそれを結合するグルーオンを記述する量子色力学(QCD)の重要な性質の1つである、カイラル対称性とその自発的破れである。我々の世界で自発的に破れているカイラル対称性は、温度と密度の上昇により回復することが予想されており(カイラル相転移)、現在、有限温度・密度領域においてこの相転移の構造を調べる研究が盛んに行われている。しかし、高温・低密度領域対して、低温・中～高密度領域での相構造は未だに解明されていない部分が多い。この原因として、QCDを第一原理から数値的に計算できる格子QCDの手法が有限密度領域においては適応できないことが挙げられる。この問題を回避するための1つの手段として考えられてきたのが、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD である。 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD は、カラー 1 重項のパリオン荷を持つ粒子がクォーク対から構成され、これが、カイラル対称性の自発的破れから現れる質量  $M_\pi$  を持つ擬南部・ゴールドストーンボソン (NG ボソン) として表れる、という特徴を持つ。よって、有限パリオン密度  $\mu_B$  の効果を含む、ボソンに対する低エネルギー有効模型を一意的に構成することができ、その結果を有限密度格子 QCD 計算の結果と直接比較することができる。このような利点から、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD は現実の有限密度 QCD の相構造を解明するヒントを得るための1つの手段として、格子 QCD 計算と模型を用いた計算の両面から研究が進められてきた。

本研究では、隠れた局所対称性の手法に基づき、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD のカイラル対称性の自発的破れの下で現れる擬 NG ボソンに加えてベクトルボソンを含む有効模型を構成し、 $N_f = 2$  でのそれらの質量の密度依存性を解析した。これまでの有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の研究では、 $\mu_B = M_\pi$  において  $U(1)_B$  対称性の自発的破れが起こり、パリオン荷を持つ擬スカラーボソンがこの相転移に対する質量ゼロの NG 粒子として表れることが知られていた。本研究ではこれらの事実に加えて、 $\mu_B = M_\pi$  におけるパリオン荷を持つベクトルボソン質量の密度依存性が、この相転移の新たなシグナルとなり得ることを示した。また、隠れた局所対称性の高次項効果を考えることにより、格子 QCD 計算で指摘されていた  $SU(2)_{\text{color}}$  有限密度における  $\rho$  中間子の質量減少を再現できる有効模型を構成し、 $U(1)_B$  が自発的に破れた相において、 $\rho$ 、 $\omega$  中間子の質量間に成り立つ非自明な関係式を導出した。また、上記の模型を軸性ベクトルボソンを含めたものに拡張し、その質量の密度依存性を解析した。ここでは、 $U(1)_B$  が破れた相において、同じアイソスピンとスピンパリティの量子数を持つ軸性ベクトルボソンとベクトルボソンが混合することにより、ベクトルボソン質量の密度依存性が隠れた局所対称性に基づく有効模型で解析した結果から変化することを示した。また、重いクォーク質量の状況を考え、上記の模型の結果と格子 QCD 計算から得られた結果の比較を行った。

## 目次

1	導入	3
2	$SU(2)_{\text{color}}$ QCD ラグランジアンとその性質	7
2.1	$SU(2)_{\text{color}}$ QCD ラグランジアン	7
2.2	カイラル対称性とその自発的破れ	8
2.3	クォーク質量と化学ポテンシャルの導入	10
3	擬 NG ボソン質量の密度依存性	11
3.1	$SU(2N_f)/Sp(2N_f)$ 非線形シグマ模型の構成	11
3.2	クォーク質量と化学ポテンシャルの導入	13
	クォーク質量 $m_q$ の導入	13
	バリオン化学ポテンシャル $\mu_B$ の導入と $\mu_B/m_q$ に対する真空の配位	14
3.3	$N_f = 2$ における擬 NG ボソン質量の密度依存性	16
	$N_f = 2$ における擬 NG ボソン場	16
	擬 NG ボソン質量の密度依存性	17
4	ベクトルボソン質量の密度依存性	22
4.1	$SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times Sp(2N_f)_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の構成	22
4.2	$N_f = 2$ におけるベクトルボソン質量の密度依存性	25
	$N_f = 2$ におけるベクトルボソン場	25
	ベクトルボソン質量の密度依存性	27
4.3	HLS の高次項の効果	31
5	(軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性	36
5.1	$SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times SU(2N_f)_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の構成	37
5.2	$N_f = 2$ における(軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性	41
	$N_f = 2$ における軸性ベクトルボソン場	41
	(軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性	43
	Weinberg 和則	47
6	まとめと今後の課題	52
A	$Sp(2N)$ 群	55
B	Callan-Caleman-Wess-Zumino による非線形シグマ模型の定式化	56
C	$SU(4)$ 群の生成子	60
D	隠れた局所対称性の枠組みに基づく $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の定式化	61
E	$SU(2)_{\text{color}}$ における $\mathcal{O}(p^4)$ HLS ラグランジアン	64

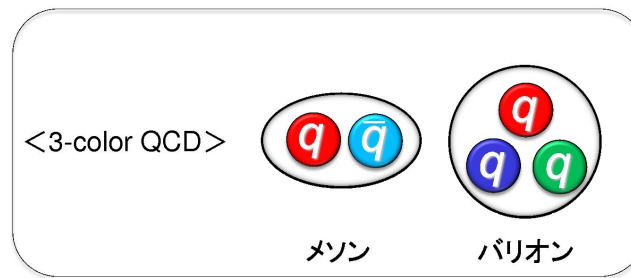


図 1:  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD におけるメソンとバリオン。

## 1 導入

ハドロンはクォークとグルーオンの多体系から成る物質で、クォークと反クォークの束縛状態によって作られる中間子や3つのクォークの束縛状態によって作られる核子（陽子と中性子）などがある。これらクォークとグルーオンの力学を記述する基礎理論が量子色力学（Quantum Chromo Dynamics：QCD）である。QCDは他の素粒子間相互作用を記述する理論とは異なり、高エネルギーで相互作用が弱くなる「漸近的自由性」やクォークを単体では取り出すことのできない「カラー閉じ込め」といった特徴的な性質を持つ理論である。QCDは強結合理論であるため、ハドロンの質量、ハドロン間の相互作用や崩壊といった物理現象をQCDから解析的に導き出すことは困難である。特に筆者が興味を持っているのが、なぜ質量が数 MeV 程度の3つの軽いクォークから約 1GeV もの核子質量が生成されるのか、という問題であり、この質量生成の機構の解明はハドロン物理学の大きな目標の1つとされている。

この機構と密接に関わっていると考えられるのが、カイラル対称性とその自発的破れである。カイラル対称性は軽いクォークのみを考えた場合のQCDラグランジアンが持つ近似的対称性であり、ゼロ温度・ゼロ密度の真空中ではそのオーダーパラメタであるクォーク・反クォーク凝縮が有限の値を持つことにより自発的に破れている。一方で、系の温度や密度を上げるとクォーク・反クォーク凝縮が攪拌され減少し最後には消滅する、つまりカイラル対称性の回復（カイラル相転移）が起こることが予想されている。しかし、クォーク・反クォーク凝縮自身は観測可能量ではないため、この対称性の回復を調べるためにはクォーク・反クォーク凝縮の変化に敏感で観測可能な物理量を探す必要がある。この候補の1つとして考えられているのが  $\rho$  中間子や  $\omega$  中間子といったベクトルボソンである。文献 [1, 2, 3, 4] などでは有限温度・密度中でのクォーク・反クォーク凝縮とベクトルボソン質量の理論的な関係が議論されており、温度や密度の上昇と共に起こるカイラル対称性の回復に従い、ベクトルボソンの質量が減少することが指摘されている。また実験的には、CERNのスーパー陽子シンクロトロン（SPS）における、重イオン衝突から発生するレプトン対の測定によって、高温領域でのベクトルボソンの性質変化とカイラル対称性回復の関係を調べる実験 [5] や、KEKの陽子シンクロトロン（PS）における、原子核内のベクトルボソンの崩壊から発生するレプトン対測定によって、ベクトルボソンの質量変化と核子密度中でのカイラル対称性の部分回復を調べる実験 [6, 7] などが行われている。この様に、有限温度・密度中でのベクトルボソンの性質変化とカイラル相転移の関係については、

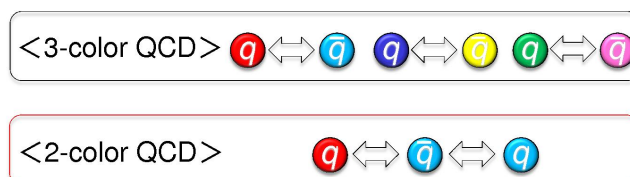


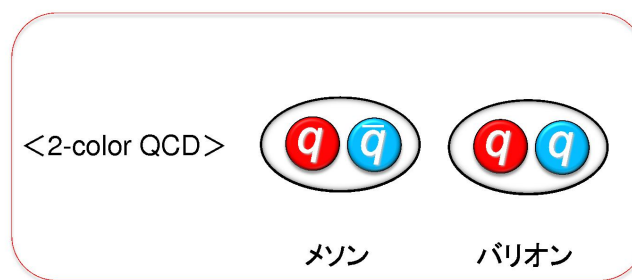
図 2:  $SU(3)_{\text{color}}$  と  $SU(2)_{\text{color}}$  のクォークの違い。  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD は 3 つの色のそれぞれに補色が存在するのに対して、  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD は 1 つめの色の補色と 2 つめの色が同じものとなる。

現在までに理論と実験の両面から盛んな研究が行われている。

また、漸近的自由性のために低エネルギー領域では摂動論を用いた解析が困難な、QCD の物理を調べるための強力な手法として、格子 QCD を用いた数値計算がある。この手法はゼロ密度・有限温度領域においては特に広く用いられており、例えば、有限温度における QCD 系のエネルギー密度を計算することで、160-200 MeV の温度においてハドロンからその内部自由度であるクォークとグルーオンが解放される相転移が起こることが確認されている。[8] しかし一方で、有限密度領域においては、QCD の生成汎関数におけるフェルミオン行列式が複素数となることで、格子 QCD のモンテカルロ計算が実行できなくなる「符号問題」が存在する。[9] これは有限密度格子 QCD において長年取り沙汰されてきた大きな問題で、現在もなお根本的な解決はされておらず、有限密度領域における QCD 相構造の理解を困難とする大きな要因となっている。

本論文ではクォークが  $SU(2)$  ゲージ群の基本表現に属する「 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD」を考え、その低密度領域での相構造と中間子質量の密度依存性を解析する。この理論は、現実世界の  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD とは以下に述べるような点で異なる。 $SU(3)_{\text{color}}$  QCD では、クォークの持つカラー自由度は光の三原色（赤、青、緑）に例えられる。これは、メソンがクォーク（赤）と反クォーク（赤の補色＝シアン）からカラー白色のボソン、バリオンが 3 つのクォーク（赤、青、緑）からカラー白色のフェルミオンとなるように作られているためである。この様子を示したのが図 1 である。一方、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ではクォークのカラー自由度が 2 つしかないため、1 つめの色に対する補色と 2 つめの色を区別することができない（図 2 参照）。この特徴が反映されるのがバリオンであり、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ではカラー白色のバリオンが 2 つのクォークから作られるボソンとなる。この様子を示したのが図 3 である。

この  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD を研究する主な動機として、次の 3 つが挙げられる。まず 1 つ目に考えられるのが、純粋に理論的な興味である。カラーを変数として考えた時の非可換ゲージ理論の性質変化を調べる研究は多く行われており、この例としてカラー変数が大きな極限を考えるラージ  $N_C$  QCD がある。 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD はカラー変数が小さい極限での非可換ゲージ理論であり、この性質を調べることは非可換ゲージ理論の統一的な理解のために意義のあることと考えられる。2 つ目に考えられるのが、有限密度系の理解の容易さである。 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD は有限密度での格子計算において符号問題が発生しない理論であ

図 3:  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD におけるメソンとバリオン。

り<sup>1</sup>、実際に格子 QCD 計算によって有限密度系でのハドロンの質量などが様々な形で測定されている。[21, 22, 23, 24, 25, 26, 27] また、図 3 で示したようにカラー白色のバリオン荷を持つボソンが現れるため、メソンに加えてバリオンを軽い自由度として含み、それらの振る舞いを有限密度中で記述できる低エネルギー有効模型が対称性に基づいて構成できる。このため、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD では ( $SU(3)_{\text{color}}$  QCD では未だ成されていない) 格子 QCD 計算と有効模型による計算を相補的に用いた有限密度系の解析が可能となり、その構造についてより深い理解を得ることができる。実際、カイラル対称性の破れに伴う質量  $M_\pi$  の擬 NG ボソンを含む有効模型を用いた有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の先駆的な研究として、文献 [11] がある。ここでは、バリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  が  $\mu_B = M_\pi$  となる密度において、バリオン荷を持つ擬 NG ボソンが凝縮し  $U(1)_B$  対称性の自発的破れが起こることや、それに伴い質量ゼロの NG ボソンが現れることが議論されており、これらの結果はその後、様々な  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD の計算によって確認されている。3 つめに考えられる動機として、これら  $SU(2)_{\text{color}}$  有限密度 QCD の相構造の理解から、 $SU(3)_{\text{color}}$  有限密度 QCD に対して何らかの知見が得られることへの期待がある。 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD は“バリオン”がボソンとなる点で  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD とは大きく異なる理論である。しかし、クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れに加えて、有限密度中で“バリオン”数の自発的破れによる超流動状態が実現されること、高密度ではクォーク・反クォーク凝縮よりもクォーク対凝縮が大きな値を持つことなど、 $SU(3)_{\text{color}}$  QCD と共通、又は類似した性質を持つことが知られている。よって、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD におけるこれらの性質の解明を通じて、 $SU(3)_{\text{color}}$  有限密度 QCD の相構造への何らかの手掛かりが得られることが期待されている。

本研究において注目したのが、 $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD 計算でベクトルボソン質量の密度依存性を調べた、文献 [26, 27] の研究である。これらの研究において、 $\mu_B \gtrsim M_\pi$  で  $\rho$  中間子質量が密度と共に減少することや、 $\mu_B \lesssim M_\pi$  でクォーク対と反クォーク対から成る  $J^P = 1^+$  のバリオン荷を持つベクトルボソン質量が、それぞれ増加・減少することなど、ベクトルボソン質量の密度依存性についての様々な結果が示されている。しかし、これらの結果が有効模型を用いてどの様に説明できるか、という点については現在までほとんど研究が行われてこなかった。 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD のベクトルボソン質量の密度依存性を有効模型を用いて解析した研究として文献 [28] があるが、この研究では有効模型と格子 QCD 計

<sup>1</sup>この様な理論としては、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の他にフェルミオンが  $SU(N)$  ゲージ群 ( $N$  は任意) の随伴表現に属する場合の QCD [11, 19, 20] がある。これらの理論は総称して “QCD-like theory” と呼ばれている。



算の結果の詳細な比較は行われていない。よって、文献 [28] の模型も含むような、より一般的なベクトルボソンを記述する有効模型を構成し、ここから導かれる結果と格子 QCD 計算の結果を比較することで、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の相構造をベクトルボソン質量の観点から調べることは、現在まで行われてこなかった意義のある研究テーマである。これが本研究の動機であり目的である。

本論文は次の様に構成されている：まず 2 章では  $SU(2)_{\text{color}}$  における QCD ラグランジアンについて議論する。フェルミオンが  $SU(2)_{\text{color}}$  の基本表現に属する場合には、“擬実性” という  $SU(2)$  群特有の性質から QCD ラグランジアンの持つ大局的カイラル対称性が  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD のものから変更されることを確認する。また、QCD ラグランジアンへカレントクォーク質量とバリオン化学ポテンシャルを導入した場合に、ラグランジアンが持つ対称性についても議論する。3 章では文献 [11] に基づいて、 $SU(2)_{\text{color}}$  のカイラル対称性の自発的破れの下で現れる擬 NG ボソンを記述する低エネルギー有効模型を構成し、その有限密度中での真空構造と質量の密度依存性を議論する。4 章では本研究の主題として、隠れた局所対称性の枠組み [29, 30, 31] に基づき、擬 NG ボソンに加えてベクトルボソンを含む有効模型を構成し、 $N_f = 2$  におけるそれらの質量の密度依存性を議論する。ここでは、微分展開の最低次におけるラグランジアンが 3 章で議論した擬 NG ボソンに対する模型と同じ真空構造を持ち得ることに加えて、 $\omega$  中間子の時間成分が有限密度において有限の真空期待値を持つこと、そして、その  $\omega$  中間子の真空期待値の効果を取り込むことによる、バリオン荷を持つ  $J^P = 1^+$  ベクトルボソン質量の密度依存性について議論する。さらに、微分展開の高次項の効果を考えることで、最低次のラグランジアンでは説明できなかった  $\rho$ 、 $\omega$  中間子質量の密度依存性について議論し、 $U(1)_B$  が破れた相において、これら中間子質量の間に非自明な関係が成り立つことを示す。また、クォーク質量が重い状況を考え、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD 計算の結果 [27] と模型から得られる結果と比較する。5 章では、一般化された隠れた局所対称性の枠組み [30, 52, 53, 54] に基づき、擬 NG ボソンとベクトルボソンに加えて、より重い質量を持つ軸性ベクトルボソンを含む有効模型を構成し、 $N_f = 2$  におけるそれらの質量の密度依存性を議論する。ここでは、 $U(1)_B$  が破れた相において、同じアイソスピンとスピンパリティの量子数を持つ軸性ベクトルボソンとベクトルボソンが混合することによる、ベクトルボソン質量の密度依存性について議論する。6 章では、本論文のまとめと今後の課題を記す。

## 2 $SU(2)_{\text{color}}$ QCD ラグランジアンとその性質

この章では、局所対称性が  $SU(2)_{\text{color}}$  である場合の QCD ラグランジアンと、その大局的対称性であるカイラル対称性について考える。 $SU(2)$  群の特殊性により、通常の  $SU(3)_{\text{color}}$  QCD においては  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B$  で記述されるカイラル対称性 (と  $U(1)_B$  対称性) が、 $SU(2N_f)$  へ拡張されることを確認する。また、カレントクォーク質量  $m_q$  とバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  の効果を考えた場合の、カイラル対称性の明示的破れのパターンを議論する。

### 2.1 $SU(2)_{\text{color}}$ QCD ラグランジアン

質量ゼロの  $N_f$  個のクォークを持つ QCD ラグランジアンは次の様に与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = -\frac{1}{2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (2.1)$$

ここで、 $\psi$  は  $SU(2)_{\text{color}}$  の基本表現に属するディラック場であり、 $\gamma_\mu$  は  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$  を満たすガンマ行列である。(  $g_{\mu\nu}$  は 4 次元ミンコフスキー空間の計量テンソル。 ) また

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &:= (\partial_\mu - ig_s A_\mu) \psi, \\ F_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_s [A_\mu, A_\nu], \end{aligned} \quad (2.2)$$

であり、 $g_s$  は  $SU(2)_{\text{color}}$  のゲージ結合定数を表す。 $A_\mu$  は  $SU(2)_{\text{color}}$  のグルーオン場  $A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau_a^c}{2}$  であり、 $\tau_a^c$  は以下で定義される  $SU(2)_{\text{color}}$  のパウリ行列を表す。

$$\tau_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2^c = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

次に、QCD ラグランジアンへの外場の導入について考える。スカラーソース場  $\mathcal{S}$ 、擬スカラーソース場  $\mathcal{P}$ 、そして  $SU(2)_{\text{color}}$  変換の下で不変なスカラー型クォーク対ソース場  $\mathcal{Q}$ 、擬スカラー型クォーク対ソース場  $\mathcal{R}$  を含む項は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{ext-scalar}} = \bar{\psi}(\mathcal{S} + i\gamma_5 \mathcal{P})\psi + \frac{1}{2} [\psi^T C (\gamma_5 \mathcal{Q} + i\mathcal{R}) i\tau_2^c \psi + (\text{h.c.})], \quad (2.4)$$

ここで、 $C := i\gamma_2\gamma_0$  は  $\psi$  に対する荷電共役行列である。また、ベクトル型ソース場  $\mathcal{V}^\mu$ 、軸性ベクトル型ソース場  $\mathcal{A}^\mu$ 、そして  $SU(2)_{\text{color}}$  変換の下で不変な軸性ベクトル型クォーク対ソース場  $\mathcal{B}^\mu$ 、ベクトル型クォーク対ソース場  $\mathcal{D}^\mu$ 、を含む項は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{ext-vector}} = \bar{\psi} \gamma_\mu (\mathcal{V}^\mu - \gamma_5 \mathcal{A}^\mu) \psi + \frac{1}{2} [\psi^T C \gamma_\mu (\mathcal{B}^\mu - \gamma_5 \mathcal{D}^\mu) i\tau_2^c \psi + (\text{h.c.})]. \quad (2.5)$$

これらのソース場はそれぞれ以下の条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\dagger &= \mathcal{S}, \quad \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}, \quad (\mathcal{V}^\mu)^\dagger = \mathcal{V}^\mu, \quad (\mathcal{A}^\mu)^\dagger = \mathcal{A}^\mu, \\ \mathcal{Q}^T &= -\mathcal{Q}, \quad \mathcal{R}^T = -\mathcal{R}, \quad (\mathcal{B}^\mu)^T = \mathcal{B}^\mu, \quad (\mathcal{D}^\mu)^T = -\mathcal{D}^\mu. \end{aligned} \quad (2.6)$$

以上より、外場を含む QCD ラグランジアンは全体として

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext-scalar}} + \mathcal{L}_{\text{ext-vector}}, \quad (2.7)$$

という形で表されることが分かる。

## 2.2 カイラル対称性とその自発的破れ

$\psi$  を 2 成分のディラックスピノル  $q_{L,R}$  を用いて

$$\psi^i = \begin{pmatrix} q_L^i \\ q_R^i \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

と表すと、式 (2.1) のフェルミオン運動項の作用積分は以下のように書きなおすことができる。

$$\int d^4x i\bar{\psi}_i \gamma_\mu D^\mu \psi^i = \int d^4x \left( i q_{L,i}^\dagger \sigma_\mu D^\mu q_L^i + i q_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}_\mu D^\mu q_R^i \right), \quad (2.9)$$

ここで、 $i$  はフレーバーの足であり、 $\gamma_\mu$  は  $SU(2)_{\text{spin}}$  のパウリ行列  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) によって

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{1}, \sigma_j) \\ (1, -\sigma_j) & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

と表されることを用いた。

この時、式 (2.9) が持つ大域的フレーバー対称性  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times U(1)_B$  が  $SU(2N_f)$  へ拡張されることについて、次のように考えることができる。 $SU(2)_{\text{color}}$  と  $SU(2)_{\text{spin}}$  の基本表現は共に擬実表現<sup>2</sup>であるため、 $\sigma_2 \tau_2 q_R^*$  という組み合わせが  $SU(2)_{\text{color}}$  とローレンツ変換の下でそれぞれ  $q_L$  と同じ変換性を持つ。よって、 $2N_f$  個の成分を持つ場  $\Psi$  を

$$\Psi = \begin{pmatrix} q_L^1 \\ q_L^2 \\ \vdots \\ q_L^{N_f} \\ \sigma_2 \tau_2^c q_{R,1}^* \\ \sigma_2 \tau_2^c q_{R,2}^* \\ \vdots \\ \sigma_2 \tau_2^c q_{R,N_f}^* \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

と定義することにより、式 (2.9) を次の様書きなおすことができる。

$$(2.9) : \int d^4x i\bar{\psi} \gamma_\mu D^\mu \psi = \int d^4x i\Psi^\dagger \sigma_\mu D^\mu \Psi. \quad (2.13)$$

この運動項は  $\Psi$  の  $SU(2N_f)$  変換

$$\Psi \rightarrow g\Psi, \quad (g \in SU(2N_f)), \quad (2.14)$$

<sup>2</sup> $SU(2)_{\text{color}}$  と  $SU(2)_{\text{spin}}$  の生成子であるパウリ行列  $\tau_a^c$  ( $a = 1, 2, 3$ ) と  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が

$$(\tau_a^c)^T = -\tau_2 \tau_a \tau_2, \quad (\sigma_j)^T = -\sigma_2 \sigma_j \sigma_2. \quad (2.11)$$

を満たすことに起因する性質。



の下で不変である。

$\Psi$  を用いることにより、式 (2.4) と (2.5) で与えられたラグランジアンの外場項  $\mathcal{L}_{\text{ext-scalar}}$  と  $\mathcal{L}_{\text{ext-vector}}$  はそれぞれ

$$\mathcal{L}_{\text{ext-scalar}} = \frac{1}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2^c \chi \Psi + (\text{h.c.}), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ext-vector}} = \Psi^\dagger \sigma_\mu C^\mu \Psi, \quad (2.16)$$

と、書きなおすことができる。ここで、 $\chi$  と  $C_\mu$  は  $2N_f \times 2N_f$  行列のソース場でありそれぞれ次の様に定義される。

$$\chi := \begin{pmatrix} \mathcal{Q} - i\mathcal{R} & -(\mathcal{S} - i\mathcal{P})^T \\ \mathcal{S} - i\mathcal{P} & (\mathcal{Q} + i\mathcal{R})^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$C_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{V}_\mu + \mathcal{A}_\mu & (\mathcal{B}_\mu + \mathcal{D}_\mu)^\dagger \\ \mathcal{B}_\mu + \mathcal{D}_\mu & -(\mathcal{V}_\mu - \mathcal{A}_\mu)^T \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

このソース場の  $SU(2N_f)$  の下での変換性は以下ようになる。

$$C_\mu \rightarrow g C_\mu g^\dagger + i g \cdot \partial_\mu g^\dagger, \quad \chi \rightarrow g^* \chi g^\dagger. \quad (2.19)$$

また、カイラル対称性の自発的破れを引き起こす  $\bar{\psi}\psi$  は  $\Psi$  を用いて

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2^c \Sigma_c^\dagger \Psi + (\text{h.c.}), \quad (2.20)$$

と書きなおすことができる。ここで、 $\Sigma_c$  は次の様に定義される  $2N_f \times 2N_f$  の定数行列である。

$$\Sigma_c := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{N_f} \\ -\mathbf{1}_{N_f} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

式 (2.20) は  $\Psi$  の  $Sp(2N_f)$  変換<sup>3</sup>

$$\Psi \rightarrow h \Psi, \quad (h \in Sp(2N_f)), \quad (2.22)$$

の下で不変になる。よって、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD のカイラル対称性の自発的破れのパターンは以下の様に表される。

$$\boxed{SU(2N_f) \xrightarrow{\text{SSB}} Sp(2N_f)}. \quad (2.23)$$

また、 $\psi$  のパリティ変換 ( $P$ ) と荷電共役変換 ( $C$ )

$$\psi \xrightarrow{P} \gamma_0 \psi, \quad \psi \xrightarrow{C} C \bar{\psi}^T, \quad (C := i\gamma_2 \gamma_0), \quad (2.24)$$

に対する場  $\Psi$  とソース場  $C^\mu$ 、 $\chi$  のパリティ変換、荷電共役変換、カイラル  $SU(2N_f)$  変換をまとめたものを表 1 に示す。ここで、 $\Omega$  は次の様に定義される  $2N_f \times 2N_f$  の定数行列である。

$$\Omega := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{N_f} \\ \mathbf{1}_{N_f} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

<sup>3</sup> $Sp(2N)$  群については、付録 A 参照。

表 1:  $2N_f$  表示での  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ラグランジアンの構成要素の変換性

構成要素	$P$	$C$	$SU(2N_f)$
$\Psi$	$\sigma_2 \tau_2^c \Omega \Psi^*$	$i \tau_2^c \Sigma_c \Psi$	$g \Psi$
$C^\mu$	$-\Omega C_\mu^T \Omega$	$-\Sigma_c C^\mu \Sigma_c$	$g C^\mu g^\dagger + i g \cdot \partial^\mu g^\dagger$
$\chi$	$\Omega \chi^\dagger \Omega$	$\Sigma_c \chi^T \Sigma_c$	$g^* \chi g^\dagger$

### 2.3 クォーク質量と化学ポテンシャルの導入

$\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  において、カレントクォーク質量  $m_q$  は式 (2.17) で定義されるソース場  $\chi$  の真空期待値を

$$\langle \chi \rangle_{m_q} = m_q \Sigma_c^\dagger, \quad (2.26)$$

と取ることにより導入される。この時、式 (2.15) は

$$\begin{aligned} (2.15) : \mathcal{L}_{\text{ext-scalar}} &= \frac{1}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2^c \langle \chi \rangle_{m_q} \Psi + (\text{h.c.}) \\ &= \frac{m_q}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2^c \Sigma_c^\dagger \Psi + (\text{h.c.}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

となり、この項は  $\Psi$  の  $Sp(2N_f)$  変換 (2.22) の下で不変である。これは、 $\mathcal{L}_{\text{QCD}} \leftarrow m_q$  のみを導入した場合には、対称性の明示的破れが

$$SU(2N_f) \xrightarrow{\text{ExSB}(m_q)} Sp(2N_f), \quad (2.28)$$

となることを表している。

一方、 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  においてバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$ <sup>4</sup> は式 (2.18) で定義されるソース場  $C_\nu$  の真空期待値を

$$\langle C_\nu \rangle_{\mu_B} = \frac{\mu_B \delta_{0\nu}}{2} B, \quad (2.30)$$

と取ることにより導入される。ここで、 $B$  は次の様に定義される  $2N_f \times 2N_f$  の定数行列である。

$$B := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{N_f} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

この時、式 (2.16) は

$$\begin{aligned} (2.16) : \mathcal{L}_{\text{ext-vector}} &= \Psi^\dagger \sigma_\nu \langle C^\nu \rangle_{\mu_B} \Psi \\ &= \frac{\mu_B}{2} \delta^{0\nu} \Psi^\dagger \sigma_\nu B \Psi \\ &= \frac{\mu_B}{2} (q_{L,i}^* q_L^i + q_{R,i}^* q_R^i), \quad (\because (2.12), (2.10), (2.31), ), \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>4</sup> $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ではクォーク対 ( $qq$ ) がカラー 1 重項のバリオン荷を持つ状態を形成する。 $\mu_B$  はこの状態に付与される化学ポテンシャルであり、クォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  との関係は以下のようになる：

$$\mu_q = \frac{\mu_B}{2}. \quad (2.29)$$

となり、この項は  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times U(1)_B$  変換の下での不変性を持つ。これは、 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  ヘバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  のみを導入した場合には、対称性の明示的破れが

$$SU(2N_f) \xrightarrow{\text{ExSB}(\mu_B)} SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times U(1)_B, \quad (2.33)$$

となることを表している。

最後に、 $\mathcal{L}_{\text{QCD}} \sim m_q$  と  $\mu_B$  の両方を導入した場合について考える。これは、式 (2.33) の対称性の破れのパターンに、さらに  $m_q$  の効果が入ったものと考えればよいので、この場合の  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  における対称性の明示的破れは次の様になることが分かる。

$$SU(2N_f) \xrightarrow{\text{ExSB}(m_q, \mu_B)} SU(N_f)_V \times U(1)_B. \quad (2.34)$$

この節で確認した対称性の明示的破れのパターンの、比  $\mu_B/m_q$  における推移を以下にまとめる。

$$\begin{array}{c} \text{Sp}(2N_f) \quad \Longrightarrow \quad SU(N_f)_V \times U(1)_B \quad \Longrightarrow \quad SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 0 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \infty \end{array} \xrightarrow{\mu_B/m_q}$$

この図は、 $\mu_B/m_q = 0$  が  $m_q$  の効果のみを考えた場合の  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  が持つ対称性、 $\mu_B/m_q = \infty$  が  $\mu_B$  の効果のみを考えた場合の  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  が持つ対称性、そして、 $0 < \mu_B/m_q < \infty$  が  $m_q$  と  $\mu_B$  の両方の効果を考えた場合の  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  が持つ対称性を、それぞれ表している。

### 3 擬 NG ボソン質量の密度依存性

この章では、前章で確認した  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ラグランジアンのカイラル対称性の自発的破れの下で現れる、擬 NG ボソンについて考える。まず、擬 NG ボソンの低エネルギーでの振る舞いを記述する有効ラグランジアンを構成し<sup>5</sup>、その有限密度中での真空構造を解析する。そして、 $N_f = 2$  での擬 NG ボソン質量の密度依存性を具体的に調べ、その振る舞いと真空構造の関係を議論する。この章の内容は、参考文献 [11] に基づくレビューである。

#### 3.1 $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$ 非線形シグマ模型の構成

$SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の商空間の代表元は次のようにパラメトライズされる。

$$\xi(\pi) = \exp \left[ \frac{i}{f_\pi} \pi^a(x) X^a \right], \quad (3.1)$$

ここで、 $X^a$  は式 (A.6) によって定められる  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の破れた生成子であり、その性質より  $\xi^T(\pi)$  について以下の関係が成り立つ。

$$\xi^T(\pi) = \bar{\Sigma}^\dagger \xi(\pi) \bar{\Sigma} \quad (3.2)$$

<sup>5</sup>非線形シグマ模型構成の一般論については、付録 B 参照。

ここで  $\bar{\Sigma}$  は、 $\bar{\Sigma}^2 = -\mathbf{1}_{2N}$ 、 $\bar{\Sigma}^T = \bar{\Sigma}^\dagger = -\bar{\Sigma}$  の性質を満たす  $2N_f \times 2N_f$  行列である。 $\xi(\pi)$  は  $SU(2N_f)$  変換の下で、次の様に変換する。

$$\xi(\pi) \rightarrow g\xi(\pi)h^\dagger(\pi, g), \quad (h(\pi, g) \in Sp(2N_f), g \in SU(2N_f)) \quad (3.3)$$

Maurer-Cartan 1-form を

$$\alpha_\nu(\pi) = \frac{1}{i}\xi^\dagger(\pi)\partial_\nu\xi(\pi), \quad (3.4)$$

と導入すると、これは  $\xi(\pi)$  の変換 (3.3) の下で次の様に変換する。

$$\alpha_\nu(\pi) \rightarrow h(\pi, g)\alpha_\nu(\pi)h^\dagger(\pi, g) + \frac{1}{i}h(\pi, g)\partial_\nu h^\dagger(\pi, g). \quad (3.5)$$

次に、 $\alpha_\nu(\pi)$  を

$$\begin{aligned} \alpha_\nu(\pi) &= \frac{1}{2}(\alpha_\nu(\pi) + \bar{\Sigma}\alpha_\nu^T(\pi)\bar{\Sigma}) + \frac{1}{2}(\alpha_\nu(\pi) - \bar{\Sigma}\alpha_\nu^T(\pi)\bar{\Sigma}) \\ &=: \alpha_{\parallel\nu}(\pi) + \alpha_{\perp\nu}(\pi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

と分解する。この時、 $\alpha_{\parallel, \perp\nu}(\pi)$  は以下の性質を満たす。

$$\alpha_{\parallel\nu}^T(\pi) = \bar{\Sigma}\alpha_{\parallel\nu}(\pi)\bar{\Sigma}, \quad \alpha_{\perp\nu}^T(\pi) = -\bar{\Sigma}\alpha_{\perp\nu}(\pi)\bar{\Sigma}. \quad (3.7)$$

一方、 $\alpha_\nu(\pi)$  は  $SU(2N_f)$  の Lie 代数  $\mathcal{G}$  に属するので、 $S^\alpha$  と  $X^a$  ( $S^\alpha$  は式 (A.4) によって定められる  $Sp(2N_f)$  の生成子) を用いて

$$\alpha_\nu(\pi) = \alpha_\nu^\alpha(\pi)S^\alpha + \alpha_\nu^a(\pi)X^a, \quad (3.8)$$

と書くことができ、この各項は以下の性質を満たす。

$$[\alpha_\nu^\alpha(\pi)S^\alpha]^T = \bar{\Sigma}[\alpha_\nu^\alpha(\pi)S^\alpha]\bar{\Sigma}, \quad [\alpha_\nu^a(\pi)X^a]^T = -\bar{\Sigma}[\alpha_\nu^a(\pi)X^a]\bar{\Sigma}. \quad (3.9)$$

よって式 (3.7) と (3.9) より、 $\alpha_{\parallel\nu}(\pi)$  と  $\alpha_{\perp\nu}(\pi)$  は、 $\alpha_\nu(\pi)$  を  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の破れた生成子成分と破れていない生成子成分に分けたもの；

$$\alpha_{\parallel\nu}(\pi) = \alpha_\nu^\alpha(\pi)S^\alpha, \quad \alpha_{\perp\nu}(\pi) = \alpha_\nu^a(\pi)X^a, \quad (3.10)$$

であることが分かる。この時、 $\alpha_{\perp\nu}(\pi)$  は  $SU(2N_f)$  の下で

$$\alpha_{\perp\nu}(\pi) \rightarrow h(\pi, g)\alpha_{\perp\nu}(\pi)h^\dagger(\pi, g), \quad (3.11)$$

として斉次的な変換をするので ( $\cdot$ : 式 (B.10))、これを用いて  $SU(2N_f)$  不変なラグランジアンを構成することができる。 $Sp(2N_f)$  の元  $h$  の中で全ての  $X^a$  と可換なものは単位元  $h = 1$  のみなので<sup>6</sup>、シュアの補題より  $X^a$  は  $Sp(2N)$  の既約表現になっている。よっ

<sup>6</sup> $Sp(2N_f)$  の変換のパラメータを  $\theta^\alpha (\ll 1)$  としてその元  $h$  を

$$h = e^{i\theta^\alpha S^\alpha}$$

とおくと、

$$[X^a, h] = [X^a, e^{i\theta^\alpha S^\alpha}] \simeq i\theta^\alpha [X^a, S^\alpha] \in \mathcal{G} - \mathcal{H}.$$

よって  $X^a$  と  $h(\in Sp(2N))$  が可換であるためには  $\theta^\alpha = 0$  となるしかないので、 $X^a$  と可換な  $Sp(2N)$  の元は  $h = 1$  のみとなる。

てこの場合  $\alpha_{\perp\nu}(\pi)$  の中に含まれる既約成分は 1 つであり、ラグランジアンは定数  $f_\pi$  を用いて

$$\mathcal{L}_{\text{NG-kinetic}} = f_\pi^2 \text{tr} (\alpha_{\perp\nu}(\pi))^2, \quad (3.12)$$

と書くことができる。

ここで、場  $\Sigma(x)$  を

$$\Sigma(x) := \xi^2(\pi) \bar{\Sigma} = \xi(\pi) \bar{\Sigma} \xi^T(\pi), \quad (\because (3.2)), \quad (3.13)$$

と定義すると、 $\xi(\pi)$  の性質 (3.2) と  $\bar{\Sigma}$  の性質より  $\Sigma(x)$  は

$$\Sigma^T(x) = -\Sigma(x), \quad (3.14)$$

を満たし、 $SU(2N_f)$  の下で斉次的に変換する：

$$\Sigma(x) \rightarrow g \Sigma(x) g^T. \quad (3.15)$$

この時、 $\alpha_{\perp\nu}(\pi)$  は  $\Sigma(x)$  を用いて

$$\alpha_{\perp\nu}(\pi) = \frac{1}{2i} \xi^\dagger(\pi) [\partial_\nu \Sigma(x)] \left( \xi^\dagger(\pi) \right)^T \bar{\Sigma}^\dagger, \quad (3.16)$$

と表すことができ、これよりラグランジアン (3.12) は

$$\mathcal{L}_{\text{NG-kinetic}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \partial_\nu \Sigma \cdot \partial^\nu \Sigma^\dagger \right], \quad (3.17)$$

と書きなおすことができる。本章の以下の議論では、この  $\Sigma(x)$  で表されるラグランジアンを用いる。

### 3.2 クォーク質量と化学ポテンシャルの導入

クォーク質量  $m_q$  の導入

NG ボソンの有効ラグランジアンへクォーク質量  $m_q$  の効果を導入するために、次の様な  $SU(2N_f)$  不変な項を考える：

$$\mathcal{L}_\chi := \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \chi + \chi^\dagger \Sigma^\dagger \right]. \quad (3.18)$$

ここで、 $\chi$  は式 (2.17) で定義される  $2N_f \times 2N_f$  行列のソース場であり、 $G$  は質量次元 1 を持つパラメータである。クォーク質量の効果はこの  $\chi$  の真空期待値を式 (2.26) の形に取ることにより導入される。この時  $\mathcal{L}_\chi$  は

$$\mathcal{L}_\chi \rightarrow \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \langle \chi \rangle_{m_q} + \langle \chi \rangle_{m_q}^\dagger \Sigma^\dagger \right] = \frac{m_q f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \cdot \Sigma_c^\dagger + \Sigma_c \cdot \Sigma^\dagger \right], \quad (3.19)$$

となり、この部分を最大（つまり、ラグランジアンのパテンシャル部分を最小）とする  $\Sigma(x)$  の真空期待値は

$$\langle \Sigma(x) \rangle_{m_q} = \Sigma_c \leftrightarrow \langle \xi(\pi) \rangle_{m_q} = \mathbf{1}_{2N_f}, \quad \bar{\Sigma} = \Sigma_c, \quad (\because (3.13)), \quad (3.20)$$

で与えられる。この真空期待値は  $h (\in Sp(2N_f))$  に対して

$$h\langle\Sigma(x)\rangle h^T = h\Sigma_c h^T = \Sigma_c, \quad (\because (A.9)), \quad (3.21)$$

という関係を満たすことから、クォーク質量の効果を導入した場合の有効ラグランジアン  
の真空は  $Sp(2N_f)$  不変であることが分かる。これは、前章で確認した  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  へクォーク  
質量  $m_q$  のみを導入した場合の対称性の明示的破れ (2.28) と一致している。

この真空配位の下での  $\Sigma(x)$  の NG ボソン場  $\pi(x)$  による展開を考えると、

$$\begin{aligned} (3.18) : \mathcal{L}_\chi &= \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} [\Sigma\chi + \chi\Sigma^\dagger] \\ &\rightarrow \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} [\Sigma\langle\chi\rangle_{m_q} + \langle\chi\rangle_{m_q}^\dagger \Sigma^\dagger] \\ &= \frac{m_q f_\chi^2 G}{2} \text{tr} [\xi_\pi^2 \Sigma_c \cdot \Sigma_c^\dagger + \Sigma_c \cdot \Sigma_c^\dagger \xi_\pi^2] \\ &= -\frac{m_q f_\chi^2 G}{f_\pi^2} (\pi^a)^2 + \mathcal{O}((\pi^a)^4), \quad (\because (3.1)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

となるので、ここから擬 NG ボソン質量  $M_\pi$  とクォーク質量  $m_q$  の関係が次の様に求めら  
れる：

$$M_\pi^2 = \frac{2m_q f_\chi^2 G}{f_\pi^2}. \quad (3.23)$$

バリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  の導入と  $\mu_B/m_q$  に対する真空の配位

ここでは、クォーク質量  $m_q$  に加えて、有効ラグランジアンへバリオン化学ポテンシ  
ャル  $\mu_B$  の効果を導入することを考え、 $\mu_B/m_q$  の変化に対する有効ラグランジアンの真空配  
位について議論する<sup>7</sup>。

有効ラグランジアン (3.17) が持つ  $SU(2N_f)$  カイラル対称性を局所的対称性と考え、こ  
の  $SU(2N_f)_{\text{local}}$  に対するソース場  $C_\nu$  を導入する。この時、 $C_\nu$  の変換性 (2.19) より  $\Sigma(x)$   
の共変微分は

$$D_\nu \Sigma(x) := \partial_\nu \Sigma(x) - i (C_\nu \Sigma(x) + \Sigma(x) C_\nu^T), \quad (3.24)$$

という形で与えられ、ラグランジアン (3.17) は次の様に書き直される。

$$\mathcal{L}_{\text{NG-kinetic}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [(D_\nu \Sigma) (D^\nu \Sigma)^\dagger]. \quad (3.25)$$

これより、ソース場  $\chi$  と  $C_\nu$  を含む微分展開の最低次での  $SU(2N_f)$  不変な有効ラグラン  
ジアンは、式 (3.18) と (3.25) を合わせたものとして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}} &= \mathcal{L}_{\text{NG-kinetic}} + \mathcal{L}_\chi \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [(D_\nu \Sigma) (D^\nu \Sigma)^\dagger] + \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} [\Sigma\chi + \chi^\dagger \Sigma^\dagger], \end{aligned} \quad (3.26)$$

<sup>7</sup>今考えている有効模型は  $M_\pi \ll f_\pi$ 、 $\mu_B \ll f_\pi$  の下で妥当な模型であり、あくまでこの条件の下で  $\mu_B$  と  $M_\pi$  の大きさを比較していることに注意。



と書くことができ<sup>8</sup>、クォーク質量  $m_q$  とバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  は  $\chi$  と  $C_\nu$  の真空期待値をそれぞれ式 (2.26) と (2.30) の形に取ることにより導入される：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{chiral}} &\rightarrow \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \partial_\nu \Sigma \cdot \partial^\nu \Sigma^\dagger \right] + i \frac{\mu_B f_\pi^2}{2} \text{tr} \left[ \partial_0 \Sigma \cdot \Sigma^\dagger \mathbf{B} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_B^2 f_\pi^2}{8} \text{tr} \left[ \Sigma \mathbf{B} \Sigma^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right] + \frac{M_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma_c^\dagger + \Sigma_c \Sigma^\dagger \right] \\ &=: \mathcal{L}_{\text{chiral}}|_{M, \mu},\end{aligned}\tag{3.27}$$

ここで、この第 4 項については  $m_q$  と  $M_\pi$  の関係式 (3.23) を用いた書き直しを行った。

この有効ラグランジアンのパテンシャル部分を最小化する  $\Sigma(x)$  の真空期待値は

$$\langle \Sigma(x) \rangle_{m_q, \mu_B} = e^{i \frac{\theta}{2} \mathbf{Y}} \Sigma_c \left( e^{i \frac{\theta}{2} \mathbf{Y}} \right)^T,\tag{3.28}$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{Y}$  は

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \left( \mathbf{I} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{N_f/2} \\ \mathbf{1}_{N_f/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right),\tag{3.29}$$

と定義される  $2N_f \times 2N_f$  の定数行列であり、 $\theta$  は  $\mu_B$  に依存して以下の値を取るものである。

$$\theta = 0, \quad (\text{for } 0 < \mu_B < M_\pi), \quad \cos \theta = \frac{M_\pi^2}{\mu_B^2}, \quad (\text{for } M_\pi < \mu_B).\tag{3.30}$$

これは、式 (3.13) との比較から、 $Sp(2N_f)$  を規定する  $2N_f \times 2N_f$  行列を  $\bar{\Sigma} = \Sigma_c$  と定めると<sup>9</sup>、 $\xi(\pi)$  の真空期待値が

$$\langle \xi(\pi) \rangle_{m_q, \mu_B} = e^{i \frac{\theta}{2} \mathbf{Y}},\tag{3.31}$$

と表され、特に  $\mu_B > M_\pi$  ( $\theta \neq 0$ ) では擬 NG ボソン場が有限の真空期待値を持つことでポテンシャルが最小化されることを意味している。この時  $\langle \Sigma(x) \rangle_{m_q, \mu_B}$  が持つ対称性は  $Sp(N_f)_V$  となり、これは、前章で確認した、 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  へクォーク質量  $m_q$  とバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  の両方を導入した場合の対称性の明示的破れ (2.34) を更に破る形；

$$SU(2N_f) \xrightarrow{\text{ExSB}(m_q, \mu_B)} SU(N_f)_V \times U(1)_B \xrightarrow{\langle \Sigma(x) \rangle_{m_q, \mu_B}} Sp(N_f)_V, \quad (\text{for } M_\pi < \mu_B),\tag{3.32}$$

となっており、有効ラグランジアン (3.27) において  $\mu_B = M_\pi$  で真空の配位が変わる「相転移」が起きていることを表している。

また、 $\mu_B$  が  $M_\pi$  に比べて十分に大きい極限 ( $M_\pi/\mu_B \rightarrow 0$ ) では式 (3.30) より  $\theta = \pi/2$  となる。この時、 $\Sigma(x)$  の真空期待値 (3.28) は

$$\langle \Sigma(x) \rangle_{\mu_B} = e^{i \frac{\pi}{4} \mathbf{Y}} \Sigma_c \left( e^{i \frac{\pi}{4} \mathbf{Y}} \right)^T,\tag{3.33}$$

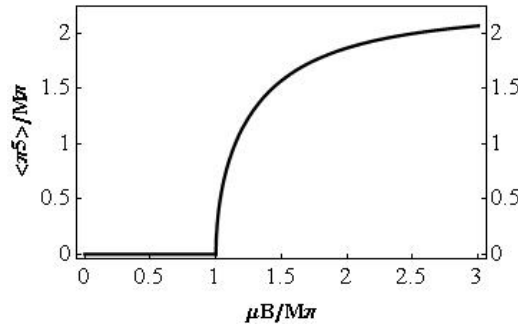
<sup>8</sup>ラグランジアン (3.26) はパリティ変換 ( $P$ )、荷電共役変換 ( $C$ ) に対しても不変である。

<sup>9</sup>式 (3.20) で見た様に、クォーク質量の効果を導入した場合には  $Sp(2N_f)$  を規定する  $2N_f \times 2N_f$  行列  $\bar{\Sigma}$  は  $\bar{\Sigma} = \Sigma_c$  という形に規定される。



表 2: 擬 NG ボソン場と物理的自由度の対応

Field	$I$	$B$	$J^P$
$\pi^{1,2,3}$	1	0	$0^-$
$\pi_{B+} = (\pi^5 - i\pi^4)/\sqrt{2}$	0	+1	$0^+$
$\pi_{B-} = (\pi^5 + i\pi^4)/\sqrt{2}$	0	-1	$0^+$

図 4:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による擬 NG ボソン場  $\pi^5$  の真空期待値の変化を示す図。

となり、これは擬 NG ボソン場  $\pi^a(x)$  について以下の様書きなおすことができる。

$$\langle \pi^{1,2,3,4} \rangle_{m_q, \mu_B} = 0, \quad \langle \pi^5 \rangle_{m_q, \mu_B} = \sqrt{2}\theta f_\pi. \quad (3.39)$$

ここから、 $\mu_B > M_\pi$  において  $\theta$  が有限の値を持つことで、バリオン荷を持つ擬 NG ボソン場の成分  $\pi^5$  が有限の真空期待値を持つことが具体的に分かる。この様子を示したのが図 4 である。 $N_f = 2$  での  $\mu_B/M_\pi$  の変化による対称性の破れ方の推移をまとめると

$$\begin{array}{ccccccc} Sp(4) & \implies & SU(2)_V \times U(1)_B & \xrightarrow{SSB} & SU(2)_V & \implies & SU(2)_L \times SU(2)_R \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 1 & & \infty \end{array} \quad \mu_B/M_\pi$$

となる。 $SU(2)$  と  $Sp(2)$  は同型なため、この場合  $\mu_B > M_\pi$  において自発的に破れるのは  $U(1)_B$  対称性のみとなる。

### 擬 NG ボソン質量の密度依存性

$m_q$  と  $\mu_B$  の効果を導入した有効ラグランジアン (3.27) から、擬 NG ボソン質量の密度依存性を計算する。ここまでに議論したように、この有効ラグランジアンは、 $\mu_B > M_\pi$  でバリオン荷を持つ擬 NG ボソンが有限の真空期待値を持つことにより  $U(1)_B$  対称性を自発的に破る真空構造を持つ。よって、 $\mu_B > M_\pi$  においては、擬 NG ボソン場を新たな真空期待値の周りで再定義する必要が出てくる。ここでは、参考文献 [11] に従い場の再定

義を以下のように行う。

$$\Sigma(x) \rightarrow \tilde{\xi}_\pi \Sigma(x) \tilde{\xi}_\pi^T =: \Sigma_\theta(x). \quad (3.40)$$

ここで、 $\tilde{\xi}_\pi$  は式 (3.38) で定義される  $\xi(\pi)$  の真空期待値である。この時、有効ラグランジアン (3.27) は以下の様を書くことができる<sup>10</sup>。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}}|_{M,\mu} &\rightarrow \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \partial_\nu \Sigma_\theta \cdot \partial^\nu \Sigma_\theta^\dagger \right] + i \frac{\mu_B f_\pi^2}{2} \text{tr} \left[ \partial_0 \Sigma_\theta \cdot \Sigma_\theta^\dagger \mathbf{B} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_B^2 f_\pi^2}{8} \text{tr} \left[ \Sigma_\theta \mathbf{B} \Sigma_\theta^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right] + \frac{M_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \Sigma_\theta \Sigma_c^\dagger + \Sigma_c \Sigma_\theta^\dagger \right] \\ &=: \mathcal{L}_{\text{chiral}}|_{M,\mu,\text{VS}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

$\Sigma_\theta(x)$  は擬 NG ボソン場  $\pi(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} \Sigma_\theta &= \tilde{\xi}_\pi \Sigma \tilde{\xi}_\pi^T \\ &= \tilde{\xi}_\pi^2 \Sigma_c + 2i \tilde{\xi}_\pi \left( \frac{\pi}{f_\pi} \right) \tilde{\xi}_\pi \Sigma_c - 2 \tilde{\xi}_\pi \left( \frac{\pi}{f_\pi} \right)^2 \tilde{\xi}_\pi \Sigma_c + \mathcal{O}(\pi^3) \quad (\because (3.1), (3.13)), \end{aligned} \quad (3.42)$$

と展開することができるので、これを用いて有効ラグランジアン (3.41) から  $\pi$  の 2 次項を書きだすと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}}|_{M,\mu,\text{VS}} &\rightarrow \text{tr} [\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi] + i \mu_B \text{tr} [(\partial_0 \pi \cdot \pi - \pi \cdot \partial_0 \pi) (\cos \theta \mathbf{B} - \sin \theta \mathbf{D})] \\ &\quad + \frac{\mu_B^2}{2} (\cos^2 \theta \text{tr} [\mathbf{B} \pi [\pi, \mathbf{B}]] - \sin^2 \theta \text{tr} [\mathbf{D} \pi [\pi, \mathbf{D}]] - M_\pi^2 \cos \theta \text{tr} [\pi^2]) \\ &=: \mathcal{L}_{\text{chiral-}\mathcal{O}(\pi^2)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。ここで  $\mathbf{D}$  は  $SU(4)/Sp(4)$  の破れた生成子  $X^4$  を用いて

$$\mathbf{D} := 2\sqrt{2}X^4, \quad (3.44)$$

と表される  $4 \times 4$  の定数行列である。

式 (3.35) と (3.36) より、 $\mathcal{O}(\pi^2)$  のラグランジアン (3.43) は擬 NG ボソン場  $\pi^a(x)$  を用いて

$$\mathcal{L}_{\text{chiral-}\mathcal{O}(\pi^2)} = \mathcal{L}_{\text{chiral-}(\pi^A)^2} + \mathcal{L}_{\text{chiral-}(\pi^{4,5})^2}, \quad (3.45)$$

と書くことができる。但しここで、

$$\mathcal{L}_{\text{chiral-}(\pi^A)^2} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^A \cdot \partial^\mu \pi^A - \frac{M_{\pi^A}^2}{2} \pi^A \pi^A, \quad (A = 1, 2, 3), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral-}(\pi^{4,5})^2} &= \frac{1}{2} \cdot \partial_\mu \pi^4 \cdot \partial^\mu \pi^4 + \frac{1}{2} \cdot \partial_\mu \pi^5 \cdot \partial^\mu \pi^5 \\ &\quad + \mu_B \cos \theta (\partial_0 \pi^4 \cdot \pi^5 - \partial_0 \pi^5 \cdot \pi^4) - \frac{M_{\pi^4}^2}{2} \pi^4 \pi^4 - \frac{M_{\pi^5}^2}{2} \pi^5 \pi^5, \end{aligned} \quad (3.47)$$

<sup>10</sup>  $\mathcal{L}_{\text{chiral}}|_{M,\mu,\text{VS}}$  の “VS” は “VEV Shift” の略であり、真空期待値の効果を含めた場の再定義を行っていることを意味する。

であり、 $M_{\pi^A}^2$ 、 $M_{\pi^4}^2$ 、 $M_{\pi^5}^2$  をそれぞれ以下のように定義した。

$$M_{\pi^A}^2 := \mu_B^2 \sin^2 \theta + M_\pi^2 \cos \theta \quad (3.48)$$

$$M_{\pi^4}^2 := \cos \theta (M_\pi^2 - \mu_B^2 \cos \theta), \quad (3.49)$$

$$M_{\pi^5}^2 := \cos \theta (M_\pi^2 - \mu_B^2 \cos \theta) + \mu_B^2 \sin^2 \theta. \quad (3.50)$$

表 2 より  $\pi^A(x)$  は  $\pi$  中間子、 $\pi^{4,5}(x)$  はバリオン荷を持つ擬 NG ボソン  $\pi_{B\pm}$  にそれぞれ対応することに注意すると、式 (3.45) は、 $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  が破れた相においても  $\pi$  中間子と  $\pi_{B\pi}$  が混合しないことを表している。これは、この相において残ったフレーバー対称性である  $SU(2)_V$  対称性、つまりアイソスピン対称性を反映した結果となっている。

擬 NG ボソン質量の密度依存性を具体的に調べるために、 $\pi^a(x)$  のフーリエ変換

$$\pi^a(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{\pi}^a(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (a = 1, \dots, 5), \quad (3.51)$$

をラグランジアン (3.46) と (3.47) の作用積分へ代入し、空間運動量成分をゼロとしたものを考える。この時、 $\pi^A(x)$  については

$$\int d^4 x \mathcal{L}_{\text{chiral}-(\pi^A)^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \hat{\pi}^A(-E) [E^2 - M_{\pi^A}^2] \hat{\pi}^A(E), \quad (3.52)$$

より、ゼロ運動量での分散関係が

$$E^2 - M_{\pi^A}^2 = 0, \leftrightarrow E^2 = M_{\pi^A}^2, \quad (3.53)$$

として求まる。よって、式 (3.53) の  $E > 0$  となる解として、擬 NG ボソン  $\pi^A$  の質量の密度依存性  $m_{\pi^A}$  を次の様に求めることができる。

$$m_{\pi^A} = M_{\pi^A} = \sqrt{\mu_B^2 \sin^2 \theta + M_\pi^2 \cos \theta}, \quad (\because (3.48)). \quad (3.54)$$

同様に  $\pi^{4,5}(x)$  について考えると、

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{chiral}-(\pi^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}^{4\dagger}(E), \hat{\pi}^{5\dagger}(E) \right) \begin{pmatrix} E^2 - M_{\pi^4}^2 & i2E\mu_B \cos \theta \\ -i2E\mu_B \cos \theta & E^2 - M_{\pi^5}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^4(E) \\ \hat{\pi}^5(E) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。この行列式 = 0 を考えればゼロ運動量での分散関係を求めることができるが、ここでは物理的自由度との対応を見やすくするために、以下の様な場の取り直しを考える。

$$\hat{\pi}_{B+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}^5 - i\hat{\pi}^4), \quad \hat{\pi}_{B-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}^5 + i\hat{\pi}^4). \quad (3.56)$$

この時、式 (3.55) は  $\hat{\pi}_{B\pm}$  を用いて

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \mathcal{L}_{\text{chiral}-(\pi^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\
&= \frac{1}{4} \left( \hat{\pi}_{B+}^\dagger, \hat{\pi}_{B-}^\dagger \right) \begin{pmatrix} 2E^2 - (M_{\pi^4}^2 + M_{\pi^5}^2) + 4E\mu_B \cos \theta & M_{\pi^4}^2 - M_{\pi^5}^2 \\ M_{\pi^4}^2 - M_{\pi^5}^2 & 2E^2 - (M_{\pi^4}^2 + M_{\pi^5}^2) - 4E\mu_B \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{B+} \\ \hat{\pi}_{B-} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \left( \hat{\pi}_{B+}^\dagger, \hat{\pi}_{B-}^\dagger \right) \begin{pmatrix} 2 \left\{ (E + \mu_B \cos \theta)^2 - \cos \theta M_\pi^2 \right\} - \mu_B^2 \sin^2 \theta & -\mu_B^2 \sin^2 \theta \\ -\mu_B^2 \sin^2 \theta & 2 \left\{ (E - \mu_B \cos \theta)^2 - \cos \theta M_\pi^2 \right\} - \mu_B^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{B+} \\ \hat{\pi}_{B-} \end{pmatrix}, \\
& \quad (\because (3.49), (3.50)), \quad (3.57)
\end{aligned}$$

と書きなおすことができる。これは、 $0 < \mu_B < M_\pi$  では

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \mathcal{L}_{\text{chiral}-(\pi^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\
&= \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}_{B+}^\dagger, \hat{\pi}_{B-}^\dagger \right) \begin{pmatrix} (E + \mu_B)^2 - M_\pi^2 & 0 \\ 0 & (E - \mu_B)^2 - M_\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{B+} \\ \hat{\pi}_{B-} \end{pmatrix}, \quad (\because (3.30)), \\
& \quad (3.58)
\end{aligned}$$

と書くことができ、 $\hat{\pi}_{B+}$  と  $\hat{\pi}_{B-}$  のそれぞれについてゼロ運動量での分散関係を独立に求めることができる：

$$(E \pm \mu_B)^2 - M_\pi^2 = 0, \leftrightarrow E = \mp \mu_B \pm M_\pi, \quad (\text{複号同順}). \quad (3.59)$$

よって、式 (3.59) の  $E > 0$  に対する解として、擬 NG ボソン  $\pi_{B\pm}$  の質量の密度依存性  $m_{\pi_{B\pm}}$  を次の様に求めることができる。

$$m_{\pi_{B+}} = -\mu_B + M_\pi, \quad m_{\pi_{B-}} = \mu_B + M_\pi, \quad (\text{for } 0 < \mu_B < M_\pi). \quad (3.60)$$

一方、 $\mu_B > M_\pi$  において式 (3.57) は

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \mathcal{L}_{\text{chiral}-(\pi^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\
&= \frac{1}{4} \left( \hat{\pi}_{B+}^\dagger, \hat{\pi}_{B-}^\dagger \right) \begin{pmatrix} 2E^2 + 4E\mu_B \cos \theta - \mu_B^2 \sin^2 \theta & -\mu_B^2 \sin^2 \theta \\ -\mu_B^2 \sin^2 \theta & 2E^2 - 4E\mu_B \cos \theta - \mu_B^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{B+} \\ \hat{\pi}_{B-} \end{pmatrix}, \\
& \quad (\because (3.30)), \quad (3.61)
\end{aligned}$$

となり、 $U(1)_B$  対称性が自発的に破れた結果として、 $\hat{\pi}_{B+}$  と  $\hat{\pi}_{B-}$  のそれぞれについてゼロ運動量での分散関係を独立に求めることができない。よってこの場合は、行列式 = 0；

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} 2E^2 + 4E\mu_B \cos \theta - \mu_B^2 \sin^2 \theta & -\mu_B^2 \sin^2 \theta \\ -\mu_B^2 \sin^2 \theta & 2E^2 - 4E\mu_B \cos \theta - \mu_B^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = 0 \\
& \leftrightarrow 4E^2 \{E^2 - \mu_B^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)\} = 0, \quad (3.62)
\end{aligned}$$



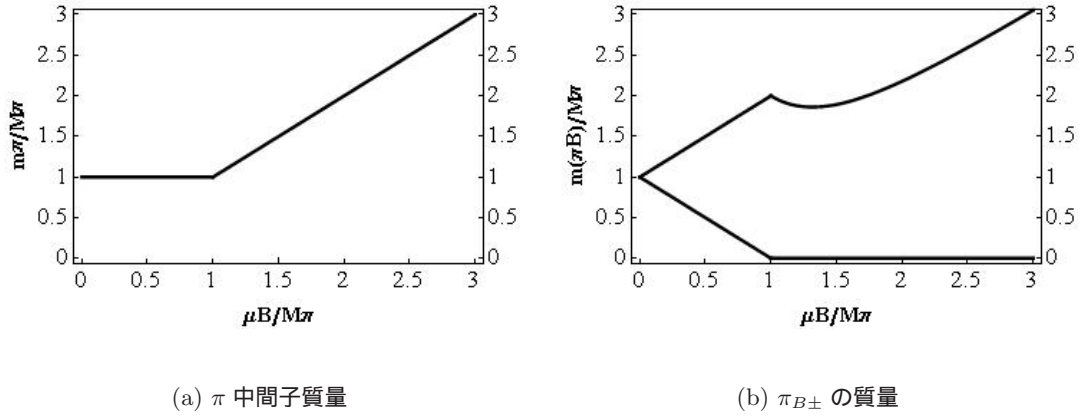


図 5:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による擬 NG ボソン質量の変化を示す図。

を考え、ここから  $E > 0$  となる解を考えることで、バリオン荷を持つ擬 NG ボソンの質量の密度依存性を求める：

$$m_{\pi'_{B+}} = 0, \quad m_{\pi'_{B-}} = \mu_B \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (\text{for } M_\pi < \mu_B). \quad (3.63)$$

ここまでの内容から読み取れる、擬 NG ボソン質量の密度依存性の特徴を以下にまとめる。

♠ 式 (3.63) より、 $\mu_B > M_\pi$  において  $\pi'_{B+}$  の質量はゼロとなる。これは、この状態が  $U(1)_B$  対称性の自発的破れに対応する NG ボソンであることを示している。また、式 (3.60) と (3.63) から  $\mu_B = M_\pi$  において  $\pi_{B\pm}$  と  $\pi'_{B\pm}$  の質量がそれぞれ一致していることが確認できる。

◇  $\pi$  中間子質量の密度依存性  $m_{\pi^A}$  (3.54) は、式 (3.49) で定義される  $M_{\pi^4}^2$  を用いて

$$m_{\pi^A}^2 := \mu_B^2 \sin^2 \theta + M_\pi^2 \cos \theta = \mu_B^2 + M_{\pi^4}^2, \quad (3.64)$$

と書くことができる。ここで、 $\mu_B > M_\pi$  において

$$M_{\pi^4}^2 = \cos \theta (M_\pi^2 - \mu_B^2 \cos \theta) = \frac{M_\pi^2}{\mu_B^2} \left( M_\pi^2 - \mu_B^2 \cdot \frac{M_\pi^2}{\mu_B^2} \right) = 0, \quad (\because (3.30)), \quad (3.65)$$

となることから、 $0 < \mu_B < M_\pi$  ( $\theta = 0$ ) においては  $\pi$  中間子質量は  $M_\pi$  で一定だが、 $\mu_B > M_\pi$  ( $\theta \neq 0$ ) においては  $M_{\pi^4}^2 = 0$  より  $\pi$  中間子質量は密度増加と共に  $\mu_B$  で増加することが分かる。(図 5(a) 参照。)

上記でまとめた擬 NG ボソン質量の密度依存性をプロットしたものが図 5 である。また、この 3 つの状態のうち、 $\pi$  中間子と  $\pi_{B+}$  ( $\pi'_{B+}$ ) については、格子 QCD による数値計算 [24, 27] などでも同様の振る舞いが確認されている。

## 4 ベクトルボソン質量の密度依存性

この章では副論文 [51] に基づき、本研究の主題である  $N_f = 2$  におけるベクトルボソン質量の密度依存性について議論する。まず、隠れた局所対称性 (Hidden Local Symmetry: HLS) [29, 30, 31] の枠組みに基づき、カイラル対称性の自発的破れの下で現れる擬 NG ボソンに加えてベクトルボソンを含む有効ラグランジアンを構成する<sup>11</sup>。次に、このラグランジアンを有限密度中での真空構造を調べることで、 $\omega$  中間子の時間成分が有限の真空期待値を持ち、その密度依存性が  $\mu_B = M_\pi$  を境に変化することを確認する。そしてこの真空構造の下で、まず HLS の微分展開の最低次 ( $\mathcal{O}(p^2)$ ) の有効ラグランジアンにおけるベクトルボソン質量の密度依存性を解析し、さらに、微分展開の高次項 ( $\mathcal{O}(p^4)$ ) の効果がベクトルボソン質量の密度依存性へ与える影響について議論する。

### 4.1 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times Sp(2N_f)_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の構成

この模型における基本変数を  $\xi_L(x)$  とおき、これが  $\xi_L \xi_L^\dagger = \xi_L^\dagger \xi_L = \mathbf{1}_{2N}$  を満たす  $2N_f \times 2N_f$  のユニタリ行列であり、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times Sp(2N_f)_{\text{local}}$  (以下ではこの対称性を「HLS」言うことにする。) の下で次の様に変換するとする。

$$\xi_L \rightarrow h \xi_L g^\dagger, \quad (g \in SU(2N_f)_{\text{chiral}}, h \in Sp(2N_f)_{\text{local}}). \quad (4.1)$$

$\xi_L(x)$  を次の様にパラメトライズする。

$$\xi_L(x) = \xi(\sigma) \xi^\dagger(\pi) = \exp \left[ \frac{i}{f_\sigma} \sigma^\alpha(x) S^\alpha \right] \exp \left[ \frac{-i}{f_\pi} \pi^a(x) X^a \right], \quad (4.2)$$

ここで  $S^\alpha$  は  $SU(2N_f)$  の部分群  $Sp(2N_f)$  の生成子、 $X^a$  はその破れた生成子であり、それぞれ式 (A.4) と (A.6) の性質を満たす。また、ラグランジアンを構成の便宜のために、 $\xi_L(x)$  を用いて定義される場  $\xi_R(x)$  を導入する：

$$\xi_R(x) := \bar{\Sigma} \left( \xi_L^\dagger(x) \right)^T \bar{\Sigma}^\dagger = \xi(\sigma) \xi(\pi). \quad (4.3)$$

この時、 $\xi_R(x)$  は HLS の下で次の様に変換する。

$$\xi_R \rightarrow h \xi_R \bar{\Sigma} g^T \bar{\Sigma}^\dagger, \quad (4.4)$$

$Sp(2N_f)_{\text{local}}$  に対応するゲージ場を導入するために、 $\xi_{L,R}$  に対して以下の様な共変微分を考える。

$$\begin{aligned} D_\nu \xi_L &:= \partial_\nu \xi_L - i V_\nu \xi_L + i \xi_L C_\nu, \\ D_\nu \xi_R &:= \partial_\nu \xi_R - i V_\nu \xi_R - i \xi_R \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで、 $V_\nu = V_\nu^\alpha S^\alpha$  は  $Sp(2N_f)_{\text{local}}$  に対応するゲージ場 (ベクトルボソン) であり、 $C_\nu = C_\nu^A T^A$  は  $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  に対応する外場としてのゲージ場である。( $T^A$  は  $SU(2N)$  の生成

<sup>11</sup>HLS の枠組みに基づく線形シグマ模型構成の一般論については付録 D 参照。

子である。) 共変微分  $D_\nu \xi_{L,R}$  が  $\xi_{L,R}$  の変換性 (4.1) と (4.4) を満たすために、 $V_\nu$  と  $C_\nu$  の変換性は

$$\begin{aligned} V_\nu &\rightarrow V'_\nu = h V_\nu h^\dagger + i h \cdot \partial_\nu h^\dagger, \\ C_\nu &\rightarrow C'_\nu = g C_\nu g^\dagger + i g \cdot \partial_\nu g^\dagger, \end{aligned} \quad (4.6)$$

と定められる。この様に、ベクトルボソン  $V_\nu$  とカイラル対称性の外場としてのゲージ場  $C_\nu$  を独立に導入することができるのが HLS の枠組みの特徴である。この時、共変化された Maurer-Cartan 1-form を

$$\hat{\alpha}_\mu := \frac{1}{i} D_\mu \xi_L \cdot \xi_L^\dagger, \quad (4.7)$$

と定義すると、これは HLS の下で斉次的に変換する：

$$\hat{\alpha}_\mu \rightarrow \hat{\alpha}'_\mu = h \hat{\alpha}_\mu h^\dagger. \quad (4.8)$$

ここで、式 (3.6) と同様に、 $\hat{\alpha}_\mu$  を  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の並行成分と垂直成分に

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_\nu &= \frac{1}{2} [\hat{\alpha}_\nu + \bar{\Sigma} \hat{\alpha}_\nu^T \bar{\Sigma}] + \frac{1}{2} [\hat{\alpha}_\nu - \bar{\Sigma} \hat{\alpha}_\nu^T \bar{\Sigma}] \\ &=: \hat{\alpha}_{\parallel\nu} - \hat{\alpha}_{\perp\nu}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

と分解すると、それぞれの成分が HLS の下で斉次的に

$$\hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu} \rightarrow \hat{\alpha}'_{\parallel,\perp\nu} = h \hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu} h^\dagger, \quad (4.10)$$

と変換する。また、 $\hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu}$  は  $\xi_{L,R}$  を用いて次の様に書くことができる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} &= \frac{1}{2} [\bar{\Sigma} \hat{\alpha}_\nu^T \bar{\Sigma} + \hat{\alpha}_\nu] = \frac{1}{2i} [(D_\nu \xi_R) \xi_R^\dagger + (D_\nu \xi_L) \xi_L^\dagger], \\ \hat{\alpha}_{\perp\nu} &= \frac{1}{2} [\bar{\Sigma} \hat{\alpha}_\nu^T \bar{\Sigma} - \hat{\alpha}_\nu] = \frac{1}{2i} [(D_\nu \xi_R) \xi_R^\dagger - (D_\nu \xi_L) \xi_L^\dagger], \end{aligned} \quad (4.11)$$

クォーク質量の効果を考えるためには式 (2.17) で定義される  $2N_f \times 2N_f$  行列のソース場  $\chi$  を有効ラグランジアンへ導入する必要があるが、 $\chi$  は式 (2.19) より  $g \in SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  についての斉次的な変換性を持つ場である。これを  $h \in Sp(2N_f)_{\text{local}}$  で変換する場を書きかえるため、 $\hat{\chi}$  という場を

$$\hat{\chi} := 2G \xi_R \bar{\Sigma} \chi \xi_L^\dagger, \quad (4.12)$$

と定義すると、これは HLS の下で斉次的に変換する：

$$\hat{\chi} \rightarrow h \hat{\chi} h^\dagger. \quad (\because (4.1), (4.4), (2.19)). \quad (4.13)$$

以上より、HLS の下で  $h \in Sp(2N_f)_{\text{local}}$  について斉次的に変換する要素として、 $\hat{\alpha}_{\parallel\nu}$ 、 $\hat{\alpha}_{\perp\nu}$ 、 $\hat{\chi}$  の3つを得ることができた。これらに  $Sp(2N_f)_{\text{local}}$  ベクトルボソン場  $V_\nu$  と  $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  の外場としてのゲージ場  $C_\nu$  を加え、そのパリティ ( $P$ )、荷電共役 ( $C$ )、HLS の下での変換性をまとめたものを表 3 に示す。よって、これらの構成要素を用いた微分展開の最低

表 3: HLS ラグランジアンの変換性

構成要素	$P$	$C$	HLS
$\hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}$	$(\Omega\Sigma_c)\hat{\alpha}_{\parallel\nu}(\Omega\Sigma_c)$	$-\hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu T}$	$h\hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}h^{\dagger}$
$\hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}$	$-(\Omega\Sigma_c)\hat{\alpha}_{\perp\nu}(\Omega\Sigma_c)$	$\hat{\alpha}_{\perp}^{\nu T}$	$h\hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}h^{\dagger}$
$\hat{\chi}$	$(\Omega\Sigma_c)\hat{\chi}^{\dagger}(\Omega\Sigma_c)$	$\hat{\chi}^T$	$h\hat{\chi}h^{\dagger}$
$V^{\nu}$	$(\Omega\Sigma_c)V_{\nu}(\Omega\Sigma_c)$	$-V^{\nu T}$	$hV^{\nu}h^{\dagger} + ih \cdot \partial^{\nu}h^{\dagger}$
$C^{\nu}$	$-\Omega C_{\nu}^T \Omega$	$-\Sigma_c C^{\nu} \Sigma_c$	$gC^{\nu}g^{\dagger} + ig \cdot \partial^{\nu}g^{\dagger}$

次での HLS 不変なラグランジアンは次の様に書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\text{HLS-}\mathcal{O}(p^2)} = -\frac{1}{2g^2}\text{tr}[V_{\nu\rho}V^{\nu\rho}] + f_{\sigma}^2\text{tr}[\hat{\alpha}_{\parallel\nu}^2] + f_{\pi}^2\text{tr}[\hat{\alpha}_{\perp\nu}^2] + \frac{f_{\chi}^2}{4}\text{tr}[\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger}], \quad (4.14)$$

ここで第 1 項はベクトルボソン  $V_{\nu}$  の運動項であり、 $g$  は HLS のゲージ結合定数を表す。また、 $V_{\nu\rho}$  は以下で定義される場の強さのテンソルである。

$$V_{\nu\rho} := \partial_{\nu}V_{\rho} - \partial_{\rho}V_{\nu} - i[V_{\nu}, V_{\rho}]. \quad (4.15)$$

HLS ラグランジアン (4.14) と前章で考えた擬 NG ボソンに対するラグランジアン (3.26) との関係についてコメントしておく。式 (4.14) において、ベクトルボソン  $V_{\nu}$  の運動項を無視した場合の  $V_{\nu}$  についての運動方程式を考え<sup>12</sup>、その解を  $\mathcal{L}_{\text{HLS-}\mathcal{O}(p^2)}$  へ代入すると第 2 項はゼロとなり第 3 項と第 4 項は次の様に書き直すことができる。

$$f_{\pi}^2\text{tr}[\hat{\alpha}_{\perp\nu}^2] + \frac{f_{\chi}^2}{4}\text{tr}[\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger}] \rightarrow \frac{f_{\pi}^2}{4}\text{tr}[(D_{\nu}\Sigma_{\text{HLS}})(D^{\nu}\Sigma_{\text{HLS}})^{\dagger}] + \frac{f_{\chi}^2 G}{2}\text{tr}[\Sigma_{\text{HLS}}\chi + \chi^{\dagger}\Sigma_{\text{HLS}}^{\dagger}], \quad (4.16)$$

ここで  $\Sigma_{\text{HLS}}(x)$  は  $\xi_L(x)$  を用いて、

$$\Sigma_{\text{HLS}} := \xi_L^{\dagger}\bar{\Sigma}\left(\xi_L^{\dagger}\right)^T = \xi_L^{\dagger}\xi_R\bar{\Sigma} \quad (\because (4.3)), \quad (4.17)$$

と定義される場であり、HLS の下で  $g \in SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  についての斉次的な変換性；

$$\Sigma_{\text{HLS}} = g(\Sigma_{\text{HLS}})g^T, \quad (\because (4.1) (A.9)), \quad (4.18)$$

を持つ。また、 $\xi_L(x)$  のパラメトリゼーション (4.2) より  $\Sigma_{\text{HLS}}(x)$  は

$$\Sigma_{\text{HLS}} := \xi_L^{\dagger}\xi_R\bar{\Sigma} = \xi^2(\pi)\bar{\Sigma} = \Sigma, \quad (4.19)$$

と書くことができる。ここで、 $\Sigma(x)$  は式 (3.13) で定義される場である。ここから、隠れた局所対称性の枠組みにおける有効ラグランジアン構成の考え方を、次の様にまとめることができる。

<sup>12</sup>これは、 $V_{\nu}$  の質量よりも低エネルギーな領域を考えることを意味する。

♠ 式 (3.13) で定義される商空間  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の非線形シグマ模型の構成要素  $\Sigma(x)$  には  $Sp(2N_f)_{\text{local}}$  の自由度が常に含まれており、これは、対称性の自発的破れのパターン (2.23) が

$$\boxed{SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times Sp(2N_f)_{\text{local}} \xrightarrow{\text{SSB}} Sp(2N_f)_{\text{global}},} \quad (4.20)$$

と拡張されることを意味する。そしてこの時、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  の自発的破れに対する擬 NG ボソンに加えて、 $Sp(2N_f)_{\text{local}}$  の自発的破れに対するゲージボソンを取り入れた有効ラグランジアンを構成することができる。

#### 4.2 $N_f = 2$ におけるベクトルボソン質量の密度依存性

$N_f = 2$  におけるベクトルボソン場

$N_f = 2$  での HLS の自発的破れのパターン (4.20) は

$$\boxed{SU(4)_{\text{chiral}} \times Sp(4)_{\text{local}} \xrightarrow{\text{SSB}} Sp(4)_{\text{global}},} \quad (4.21)$$

と記述される。この時、式 (4.14) は 5 つの擬 NG ボソン場 (3.35) に加えて、 $Sp(4)_{\text{local}}$  に対応する 10 個のベクトルボソン場  $V_\nu(x)$  ;

$$V_\nu(x) := V_\nu^\alpha(x) S^\alpha = \begin{pmatrix} P_\nu(x) & Q_\nu(x) \\ Q_\nu^\dagger(x) & -P_\nu^T(x) \end{pmatrix}, \quad (\alpha = 1, \dots, 10), \quad (4.22)$$

を含む有効ラグランジアンとなる。ここで、 $S^\alpha$  は式 (C.1) と (C.2) で定義される  $Sp(4)$  の生成子であり、 $P_\nu(x)$  と  $Q_\nu(x)$  は以下で定義される  $2 \times 2$  行列の場合 ;

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &:= \frac{1}{2\sqrt{2}} [V_\nu^A(x) \tau_A + V_\nu^4(x) \mathbf{1}_2], \quad (A = 1, 2, 3), \\ Q_\nu(x) &:= \frac{1}{2\sqrt{2}} [(V_\nu^5(x) + iV_\nu^6(x)) \mathbf{1}_2 + (V_\nu^7(x) + iV_\nu^8(x)) \tau_3 + (V_\nu^9(x) + iV_\nu^{10}(x)) \tau_1], \end{aligned} \quad (4.23)$$

また、 $\tau_{1,2,3}$  は  $SU(2)_{\text{flavor}}$  のパウリ行列である。

10 個のベクトルボソン場  $V_\nu^\alpha(x)$  と、アイソスピン  $I$ 、バリオン荷  $B$ 、スピンパリティ  $J^P$  で分類される物理的自由度との対応を表 4 にまとめる。また、これ以降の議論では HLS のゲージ固定としてユニタリゲージ

$$\sigma(x) = 0, \quad (4.24)$$

を考える。この時、式 (4.2) でパラメトライズされる HLS の基本変数  $\xi_L(x)$  は

$$\xi_L(x) = \xi^\dagger(\pi), \quad (4.25)$$

表 4: ベクトルボソン場と物理的自由度の対応 (  $(\alpha, \beta) = \{(5, 6), (7, 8), (9, 10)\}$  )

Field	$I$	$B$	$J^P$
$\rho^{1,2,3} = V^{1,2,3}$	1	0	$1^-$
$\omega = V^4$	0	0	$1^-$
$V_{B+} = (V^\beta - iV^\alpha) / \sqrt{2}$	1	+1	$1^+$
$V_{B-} = (V^\beta + iV^\alpha) / \sqrt{2}$	1	-1	$1^+$

と書くことができる。これは式 (3.3) の変換性で定義される商空間  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の代表元であり、この時ラグランジアン (4.14) は次の様書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\text{HLS-}\mathcal{O}(p^2)} \\
&= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [V_{\nu\rho} V^{\nu\rho}] \\
&\quad - \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) + \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) - \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) - 2iV_\nu \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ (D_\nu \Sigma) (D^\nu \Sigma)^\dagger \right] + \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \chi + \chi^\dagger \Sigma^\dagger \right]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

クォーク質量とバリオン化学ポテンシャルの効果はソース場  $\chi$  と  $C_\nu$  の真空期待値をそれぞれ式 (2.26) と (2.30) の形に取ることによって導入される。

ラグランジアン (4.26) のポテンシャルを最小化する場の真空期待値について考える際には、ベクトルボソン  $V_\nu$  の空間成分は有限の真空期待値を持たない、つまり有限密度領域において回転対称性は破れないことを仮定する：

$$\langle V_\nu \rangle_{m_q, \mu_B} := \tilde{V}_\nu = (\tilde{V}_0, \mathbf{0}). \tag{4.27}$$

この仮定の下で、ラグランジアン (4.26) の静的な部分を書き出すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{HLS-}\mathcal{O}(p^2)} &\rightarrow \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \frac{\mu_B}{2} \left( \xi(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\tilde{\pi}) - \xi^\dagger(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \xi(\tilde{\pi}) \right) + 2\tilde{V}_0 \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{\mu_B^2 f_\pi^2}{8} \text{tr} \left[ \tilde{\Sigma} \mathbf{B} \tilde{\Sigma}^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right] + \frac{M_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}_c^\dagger + \Sigma_c \tilde{\Sigma}^\dagger \right] \\
&=: \mathcal{L}_{\text{HLS-static}}, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\xi(\tilde{\pi})$  と  $\tilde{\Sigma}$  は擬 NG ボソン場が真空期待値  $\langle \pi \rangle_{m_q, \mu_B} =: \tilde{\pi}$  を持つことにより式 (3.1) と (3.13) で定義される場が持つ真空期待値を表す。また式 (4.28) の第 3 項において、 $m_q$  と  $M_\pi$  の関係式 (3.23) を用いた書き直しを行った。 $\mathcal{L}_{\text{HLS-static}}$  の  $\tilde{V}_0$  についての停留条件を考えると、その解として

$$\tilde{V}_0 = -\frac{\mu_B}{4} \left( \xi(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\tilde{\pi}) - \xi^\dagger(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \xi(\tilde{\pi}) \right), \tag{4.29}$$

が求まるので、これを再び  $\mathcal{L}_{\text{HLS-static}}$  へ代入することで

$$\mathcal{L}_{\text{HLS-static}}|_{\tilde{V}_0} = \frac{\mu_B^2 f_\pi^2}{8} \text{tr} \left[ \tilde{\Sigma} \mathbf{B} \tilde{\Sigma}^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right] + \frac{M_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}_c^\dagger + \Sigma_c \tilde{\Sigma}^\dagger \right], \tag{4.30}$$



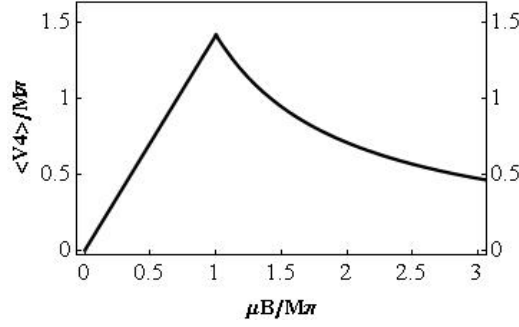


図 6:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による  $\omega$  中間子の真空期待値の変化を示す図。

を得ることができる。これは、前章で議論した擬 NG ボソンに対する有効ラグランジアン (3.27) の静的な部分であり、この部分を最大化（つまりポテンシャルを最小化）するような擬 NG ボソン場の真空期待値は式 (3.38) で与えられる。つまり、 $\mu_B > M_\pi$  において  $\pi_B$  の成分が有限の真空期待値を持ち、 $U(1)_B$  対称性が自発的に破れるような真空配位となる。さらに式 (3.38) を、 $\mathcal{L}_{\text{HLS-static}}$  の  $\tilde{V}_0$  についての停留条件の解 (4.29) へ代入することで

$$\tilde{V}_0 = \sqrt{2}\mu_B \cos \theta S^4 \leftrightarrow \tilde{V}_0^4 = \sqrt{2}\mu_B \cos \theta, \quad (4.31)$$

が得られる。但しここで、 $B$  が式 (C.1) で定義される  $Sp(4)$  の生成子  $S^4$  を用いて

$$B = 2\sqrt{2}S^4, \quad (4.32)$$

と書けることを用いた。これは、ベクトルボソン場  $V^4$ 、つまり  $\omega$  中間子の時間成分が有限密度中において有限の真空期待値を持つことを示している。この振る舞いを図 6 に示す。有限密度で  $\omega$  中間子の時間成分が有限の真空期待値を持つこと自体は、 $SU(3)_{\text{color}}$  QCD においてもよく知られている事実であるが、この場合の特徴的な点として、 $0 < \mu_B < M_\pi$  では密度と共に増加する  $\omega$  中間子の真空期待値が  $\mu_B > M_\pi$  では一転して減少に転ずる、という振る舞いが挙げられる。

#### ベクトルボソン質量の密度依存性

ベクトルボソン質量の密度依存性について考えるために、ユニタリゲージを取った HLS ラグランジアン (4.26) の  $V_\nu$  を含む項；

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-V} &:= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [V_{\nu\rho} V^{\nu\rho}] \\ &\quad - \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) + \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) - \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) - 2iV_\mu \right\}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

について考える。ここで、表記の便宜のため  $\alpha_\nu(\pi)$  という量を

$$\alpha_\nu(\pi) := \frac{1}{2i} \left[ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) + \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) - \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) \right], \quad (4.34)$$

とおき、ゼロ密度でのベクトルボソン質量  $M_V$  を

$$M_V := g f_\sigma, \quad (4.35)$$

と定義すると、 $V_\nu$  のラグランジアン (4.33) は次の様に書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-V} = -\frac{1}{2g^2} \left[ \text{tr} [V_{\nu\rho} V^{\nu\rho}] - 2M_V^2 \text{tr} [(V_\nu - \alpha_\nu(\pi))^2] \right]. \quad (4.36)$$

ここで、ベクトルボソン場の真空期待値 (4.27) の効果を導入するため  $V_\nu$  を

$$V_\nu(x) \rightarrow V_\nu(x) + \tilde{V}_\nu, \quad (4.37)$$

と置きなおし、さらにベクトルボソンと擬 NG ボソンの静止系を考えると<sup>13</sup>、次の様な  $V_\nu$  の 2 次項を得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-V} &\rightarrow -\frac{1}{2g^2} \left\{ \text{tr} [(\partial_\nu V_\rho - \partial_\rho V_\nu)^2] - 4i \text{tr} [\partial_0 V_j [\tilde{V}^0, V^j]] \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{tr} [[V_j, \tilde{V}_0] [V^j, \tilde{V}^0]] - 2M_V^2 \text{tr} [V_j V^j] \right\} \\ &=: \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-V^2}|_{\text{VS, RF}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

式 (4.22) と (4.23) より、 $\mathcal{O}(V_\nu^2)$  のラグランジアン (4.38) はベクトルボソン場  $V_\nu^\alpha(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-V^2}|_{\text{VS, RF}} &= \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^A)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4)^2} \\ &\quad + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{5,6})^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{7,8})^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{9,10})^2}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

と書くことができる。但しここで、

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^A)^2} := -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu V_\rho^A \cdot \partial^\nu V^{A\rho} - \partial_\nu V_\rho^A \cdot \partial^\rho V^{A\nu}) - M_V^2 V_j^A V^{Aj} \right\}, \quad (A = 1, 2, 3), \quad (4.40)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4)^2} := -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\nu V^{4\rho} - \partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\rho V^{4\nu}) - M_V^2 V_j^4 V^{4j} \right\}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{\alpha,\beta})^2} &:= -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu V_\rho^\alpha \cdot \partial^\nu V^{\alpha\rho} - \partial_\nu V_\rho^\alpha \cdot \partial^\rho V^{\alpha\nu}) + (\partial_\nu V_\rho^\beta \cdot \partial^\nu V^{\beta\rho} - \partial_\nu V_\rho^\beta \cdot \partial^\rho V^{\beta\nu}) \right. \\ &\quad \left. + 2\mu_B \cos \theta (\partial_0 V_j^\alpha \cdot V^{\beta j} - \partial_0 V_j^\beta \cdot V^{\alpha j}) - M_{V^\alpha}^2 V_j^\alpha V^{\alpha j} + M_{V^\beta}^2 V_j^\beta V^{\beta j} \right\}, \\ &\quad ((\alpha, \beta) = \{(5, 6), (7, 8), (9, 10)\}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

<sup>13</sup> 静止系を仮定しない場合には、ラグランジアン (4.36) の  $V_\nu$  と  $\alpha_\nu(\pi)$  の交差項からベクトルボソンと微分の作用する擬 NG ボソンの相互作用項が現れる。

であり、 $M_{V\alpha,\beta}^2$  を以下のように定義した。

$$M_{V\alpha}^2 = M_{V\beta}^2 := M_V^2 - \mu_B^2 \cos^2 \theta, \quad ((\alpha, \beta) = \{ (5, 6), (7, 8), (9, 10) \}). \quad (4.43)$$

また、式 (4.42) については、以下の議論では  $(V_\nu^5, V_\nu^6)$  成分をその代表として考えていくことにする。表 4 より、 $V_\nu^A(x)$  は  $\rho$  中間子、 $V_\nu^4(x)$  は  $\omega$  中間子、 $V_\nu^{5,6}(x)$  はバリオン荷を持つベクトルボソン  $V_{B\pm}$  にそれぞれ対応することに注意すると、式 (4.39) は、 $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  が破れた相においてもこれら 3 つのボソンが混合しないことを表している。特に同じアイソスピン 3 重項である  $\rho$  中間子と  $V_{B\pm}$  が混合しないのは、この相においてもパリティが破れていないことを反映した結果となっている。

ベクトルボソン質量の密度依存性を具体的に調べるために、 $V_\nu^\alpha(x)$  のフーリエ変換

$$V_\nu^\alpha(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{V}_\nu^\alpha(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (\alpha = 1, \dots, 10), \quad (4.44)$$

をラグランジアン (4.40)、(4.41) と (4.42) の作用積分へ代入し、空間運動量成分をゼロとしたものを考える。この時、 $V^A(x)$  については

$$\int d^4 x \mathcal{L}_{O(p^2)-(V^A)^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} = -\frac{1}{2g^2} \hat{V}_j^A(-E) [E^2 - M_V^2] \hat{V}^{Aj}(E), \quad (4.45)$$

より、ゼロ運動量での分散関係が

$$E^2 - M_V^2 = 0, \quad \leftrightarrow \quad E^2 = M_V^2, \quad (4.46)$$

として求まる。よって、式 (4.46) の  $E > 0$  となる解として、 $\rho$  中間子の質量  $m_\rho$  を次の様に求めることができる。

$$m_\rho = M_V, \quad (4.47)$$

これは  $V^4(x)$ 、つまり  $\omega$  中間子についても全く同様であり、

$$m_\omega = M_V, \quad (4.48)$$

となる。次に  $V^{5,6}_\nu(x)$  について考えると

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \mathcal{L}_{O(p^2)-(V^{5,6})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\ &= \frac{-1}{2g^2} \left( \hat{V}_j^{5\dagger}(E), \hat{V}_j^{6\dagger}(E) \right) \begin{pmatrix} E^2 - M_V^2 + \mu_B^2 \cos^2 \theta & i2E\mu_B \cos \theta \\ -i2E\mu_B \cos \theta & E^2 - M_V^2 + \mu_B^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}^{5j}(E) \\ \hat{V}^{6j}(E) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。ここで、以下の様な場の取り直しを考える。

$$\hat{V}_{B+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{V}^6 - i\hat{V}^5), \quad \hat{V}_{B-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{V}^6 + i\hat{V}^5). \quad (4.50)$$

この時、式 (4.49) は  $\hat{V}_{B\pm}$  を用いて

$$\begin{aligned} & \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{5,6})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\ &= \frac{-1}{2g^2} \left( \hat{V}_{B+j}^\dagger(E), \hat{V}_{B-j}^\dagger(E) \right) \begin{pmatrix} (E + \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 & 0 \\ 0 & (E - \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_{B+}^j(E) \\ \hat{V}_{B-}^j(E) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

と書くことができ、 $\hat{V}_{B+}$  と  $\hat{V}_{B-}$  のそれぞれについてゼロ運動量での分散関係を独立に求めることができる：

$$(E \pm \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 = 0, \leftrightarrow E = \mp \mu_B \cos \theta \pm M_V, \quad (\text{複号同順}), \quad (4.52)$$

よって、式 (4.52) の  $E > 0$  に対する解として、ベクトルボソン  $V_{B\pm}$  の質量の密度依存性  $m_{V_{B\pm}}$  を次の様に求めることができる。

$$m_{V_{B+}} = -\mu_B \cos \theta + M_V, \quad m_{V_{B-}} = \mu_B \cos \theta + M_V, \quad (4.53)$$

ただしここでは  $M_V > M_\pi$ 、つまり  $M_V > \mu_B \cos \theta$  であることを仮定している<sup>14</sup>。

ここまでの内容から読み取れるベクトルボソン質量の密度依存性の特徴を以下にまとめる。

♠ 式 (4.47) と (4.48) より、 $\rho$  中間子質量  $m_\rho$  と  $\omega$  中間子質量  $m_\omega$  は密度依存性を持たず、 $M_V$  のままで一定であることが分かる。(図 7(a) 参照。)

◇ 式 (4.53) より、バリオン荷を持つベクトルボソン  $V_{B-}$  は  $0 < \mu_B < M_\pi$  では密度の上昇と共に質量が増加するが、 $\mu_B > M_\pi$  では一転して密度の上昇と共に質量が減少し  $\mu_B/M_\pi \rightarrow \infty$  でゼロ密度の質量  $M_V$  へ漸近する。一方、 $V_{B+}$  の質量は  $V_{B-}$  とは逆の振る舞いを示す。(図 7(b) 参照。) これは、 $V_{B\pm}$  の質量の密度依存性が有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  における  $U(1)_B$  対称性の自発的破れの相転移を示すシグナルとなり得ることを表している。

♣ 式 (4.51) より、 $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  対称性が自発的に破れた領域においても、 $\hat{V}_{B+}$  と  $\hat{V}_{B-}$  のゼロ運動量での分散関係はそれぞれ独立に求めることができる。これは  $U(1)_B$  が破れた領域においても  $V_{B\pm}$  が混合しないことを表している。(式 (3.61) より、バリオン荷を持つ擬 NG ボソン  $\pi_{B\pm}$  がこの領域では混合していたのと対照的である。) これはベクトルボソンと擬 NG ボソンの静止系を考えたために起こる特有の現象であり、有限運動量を考えた場合には HLS ラグランジアンから  $V_{B+}^j (\partial_j \pi) \pi_{B-}$  と  $V_{B-}^j (\partial_j \pi) \pi_{B+}$  という相互作用項が現れ、 $\mu_B > M_\pi$  において  $\pi_{B\pm}$  が有限真空期待値を持つことで  $V_{B\pm}$  の混合が引き起こされる。

上記で議論したベクトルボソン質量の密度依存性を、 $M_V/M_\pi = 4$  の場合を例にプロットしたものが図 7 である。

<sup>14</sup>仮に  $M_V < M_\pi$  とした場合、式 (4.53) より  $\mu_B = M_\pi$  ( $\leftrightarrow \cos \theta = 1$ ) において  $m_{V_{B+}} < 0$  となるため、このような場合は考えないことにする。

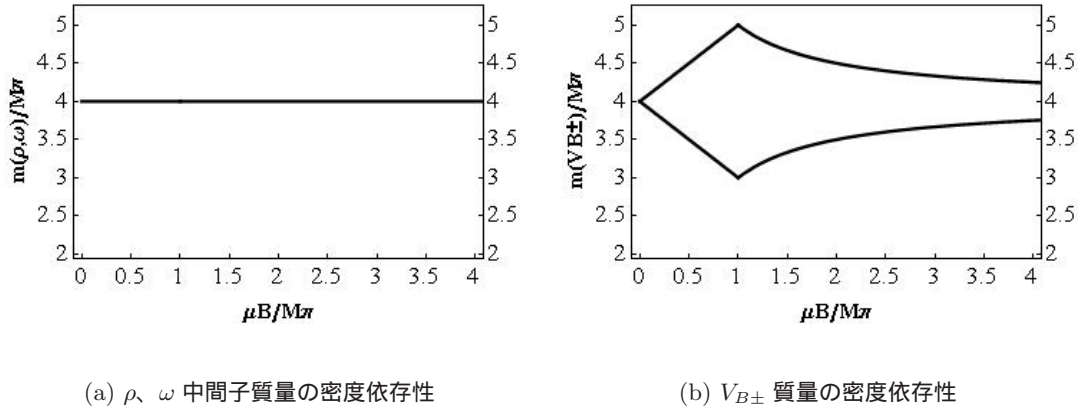


図 7:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  によるベクトルボソン質量の変化を示す図。ここでは、ゼロ密度でのベクトルボソン質量と擬 NG ボソン質量の比を  $M_V/M_\pi = 4$ 、HLS のゲージ結合定数  $g = 1$  とした。

### 4.3 HLS の高次項の効果

この節では、HLS の高次項がベクトルボソン質量の密度依存性に与える影響について議論する。HLS のゲージ対称性により、カイラル対称性の自発的破れのスケールよりもベクトルボソン質量が軽い場合には、カイラル摂動論の拡張として擬 NG ボソンに加えてベクトルボソンを含めた有効ラグランジアン of 系統的な微分展開が可能となる。 $SU(3)_{\text{color}}$  QCD においてこの「HLS の枠組みにおけるカイラル摂動論」は  $\pi$ - $\rho$  系の現象を良く説明できる手法として幅広く用いられている。[31, 46, 47, 48, 49] 本研究では、この微分展開のカウンティングルールを  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD に適用する。この時、一般的な  $\mathcal{O}(p^4)$  HLS ラグランジアンとして 32 個の項を構成することができる。[31, 49] この具体的な表式は付録 E に記す。

式 (4.27) で考えた様に、ベクトルボソン場  $V_\nu$  の空間成分が有限の真空期待値を持たないことを仮定すると、 $\mathcal{O}(p^2)$  HLS ラグランジアン of 真空配位を変えずにベクトルボソン質量へ影響を与えるような高次項の組み合わせとして、次の 3 つを考えることができる。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-1}^{\text{HLS}} := \bar{y}_1 \text{tr} \left[ \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} - \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} \right], \quad (4.54)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-2}^{\text{HLS}} := \bar{y}_2 \text{tr} \left[ \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} - \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \right], \quad (4.55)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-3}^{\text{HLS}} := \bar{y}_3 \text{tr} \left[ \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\rho} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} - \frac{1}{2} \left( \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \hat{\alpha}_{\perp\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\rho} + \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\rho} \hat{\alpha}_{\perp}^{\rho} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \right) \right], \quad (4.56)$$

ここで、 $\bar{y}_1$ 、 $\bar{y}_2$ 、 $\bar{y}_3$  は HLS の対称性からは決めることのできない係数である。

以下では、 $N_f = 2$  の場合に、HLS の高次項 (4.54)-(4.56) がベクトルボソン質量の密度依存性へ与える影響について具体的に考えていく。擬 NG ボソン場の真空期待値が式 (3.38)、

ベクトルボソン場  $V_\nu$  の真空期待値が式 (4.31) で与えられる時、式 (4.11) で定義される  $\hat{\alpha}_{\parallel, \perp \nu}$  は次の様な真空期待値を持つ。

$$\langle \hat{\alpha}_{\parallel \nu} \rangle_{m_q, \mu_B} = 0, \quad \langle \hat{\alpha}_{\perp \nu} \rangle_{m_q, \mu_B} = \sqrt{2} \mu_B \delta_{\nu 0} \sin \theta X^4, \quad (4.57)$$

ここで  $X^4$  は式 (C.5) で定義される  $SU(4)/Sp(4)$  の破れた生成子である。この真空期待値の効果を導入するために  $\hat{\alpha}_{\perp \mu}$  を

$$\hat{\alpha}_{\perp \mu} \rightarrow \hat{\alpha}_{\perp \mu} + \langle \hat{\alpha}_{\perp \mu} \rangle_{m_q, \mu_B}, \quad (4.58)$$

と置きなおし、さらにベクトルボソンと擬 NG ボソンの静止系を考えると、式 (4.54)-(4.56) から

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-1}^{\text{HLS}} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-2}^{\text{HLS}} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-3}^{\text{HLS}} \\ & \rightarrow 2\mu_B^2 \sin^2 \theta (\bar{y}_1 \text{tr} [X^4 X^4 V_j V^j] + \bar{y}_3 \text{tr} [X^4 V_j X^4 V^j]) \\ & =: \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-V^2}|_{\text{VS, RF}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

という  $V_\nu$  の 2 次項を得ることができ、これはベクトルボソン場の成分  $V_\nu^\alpha(x)$  を用いて

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-V^2}|_{\text{VS, RF}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{A'})^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{4'})^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{5,6'})^2}, \quad (4.60)$$

と書くことができる。但しここで、 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{A'})^2}$ 、 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{4'})^2}$  と  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{5,6'})^2}$  をそれぞれ

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^A)^2} := \frac{\mu_B^2 \sin^2 \theta}{8} (\bar{y}_1 + \bar{y}_3) V_j^A V^{Aj}, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^4)^2} := \frac{\mu_B^2 \sin^2 \theta}{8} (\bar{y}_1 - \bar{y}_3) V_j^4 V^{4j}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{5,6})^2} := \frac{\mu_B^2 \sin^2 \theta}{8} \{ (\bar{y}_1 + \bar{y}_3) V_j^5 V^{5j} + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3) V_j^6 V^{6j} \}, \quad (4.63)$$

と定義した。またベクトルボソン場  $V_\nu^\alpha(x)$  ( $\alpha = 5, \dots, 10$ ) については  $\alpha = 5, 6$  成分のみをその代表として書き下している。

以上より、HLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  の高次項を含むベクトルボソン場の 2 次項は、式 (4.40)-(4.42) に式 (4.61)-(4.63) をそれぞれ付け加えたものとして以下の様を書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^A)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^A)^2} &= -\frac{1}{2g^2} \{ (\partial_\nu V_\rho^A \cdot \partial^\nu V^{A\rho} - \partial_\nu V_\rho^A \cdot \partial^\rho V^{A\nu}) - M_{\rho'}^2 V_j^A V^{Aj} \} \\ &=: \mathcal{L}_{(V^{A'})^2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^4)^2} &= -\frac{1}{2g^2} \{ (\partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\nu V^{4\rho} - \partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\rho V^{4\nu}) - M_{\omega'}^2 V_j^4 V^{4j} \} \\ &=: \mathcal{L}_{(V^{4'})^2}, \end{aligned} \quad (4.65)$$



$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{5,6})^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^4)-(V^{5,6})^2} \\
&= -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu V_\rho^5 \cdot \partial^\nu V^{5\rho} - \partial_\nu V_\rho^5 \cdot \partial^\rho V^{5\nu}) + (\partial_\nu V_\rho^6 \cdot \partial^\nu V^{6\rho} - \partial_\nu V_\rho^6 \cdot \partial^\rho V^{6\nu}) \right. \\
&\quad \left. + 2\mu_B \cos \theta (\partial_0 V_j^5 \cdot V^{6j} - \partial_0 V_j^6 \cdot V^{5j}) - M_{V^5}^2 V_j^5 V^{5j} + M_{V^6}^2 V_j^6 V^{6j} \right\} \\
&=: \mathcal{L}_{(V^{5,6'})^2}, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

但しここで、 $M_{\rho'}^2$ 、 $M_{\omega'}^2$ 、 $M_{V^5}^2$  と  $M_{V^6}^2$  をそれぞれ以下の様に定義した。

$$M_{\rho'}^2 = M_{V^5}^2 := M_V^2 + \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2, \tag{4.67}$$

$$M_{\omega'}^2 = M_{V^6}^2 := M_V^2 + \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2. \tag{4.68}$$

前節と同様に、 $V_\nu^\alpha(x)$  のフーリエ変換 (4.44) をラグランジアン (4.64) と (4.65) の作用積分へ代入し、空間運動量成分をゼロとした場合の分散関係について考えると、 $\rho$  中間子と  $\omega$  中間子については次の様な質量の密度依存性を求めることができる。

$$m_{\rho'} = M_{\rho'} = \sqrt{M_V^2 + \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2}, \quad (\because (4.67)), \tag{4.69}$$

$$m_{\omega'} = M_{\omega'} = \sqrt{M_V^2 + \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2}, \quad (\because (4.68)) \tag{4.70}$$

一方、 $V_\nu^\alpha(x)$  のフーリエ変換 (4.44) をラグランジアン (4.66) の作用積分へ代入し、空間運動量成分をゼロにしたものを考えると、次の様になる。

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \mathcal{L}_{(V^{5,6'})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\
&= \frac{-1}{2g^2} \left( \hat{V}_j^{5\dagger}(E), \hat{V}_j^{6\dagger}(E) \right) \begin{pmatrix} E^2 - M_{V^5}^2 + \mu_B^2 \cos^2 \theta & i2E\mu_B \cos \theta \\ -i2E\mu_B \cos \theta & E^2 - M_{V^6}^2 + \mu_B^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}^{5j}(E) \\ \hat{V}^{6j}(E) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2g^2} \left( \hat{V}_{B+j}^\dagger(E), \hat{V}_{B-j}^\dagger(E) \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} (E + \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 - \frac{\bar{y}_1}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2 & \frac{\bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2 \\ \frac{\bar{y}_3}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2 & (E - \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 - \frac{\bar{y}_1}{4} (g\mu_B \sin \theta)^2 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \hat{V}_{B+}^j(E) \\ \hat{V}_{B-}^j(E) \end{pmatrix}, \\
&(\because (4.50), (4.67), (4.68)). \tag{4.71}
\end{aligned}$$

式 (4.69)、(4.70)、(4.71) より、HLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  項が与えるベクトルボソン質量への補正には全て  $\sin \theta$  が含まれており、これは、ここで考えているベクトルボソン質量への高次項の効果は全て  $\mu_B > M_\mu$  の  $U(1)_B$  が自発的に破れた相で現れることを意味している ( $\because$  (3.30))。また、(4.71) より  $\mu_B > M_\pi$  では  $\hat{V}_{B+}$  と  $\hat{V}_{B-}$  のそれぞれについてゼロ運動量での分散関

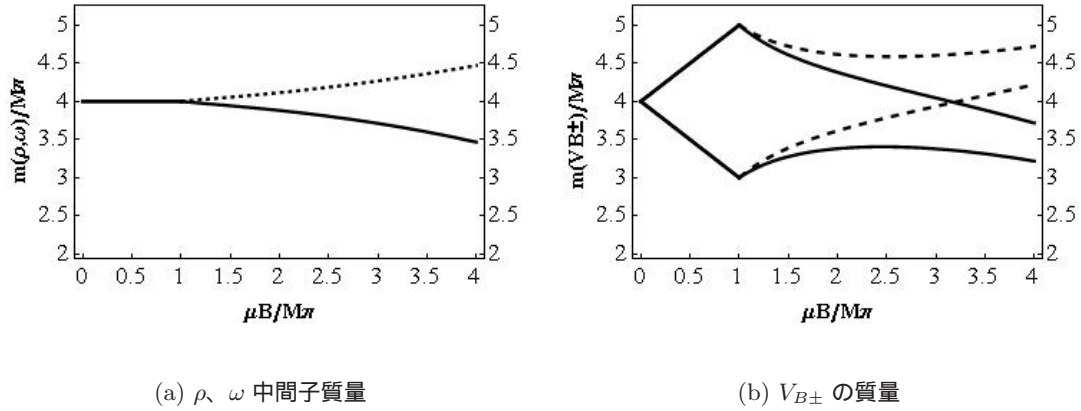


図 8: HLS の高次項の効果を加えたベクトルボソン質量の密度依存性を示す図その 1。ここでは、 $M_V/M_\pi = 4$ 、 $\bar{y}_1 = \pm 1$ 、 $\bar{y}_3 = 0$ 、 $g = 1$  というパラメタを選んでいる。実線のグラフが  $\bar{y}_1 = -1$ 、点線のグラフが  $\bar{y}_1 = 1$  にそれぞれ対応している。

係を独立に求めることはできず、この領域において 2 つの状態は混合していることが分かる。ここで注目すべきなのが、この  $\hat{V}_{B\pm}$  の混合の大きさが、 $\rho$  中間子質量、 $\omega$  中間子質量の密度依存性と以下の様に関係づけられる点である：

$$m_{\rho'}^2 - m_{\omega'}^2 = \frac{\bar{y}_3}{2} (g\mu_B \sin \theta)^2, \quad (\because (4.69), (4.70)). \quad (4.72)$$

これは、今考えている 2 種類の粒子（擬 NG ボソン（表 2）とベクトルボソン（表 4））に比べてその他のボソンが十分に重い場合に、カイラル対称性の破れのパターンのみから決まる非自明な関係である。よって、これら 2 種類の粒子のみが軽い有効自由度となる状況、つまり軽いクォーク質量での  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD 計算で密度の変化による関係式 (4.72) の成り立ちを調べた時、この関係式が破綻する密度において、新たな相転移現象が示唆できると考えられる。

HLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  項がベクトルボソン質量の密度依存性に与える影響を以下にまとめる。

♠ 式 (4.59) より、 $X^4 X^4 \propto 1_4$  であることから、 $\bar{y}_1 \neq 0$ 、 $\bar{y}_3 = 0$  という係数の取り方は全てのベクトルボソン質量の密度依存性に等しく正負の影響を与えるような取り方であることが分かる。実際、式 (4.69) と (4.70) より、 $\bar{y}_3 = 0$ 、 $\bar{y}_1 < 0$  とおくと  $m_{\rho'}$  と  $m_{\omega'}$  は縮退し、 $\mu_B > M_\pi$  においてゼロ密度での質量  $M_V$  から減少することが分かる。また、式 (4.71) より、 $\bar{y}_3 = 0$  の場合には  $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  が自発的に破れた相においても  $V_{B\pm}$  は混合しないことが分かる。一方、 $\bar{y}_3 = 0$ 、 $\bar{y}_1 > 0$  の場合には全てのベクトルボソン質量の密度依存性に正の効果が与えられる。これらをまとめたのが図 8 である。

◇ 次に、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD の計算結果 [27] と比較するために、擬 NG ボソンとベクトルボソンの質量比が小さい、 $M_V/M_\pi = 5/4$  という場合を考える。これは、クォーク質量が重い状況に対応している。文献 [27] によると、 $\rho$  中間子と  $\omega$  中間子の質量は縮退しており、 $\mu_B < M_\pi$  においてその質量はほぼ一定で  $M_\pi < \mu_B < 5M_\pi/4$  において

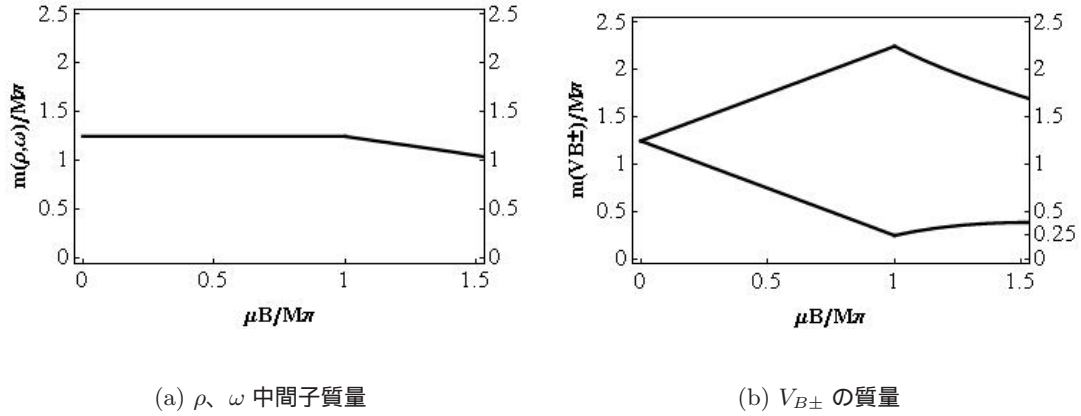


図 9: HLS の高次項の効果を加えたベクトルボソン質量の密度依存性を示す図その 2。ここでは、 $M_V/M_\pi = 5/4$ 、 $\bar{y}_1 = -1$ 、 $\bar{y}_3 = 0$ 、 $g = 1$  というパラメタを選んでいる。

2つの質量は減少する。 $(\mu_B > 5M_\pi/4)$ においては、 $\rho$  中間子質量は減少し続けるが  $\omega$  中間子はノイズのために質量が測定不可能になる、と記されている。) この格子 QCD 計算と我々の模型の結果を比較するためにプロットしたのが図 6 である。この図においては、格子 QCD 計算における  $\rho$  中間子と  $\omega$  中間子の質量縮退を再現するために  $\bar{y}_3 = 0$ 、 $\mu_B > M_\pi$  における  $\rho$  中間子の質量減少を再現するために  $\bar{y}_1 = -1$  という係数を取っている。この時  $\mu_B > M_\pi$  において、 $V_{B+}$  は  $\mu_B$  の増加と共に質量が減少し、 $V_{B-}$  は  $\mu_B$  の増加と共に質量が増加する、という振る舞いを得た。しかし  $V_{B+}$  については、格子 QCD 計算ではその質量が  $\mu_B > M_\pi$  の直後はほぼ一定でその後密度の増加と共に緩やかに減少することが測定されており、これは我々の結果と一致していない。また、 $V_{B-}$  については、格子 QCD では数値計算上の困難から質量の測定がなされていない。

♣ 最後に、 $\bar{y}_3$  がベクトルボソン質量に与える影響について考える。式 (4.71) から分かるように、 $\bar{y}_3$  は  $\mu_B > M_\pi$  において  $V_{B\pm}$  を混合する効果を与えるため、この領域において  $m_{V_{B+}}$  はより軽く、 $m_{V_{B-}}$  はより重くなる。これと同時に、正の  $\bar{y}_3$  は  $m_{\rho'}$  に正、 $m_{\omega'}$  に負の影響を、負の  $\bar{y}_3$  はその逆の影響を、というように  $m_{\rho'}$  と  $m_{\omega'}$  にそれぞれ逆の効果を与えることによって2つの中間子の質量差を生む役割を果たす。この例として、 $\rho$  中間子の質量減少が格子 QCD の結果 [27] を再現するように  $\bar{y}_1 = -4/5$ 、 $\bar{y}_3 = 1/4$ 、 $M_V/M_\pi = 5/4$ 、 $g = 1$  というパラメタを取った場合のベクトルボソン質量の密度依存性を図 10 に示す。この時、 $\mu_B/M_\pi = 1.5$  において図 9(b) よりも  $V_{B+}$  の質量がわずかに減少していることが分かるが、 $\mu_B > M_\pi$  における  $m_\rho$  と  $m_\omega$  の縮退は無くなる。また、 $\bar{y}_3$  の値をより大きく取ることによって  $\mu_B/M_\pi = 1.5$  における  $m_{V_{B+}}$  は小さくなるが、この場合  $m_\rho$  と  $m_\omega$  の差がより大きくなってしまい、やはり文献 [27] の結果と矛盾することになる。これは、この HLS 模型では格子 QCD 計算の結果を再現できないことを表している。

ここまでの議論では、クォーク質量が重い場合の格子 QCD 計算 [27] との比較のために、擬 NG ボソンとベクトルボソンの質量比が小さい状況 ( $M_V/M_\pi = 5/4$ ) を考えてきた。しかし、一般にクォーク質量が重い場合には、ベクトルボソンと軸性ベクトルボソンの質

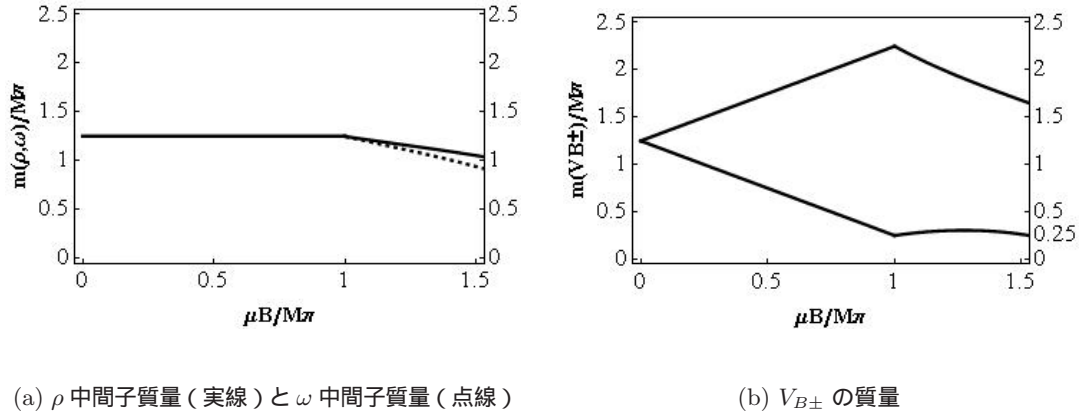


図 10: HLS の高次項の効果を加えたベクトルボソン質量の密度依存性を示す図その 3。ここでは、 $M_V/M_\pi = 5/4$ 、 $\bar{y}_1 = -5/4$ 、 $\bar{y}_3 = 1/4$ 、 $g = 1$  というパラメタを選んでいる。

量も近づくことが考えられる。実際、格子 QCD 計算 [27] では  $M_A \simeq \sqrt{2}M_V$  ( $M_A$  はゼロ密度での軸性ベクトルボソン質量) という質量での軸性ベクトルボソンが測定されている。今考えている HLS 模型での一番重いボソン質量は、 $\mu_B = M_\pi$  における  $m_{V_{B-}} = M_\pi + M_V$  であり、これは  $m_{V_{B+}} > M_A$  となることを示している。よって、格子 QCD 計算の結果 [27] との詳細な比較のためには軸性ベクトルボソンの効果も考える必要があり、この効果によって、ここまで議論した HLS 模型での結果が変わることが考えられる。この部分については、次章で改めて議論をする。

## 5 (軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性

この章ではここまで議論した内容の発展研究として、 $N_f = 2$  におけるベクトルボソンと軸性ベクトルボソン質量の密度依存性について議論する。まず、一般化された隠れた局所対称性 (Generalized Hidden Local Symmetry : GHLS) [30, 52, 53, 54] の枠組みに基づき、カイラル対称性の自発的破れの下で現れる擬 NG ボソンに加えて、ベクトルボソンと軸性ベクトルボソンを含む有効ラグランジアンを構成する。次に、このラグランジアンの有限密度中での真空構造を調べることで、 $\mu_B > M_\pi$  における擬 NG ボソンの凝縮に伴い、バリオン荷を持つ軸性ベクトルボソンの時間成分が有限の真空期待値を持つことを確認する。そしてこの真空構造の下で、まず GHLS の微分展開の最低次 ( $\mathcal{O}(p^2)$ ) の有効ラグランジアンにおける (軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性を解析し、 $\mu_B > M_\pi$  において軸性ベクトルボソンとの混合によりベクトルボソン質量の密度依存性が HLS の場合と比べて変化することを確認する。

### 5.1 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times SU(2N_f)_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の構成

この模型における基本変数を  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_M(x)$  とおき、これが  $\xi_{L,M}\xi_{L,M}^\dagger = \xi_{L,M}^\dagger\xi_{L,M} = \mathbf{1}_{2N}$  を満たす  $2N_f \times 2N_f$  のユニタリ行列であり、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times SU(2N_f)_{\text{local}}$  (以下ではこの対称性を「GHLS」言うことにする。)の下で次の様に変換するとする。

$$\begin{aligned}\xi_L &\rightarrow \tilde{g}\xi_L g^\dagger, \\ \xi_M &\rightarrow \tilde{g}\xi_M \bar{\Sigma} g^T \bar{\Sigma}^\dagger, \end{aligned} \quad (g \in SU(2N_f)_{\text{chiral}}, \tilde{g} \in SU(2N_f)_{\text{local}}). \quad (5.1)$$

この2つの変数を次の様にパラメトライズする。

$$\xi_L(x) = \xi(p)\xi(\sigma)\xi^\dagger(\pi) = \exp\left[\frac{i}{f_p}p^a(x)X^a\right] \exp\left[\frac{i}{f_\sigma}\sigma^\alpha(x)S^\alpha\right] \exp\left[\frac{-i}{f_\pi}\pi^a(x)X^a\right], \quad (5.2)$$

$$\xi_M(x) = \xi^2(p) = \exp\left[\frac{2i}{f_p}p^a(x)X^a\right], \quad (5.3)$$

ここで  $S^\alpha$  は  $SU(2N_f)$  の部分群  $Sp(2N_f)$  の生成子、 $X^a$  はその破れた生成子であり、それぞれ式 (A.4) と (A.6) の性質を満たす。また、ラグランジアン of 構成の便宜のために  $\xi_L(x)$  を用いて定義される場  $\xi_R(x)$  を導入する：

$$\xi_R(x) := \bar{\Sigma} \left( \xi_L^\dagger(x) \right)^T \bar{\Sigma}^\dagger = \xi^\dagger(p)\xi(\sigma)\xi(\pi). \quad (5.4)$$

この時、 $\xi_R(x)$  は GHLS の下で次の様に変換する。

$$\xi_R \rightarrow \bar{\Sigma} (\tilde{g}^T)^\dagger \bar{\Sigma}^\dagger \xi_R \bar{\Sigma} g^T \bar{\Sigma}^\dagger, \quad (5.5)$$

$SU(2N_f)_{\text{local}}$  に対応するゲージ場を導入するために、 $\xi_{L,R,M}$  に対して以下の様な共変微分を考える。

$$\begin{aligned}D_\nu \xi_L &:= \partial_\nu \xi_L - iG_\nu \xi_L + i\xi_L C_\nu, \\ D_\nu \xi_R &:= \partial_\nu \xi_R + i\bar{\Sigma} G_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi_R - i\xi_R \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger, \\ D_\nu \xi_M &:= \partial_\nu \xi_M - iG_\nu \xi_M - i\xi_M \bar{\Sigma} G_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger, \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここで、 $G_\nu = G_\nu^A T^A$  は  $SU(2N_f)_{\text{local}}$  に対応するゲージ場 ((軸性)ベクトルボソン) であり、 $C_\nu = C_\nu^A T^A$  は  $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  に対応する外場としてのゲージ場である。(  $T^A$  は  $SU(2N)$  の生成子である。) 共変微分  $D_\nu \xi_{L,R,M}$  が  $\xi_{L,R,M}$  の変換性 (5.1) と (5.5) を満たすために、 $G_\nu$  と  $C_\nu$  の変換性は

$$\begin{aligned}G_\nu &\rightarrow G'_\nu = \tilde{g} G_\nu \tilde{g}^\dagger + i\tilde{g} \cdot \partial_\nu \tilde{g}^\dagger, \\ C_\nu &\rightarrow C'_\nu = g C_\nu g^\dagger + ig \cdot \partial_\nu g^\dagger, \end{aligned} \quad (5.7)$$

と定められる。この時、 $\xi_{L,M}$  のそれぞれに対する共変化された Maurer-Cartan 1-form を

$$\hat{\alpha}_{L\nu} := \frac{1}{i} D_\nu \xi_L \cdot \xi_L^\dagger, \quad \hat{\alpha}_{M\nu} := \frac{1}{i} D_\nu \xi_M \cdot \xi_M^\dagger, \quad (5.8)$$

と定義すると、これは GHLS の下で

$$\hat{\alpha}_{L,M\nu} \rightarrow \hat{\alpha}'_{L,M\nu} = \tilde{g} (\hat{\alpha}_{L,M\nu}) \tilde{g}^\dagger, \quad (5.9)$$

という  $\tilde{g} \in SU(2N_f)_{\text{local}}$  についての斉次的な変換性を示す。この時、 $\hat{\alpha}_{L,M\nu}$  は式 (3.6) や (4.9) と同じ方法で商空間  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の垂直成分と並行成分に分解することができないため、 $\hat{\alpha}_{L,M\nu}^G$  という量を次の様に定義する：

$$\hat{\alpha}_{L,M\nu}^G := \xi_{pL} (\hat{\alpha}_{L,M\nu}) \xi_{pL}^\dagger, \quad (5.10)$$

ここで、 $\xi_{pL}$  は  $\xi_M$  をその中に含まれる  $Sp(2N_f)$  の自由度<sup>15</sup> を用いて更に割り込むことで定義される量；

$$\xi_M = \xi_{pL}^\dagger \xi_{pR}, \quad \left( \xi_{pR} := \bar{\Sigma} \left( \xi_{pL}^\dagger \right)^T \bar{\Sigma}^\dagger \right), \quad (5.11)$$

であり、この GHLS の下での変換性は次の様に与えられる：

$$\xi_{pL} \rightarrow h(p, \tilde{g}) \xi_{pL} \tilde{g}^\dagger, \quad (h(p, \tilde{g}) \in Sp(2N_f)). \quad (5.12)$$

$\xi_M(x)$  のパラメトリゼーション (5.3) の下で  $\xi_{pL}$  は

$$\xi_{pL}(x) = \xi_{pR}^\dagger(x) = \xi^\dagger(p) = \exp \left[ \frac{-i}{f_p} p^a(x) X^a \right], \quad (5.13)$$

とパラメトライズされる。この時、 $\hat{\alpha}_{L\nu}^G$  は GHLS の下で

$$\hat{\alpha}_{L\nu}^G \rightarrow h(p, \tilde{g}) (\hat{\alpha}_{L\nu}^G) h^\dagger(p, \tilde{g}). \quad (5.14)$$

として  $h(p, \tilde{g}) \in Sp(2N_f)$  について斉次的に変換するので、これを  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の並行成分と垂直成分に

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{L\nu}^G &= \frac{1}{2} \left[ \hat{\alpha}_{L\nu}^G + \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{L\nu}^G)^T \bar{\Sigma} \right] + \frac{1}{2} \left[ \hat{\alpha}_{L\nu}^G - \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{L\nu}^G)^T \bar{\Sigma} \right] \\ &=: \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^G - \hat{\alpha}_{\perp\nu}^G, \end{aligned} \quad (5.15)$$

と分解することができ、このそれぞれが GHLS の下で斉次的な変換性を持つ：

$$\hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu}^G \rightarrow h(p, \tilde{g}) (\hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu}^G) h^\dagger(p, \tilde{g}). \quad (5.16)$$

また、 $\hat{\alpha}_{\parallel,\perp\nu}^G$  は変数  $\xi_{L,R,M}$  と  $\xi_{pL}$  を用いて次の様に書くことができる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^G &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{L\nu}^G)^T \bar{\Sigma} + \hat{\alpha}_{L\nu}^G \right] = \frac{1}{2} \xi_{pL} \left( \xi_M \hat{\alpha}_{R\nu} \xi_M^\dagger + \hat{\alpha}_{L\nu} \right) \xi_{pL}^\dagger, \\ \hat{\alpha}_{\perp\nu}^G &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{L\nu}^G)^T \bar{\Sigma} - \hat{\alpha}_{L\nu}^G \right] = \frac{1}{2} \xi_{pL} \left( \xi_M \hat{\alpha}_{R\nu} \xi_M^\dagger - \hat{\alpha}_{L\nu} \right) \xi_{pL}^\dagger, \end{aligned} \quad (5.17)$$

<sup>15</sup>GHLS を更に拡張した枠組みでは、これは  $\rho'$  中間子に対応する局所的対称性となる。



表 5: GHLS ラグランジアンの変換要素の変換性

構成要素	$P$	$C$	GHLS
$\hat{\alpha}_{\parallel}^{G\nu}$	$(\Omega\Sigma_c)\hat{\alpha}_{\parallel\nu}^G(\Omega\Sigma_c)$	$-(\hat{\alpha}_{\parallel}^{G\nu})^T$	$h(s, p)\hat{\alpha}_{\parallel}^{G\nu}h^\dagger(s, p)$
$\hat{\alpha}_{\perp, M}^{G\nu}$	$-(\Omega\Sigma_c)\hat{\alpha}_{\perp, M\nu}^G(\Omega\Sigma_c)$	$(\hat{\alpha}_{\perp, M}^{G\nu})^T$	$h(s, p)\hat{\alpha}_{\perp, M}^{G\nu}h^\dagger(s, p)$
$\hat{\chi}^G$	$(\Omega\Sigma_c)(\hat{\chi}^G)^\dagger(\Omega\Sigma_c)$	$(\hat{\chi}^G)^T$	$h(s, p)\hat{\chi}^Gh^\dagger(s, p)$

但しここで、1-form  $\hat{\alpha}_{R\nu}$  を

$$\hat{\alpha}_{R\mu} := \frac{1}{i} D_\mu \xi_R \cdot \xi_R^\dagger, \quad (5.18)$$

と定義した。 $\hat{\alpha}_{M\nu}^G$  も同様にして  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の並行成分と垂直成分に

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{M\nu}^G &= \frac{1}{2} \left[ \hat{\alpha}_{M\nu}^G + \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{M,\nu}^G)^T \bar{\Sigma} \right] + \frac{1}{2} \left[ \hat{\alpha}_{M,\nu}^G - \bar{\Sigma} (\hat{\alpha}_{M,\nu}^G)^T \bar{\Sigma} \right] \\ &=: \hat{\alpha}_{M\parallel\nu}^G - \hat{\alpha}_{M\perp\nu}^G, \end{aligned} \quad (5.19)$$

と分解することができるが、 $\hat{\alpha}_{M\nu}$  が満たす性質

$$(\hat{\alpha}_{M\nu})^T = \bar{\Sigma}^\dagger \xi_M^\dagger \hat{\alpha}_{M\nu} \xi_M \bar{\Sigma}, \quad \left( \because \xi_M^T = \bar{\Sigma}^\dagger \xi_M \bar{\Sigma} \right), \quad (5.20)$$

を用いると  $\hat{\alpha}_{M\parallel\nu}^G = 0$  となることが示せるので、結局  $\hat{\alpha}_{M\perp\nu}^G$  はそれ自身が  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の垂直成分に属していることが分かる：

$$\therefore \hat{\alpha}_{M\nu}^G = -\hat{\alpha}_{M\perp\nu}^G = \xi_{pL} \hat{\alpha}_{M\nu} \xi_{pL}^\dagger. \quad (5.21)$$

クォーク質量の効果を導入するための  $2N_f \times 2N_f$  行列のソース場  $\chi$  (2.17) に対応する要素として、 $\hat{\chi}^G$  という場を

$$\hat{\chi}^G := \xi_{pL} \left( 2G \xi_M \xi_R \bar{\Sigma} \chi \xi_L^\dagger \right) \xi_{pL}^\dagger, \quad (5.22)$$

と定義すると、これは GHLS の下で  $h(p, \tilde{g})$  について斉次的に変換する：

$$\hat{\chi}^G \rightarrow h(p, \tilde{g}) (\hat{\chi}^G) h^\dagger(p, \tilde{g}). \quad (\because (5.1), (5.5), (5.12)). \quad (5.23)$$

以上より、GHLS の下で斉次的に変換する要素として  $\hat{\alpha}_{\parallel\nu}^G$ 、 $\hat{\alpha}_{\perp\nu}^G$ 、 $\hat{\alpha}_{M\nu}^G$ 、 $\hat{\chi}^G$  の4つを得ることができた。これらのパリティ ( $P$ )、荷電共役 ( $C$ )、GHLS の下での変換性をまとめたものを表 5 に示す。これらの構成要素を用いた微分展開の最低次での GHLS 不変なラグランジアンは次の様を書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GHLS-O}(p^2)} &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [G_{\nu\rho} G^{\nu\rho}] + af^2 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\nu}^{G2}] + bf^2 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\nu}^{G2}] \\ &\quad + cf^2 \text{tr} [\hat{\alpha}_{M\nu}^{G2}] + df^2 \text{tr} [(\hat{\alpha}_{\perp\nu}^G + \hat{\alpha}_{M\nu}^G)^2] + \frac{f_\chi^2}{4} \text{tr} [\hat{\chi}^G + \hat{\chi}^{G\dagger}] \\ &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [G_{\nu\rho} G^{\nu\rho}] + f_\sigma^2 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\nu}^{G2}] + f_p^2 \text{tr} [(\zeta(\hat{\alpha}_{\perp\mu}^G + \hat{\alpha}_{M\mu}^G) - \hat{\alpha}_{M\mu}^G)^2] \\ &\quad + f_\pi^2 \text{tr} [(\hat{\alpha}_{\perp\mu}^G + \hat{\alpha}_{M\mu}^G)^2] + \frac{f_\chi^2}{4} \text{tr} [\hat{\chi}^G + \hat{\chi}^{G\dagger}], \end{aligned} \quad (5.24)$$



この第1項は(軸性)ベクトルボソン  $G_\nu$  の運動項であり、 $g$  は GHLS のゲージ結合定数、 $G_{\nu\rho}$  は以下で定義される場の強さのテンソルである。

$$G_{\nu\rho} := \partial_\nu G_\rho - \partial_\rho G_\nu - i[G_\nu, G_\rho]. \quad (5.25)$$

また、式 (5.24) の第2行目の変形において係数  $f_\sigma^2$ 、 $f_a^2$ 、 $f_\pi^2$  と  $\zeta$  をそれぞれ次の様に定義した。

$$f_\sigma^2 := af^2, \quad f_p^2 := (b+c)f^2, \quad f_\pi^2 := (d+c\zeta)f^2, \quad (5.26)$$

$$\zeta := \frac{b}{b+c}. \quad (5.27)$$

GHLS ラグランジアン (5.24) と3章で考えた擬 NG ボソンに対するラグランジアン (3.26) との関係についてコメントしておく。 $SU(2N_f)$  の(軸性)ベクトルボソン場  $G_\nu$  は、 $G_\nu = V_\nu + A_\nu$  として  $Sp(2N_f)$  のベクトルボソン場  $V_\nu$  と  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の破れた成分の軸性ベクトルボソン場  $A_\nu$  に分けることができる。この時、式 (5.24) において  $G_\nu$  の運動項を無視した場合の  $V_\nu$  と  $A_\nu$  についての運動方程式を考え、その解を  $\mathcal{L}_{\text{GHLS-}O(p^2)}$  へ代入することで、第2項と第3項がゼロとなり第4項と第5項を次の様に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & f_\pi^2 \text{tr} \left[ (\hat{\alpha}_{\perp\mu}^G + \hat{\alpha}_{M\mu}^G)^2 \right] + \frac{f_\chi^2}{4} \text{tr} \left[ \hat{\chi}^G + \hat{\chi}^{G\dagger} \right] \\ & \rightarrow \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ (D_\nu \Sigma_{\text{GHLS}}) (D^\nu \Sigma_{\text{GHLS}})^\dagger \right] + \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_{\text{GHLS}} \chi + \chi^\dagger \Sigma_{\text{GHLS}}^\dagger \right], \end{aligned} \quad (5.28)$$

ここで  $\Sigma_{\text{GHLS}}(x)$  は  $\xi_{L,R,M}(x)$  を用いて

$$\Sigma_{\text{GHLS}} := \xi_L^\dagger \xi_M \xi_R \bar{\Sigma}, \quad (5.29)$$

と定義される場であり、GHLS の下で  $g \in SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  についての斉次的な変換性；

$$\Sigma_{\text{GHLS}} \rightarrow g (\Sigma_{\text{GHLS}}) g^T, \quad (\because (5.1), (5.5)). \quad (5.30)$$

を持つ。また、 $\xi_{L,M}(x)$  のパラメトリゼーション (5.2) と (5.3) より  $\Sigma_{\text{GHLS}}(x)$  は

$$\Sigma_{\text{GHLS}} := \xi_L^\dagger \xi_M \xi_R \bar{\Sigma} = \xi^2(\pi) \bar{\Sigma} = \Sigma, \quad (5.31)$$

と書くことができる。ここで、 $\Sigma(x)$  は式 (3.13) で定義される場である。ここから、一般化された隠れた局所対称性の枠組みにおける有効ラグランジアン構成の考え方を、次の様にまとめることができる。

♠ 式 (3.13) で定義される商空間  $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$  の非線形シグマモデルの構成要素  $\Sigma(x)$  には  $SU(2N_f)_{\text{local}}$  の自由度が常に含まれており、これは、対称性の自発的破れのパターン (2.23) が

$$\boxed{SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times SU(2N_f)_{\text{local}} \xrightarrow{\text{SSB}} Sp(2N_f)_{\text{global}}}, \quad (5.32)$$

と拡張されることを意味する。そしてこの時、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  の自発的破れに対する擬 NG ボソンに加えて  $SU(2N_f)_{\text{local}}$  の自発的破れに対するゲージボソンを取り入れた有効ラグランジアンを構成することができる。

表 6: 軸性ベクトルボソン場と物理的自由度の対応

Field	$I$	$B$	$J^P$
$a_1^{1,2,3} = A^{1,2,3}$	1	0	$1^+$
$A_{B+} = (A^5 - iA^4) / \sqrt{2}$	0	+1	$1^-$
$A_{B-} = (A^5 + iA^4) / \sqrt{2}$	0	-1	$1^-$

## 5.2 $N_f = 2$ における (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性

$N_f = 2$  における軸性ベクトルボソン場

$N_f = 2$  での GHLS の自発的破れのパターン (5.32) は

$$\boxed{SU(4)_{\text{local}} \times SU(4)_{\text{local}} \xrightarrow{\text{SSB}} Sp(4)_{\text{global}}}, \quad (5.33)$$

と記述される。この時、式 (5.24) は 5 個の擬 NG ボソン場 (3.35) と 10 個のベクトルボソン場 (4.22) に加えて、 $SU(4)/Sp(4)$  の商空間に対応する 5 個の軸性ベクトルボソン場  $A_\nu(x)$  ;

$$A_\nu(x) := A_\nu^a(x) X^a = \begin{pmatrix} R_\nu(x) & T_\nu(x) \\ T_\nu^\dagger(x) & R_\nu^T(x) \end{pmatrix}, \quad (a = 1, \dots, 5), \quad (5.34)$$

を含む有効ラグランジアンとなる。ここで、 $X^a$  は式 (C.4) と (C.5) で定義される  $SU(4)/Sp(4)$  の破れた生成子であり、 $R_\nu(x)$  と  $T_\nu(x)$  は以下で定義される  $2 \times 2$  行列の場 ;

$$R_\nu(x) := \frac{1}{2\sqrt{2}} A_\nu^A(x) \tau_A, \quad T_\nu(x) := \frac{1}{2\sqrt{2}} (A_\nu^4(x) + iA_\nu^5(x)) \tau_2, \quad (A = 1, 2, 3), \quad (5.35)$$

また、 $\tau_{1,2,3}$  はフレーバーの足を持つパウリ行列である。

5 個の軸性ベクトルボソン場  $A_\nu^a(x)$  と、アイソスピン  $I$ 、バリオン荷  $B$ 、スピンパリティ  $J^P$  で分類される物理的自由度との対応を表 6 にまとめる。また、これ以降の議論では GHLS のゲージ固定としてユニタリゲージ

$$\sigma(x) = p(x) = 0, \quad (5.36)$$

を考える。この時、式 (5.2) と (5.3) でパラメトライズされる GHLS の基本変数  $\xi_{L,M}(x)$  は

$$\xi_L(x) = \xi^\dagger(\pi), \quad \xi_M(x) = \mathbf{1}_{2N} \quad (5.37)$$

と書くことができ、ラグランジアン (5.24) は次の様に見えることができる。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\text{GHLS-}\mathcal{O}(p^2)} \\
&= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [G_{\nu\rho} G^{\nu\rho}] \\
&\quad - \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) + \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) - \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) - 2iV_\mu \right\}^2 \right] \\
&\quad - \frac{f_p^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \zeta \left( \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) - \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) + \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) \right) + 2iA_\nu \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ (D_\nu \Sigma) (D^\nu \Sigma)^\dagger \right] + \frac{f_\chi^2 G}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \chi + \chi^\dagger \Sigma^\dagger \right]. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

クォーク質量とバリオン化学ポテンシャルの効果はソース場  $\chi$  と  $C_\nu$  の真空期待値をそれぞれ式 (2.26) と (2.30) の形に取ることによって導入される。

ラグランジアン (5.38) のポテンシャルを最小化する場の真空期待値について考える際には、(軸性)ベクトルボソン  $G_\nu$  の空間成分は有限の真空期待値を持たない、つまり有限密度領域において回転対称性は破れないことを仮定する：

$$\langle G_\nu \rangle_{m_q, \mu_B} := \tilde{G}_\nu = (\tilde{G}_0, \mathbf{0}) = (\tilde{V}_0 + \tilde{A}_0, \mathbf{0}). \tag{5.39}$$

この仮定の下で、ラグランジアン (5.38) の静的な部分を書き出すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{GHLS-}\mathcal{O}(p^2)} &\rightarrow \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \frac{\mu_B}{2} \left( \xi(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\tilde{\pi}) - \xi^\dagger(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \xi(\tilde{\pi}) \right) + 2\tilde{V}_0 \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{f_p^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \frac{\zeta \mu_B}{2} \left( \xi(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\tilde{\pi}) + \xi^\dagger(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \xi(\tilde{\pi}) \right) - 2\tilde{A}_0 \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{\mu_B^2 f_\pi^2}{8} \text{tr} [\tilde{\Sigma} \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{B}] + \frac{M_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{tr} [\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}_c^\dagger + \Sigma_c \tilde{\Sigma}^\dagger] \\
&=: \mathcal{L}_{\text{GHLS-static}}, \tag{5.40}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\xi(\tilde{\pi})$  と  $\tilde{\Sigma}$  は擬 NG ボソン場が真空期待値  $\langle \pi \rangle_{m_q, \mu_B} =: \tilde{\pi}$  を持つことにより式 (3.1) と (3.13) で定義される場が持つ真空期待値を表す。また式 (5.40) の第 4 項において、 $m_q$  と  $M_\pi$  の関係式 (3.23) を用いた書き直しを行った。 $\mathcal{L}_{\text{GHLS-static}}$  の  $\tilde{V}_0$  についての停留条件を考えると、その解として式 (4.29) が求まり、 $\tilde{A}_0$  についての停留条件を考えると、その解として

$$\tilde{A}_0 = \frac{\zeta \mu_B}{4} \left( \xi(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\tilde{\pi}) + \xi^\dagger(\tilde{\pi}) \mathbf{B} \xi(\tilde{\pi}) \right), \tag{5.41}$$

が求まる。よって、これらの解を  $\mathcal{L}_{\text{GHLS-static}}$  へ代入することで 3 章で議論した擬 NG ボソンに対する有効ラグランジアン (3.27) の静的な部分と同じ形のものを得ることができ、ここから、擬 NG ボソン場の真空期待値が式 (3.38) で与えられる、つまり、 $\mu_B > M_\pi$  において  $\pi_B$  の成分が有限の真空期待値を持ち、 $U(1)_B$  対称性が自発的に破れるような真空配位となることが分かる。この時、 $\mathcal{L}_{\text{GHLS-static}}$  の  $\tilde{V}_0$  についての停留条件の解から式 (4.31) を得ることができ、 $\omega$  中間子の時間成分が有限密度中において図 6 に示される真空期待値を

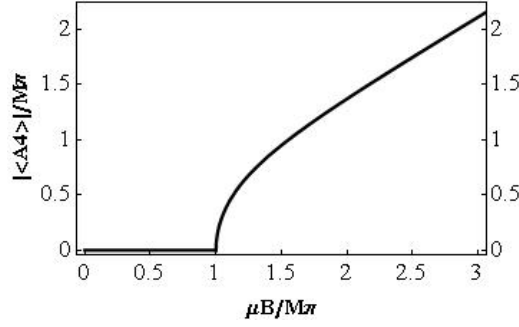


図 11:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による軸性ベクトルボソン  $A^4$  真空期待値の絶対値の変化を示す図。ここでは GHSL の係数  $\zeta = 1/2$  とおいた。

持つことが分かる。さらに、式 (3.38) を  $\mathcal{L}_{\text{GHLS-static}}$  の  $\tilde{A}_0$  についての停留条件の解 (5.41) へ代入することで

$$\tilde{A}_0 = -\sqrt{2}\zeta\mu_B \sin\theta X^4 \leftrightarrow \tilde{A}_0^4 = -\sqrt{2}\zeta\mu_B \sin\theta, \quad (5.42)$$

が得られる。これは、 $\mu_B > M_\pi$  においてバリオン荷を持つ軸性ベクトルボソン場の成分  $A^4$  の時間成分が有限の真空期待値を持つことを表している。この振る舞いを図 11 に示す。

### (軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性

ベクトルボソンと軸性ベクトルボソン質量の密度依存性について考えるために、ユニタリゲージを取った GHLS ラグランジアン (5.38) の  $V_\nu$  と  $A_\nu$  を含む項；

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-G} &:= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} [G_{\nu\rho} G^{\nu\rho}] \\ &\quad - \frac{f_\sigma^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) + \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) - \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) - 2iV_\mu \right\}^2 \right] \\ &\quad - \frac{f_p^2}{4} \text{tr} \left[ \left\{ \zeta \left( \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) - \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) + \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) \right) + 2iA_\nu \right\}^2 \right], \end{aligned} \quad (5.43)$$

について考える。ここで、表記の便宜のために式 (4.34) で定義される  $\alpha_\nu(\pi)$  に加えて  $\beta_\nu(\pi)$  という量を

$$\beta_\nu(\pi) := \frac{-\zeta}{2i} \left[ \partial_\nu \xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) - \partial_\nu \xi^\dagger(\pi) \cdot \xi(\pi) - i \left( \xi(\pi) \bar{\Sigma} C_\nu^T \bar{\Sigma}^\dagger \xi^\dagger(\pi) + \xi^\dagger(\pi) C_\nu \xi(\pi) \right) \right], \quad (5.44)$$

とおき、ゼロ密度でのベクトルボソン質量  $M_V$  と軸性ベクトルボソン質量  $M_A$  を

$$M_V^2 := g^2 f_\sigma^2 = g^2 a f^2, \quad M_A^2 := g^2 f_p^2 = g^2 (b + c) f^2, \quad (\because (5.26)), \quad (5.45)$$

と定義すると、ラグランジアン (5.43) は次の様に書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-G} = -\frac{1}{2g^2} \left[ \text{tr} [V_{\nu\rho} V^{\nu\rho}] - 2M_V^2 \text{tr} [(V_\nu - \alpha_\nu(\pi))^2] - 2M_A^2 \text{tr} [(A_\nu - \beta_\nu(\pi))^2] \right]. \quad (5.46)$$

ここで、(軸性)ベクトルボソン場の真空期待値 (5.39) の効果を導入するため  $G_\nu$  を

$$G_\nu(x) \rightarrow G_\nu(x) + \tilde{G}_\nu, \quad (5.47)$$

と置きなおし、さらに(軸性)ベクトルボソンと擬 NG ボソンの静止系を考えると、次の様な  $V_\nu$  と  $A_\nu$  の 2 次項を得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-G} \rightarrow & -\frac{1}{2g^2} \left\{ \text{tr} [(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)^2] - 4i \text{tr} \left[ \partial_0 V_j \left( [\tilde{V}^0, V^j] + [\tilde{A}^0, A^j] \right) \right] \right. \\ & - 2 \text{tr} \left[ \left( [V_j, \tilde{V}_0] + [A_j, \tilde{A}_0] \right) \left( [V^j, \tilde{V}^0] + [A^j, \tilde{A}^0] \right) \right] \\ & + \text{tr} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2] - 4i \text{tr} \left[ \partial_0 A_j \left( [\tilde{V}^0, A^j] + [\tilde{A}^0, V^j] \right) \right] \\ & - 2 \text{tr} \left[ \left( [V_j, \tilde{A}_0] + [A_j, \tilde{V}_0] \right) \left( [V^j, \tilde{A}^0] + [A^j, \tilde{V}^0] \right) \right] \\ & \left. - 2M_V^2 \text{tr} [V_j V^j] - 2M_A^2 \text{tr} [A_j A^j] \right\} \\ =: & \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-G^2}|_{\text{VS, RF}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

式 (4.22) と (4.23)、式 (5.34) と (5.35) より  $\mathcal{O}(G_\nu^2)$  のラグランジアン (5.48) はベクトルボソン場  $V_\nu^\alpha(x)$  と軸性ベクトルボソン場  $A_\nu^a(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-G^2}|_{\text{VS, RF}} = & \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^A)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4, A^{4,5})^2} \\ & + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{5,6}, A^2)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{7,8}, A^1)^2} + \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{9,10}, A^3)^2}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

と書くことができる。但しここで、 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^A)^2}$  は式 (4.40) で定義されるベクトルボソン場  $V^A(x)$  の 2 次項であり、 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4, A^{4,5})^2}$  と  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{\alpha,\beta}, A^a)^2}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4, A^{4,5})^2} := & -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\nu V^{4\rho} - \partial_\nu V_\rho^4 \cdot \partial^\rho V^{4\nu}) \right. \\ & + (\partial_\nu A_\rho^4 \cdot \partial^\nu A^{4\rho} - \partial_\nu A_\rho^4 \cdot \partial^\rho A^{4\nu}) + (\partial_\nu A_\rho^5 \cdot \partial^\nu A^{5\rho} - \partial_\nu A_\rho^5 \cdot \partial^\rho A^{5\nu}) \\ & + 2\mu_B \zeta \sin \theta (\partial_0 V_j^4 \cdot A^{5j} - \partial_0 A_{5j} \cdot V^{4j}) + 2\mu_B \cos \theta (\partial_0 A_{5j} \cdot A^{4j} - \partial_0 A_{4j} \cdot A^{5j}) \\ & \left. + 2\mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta V_j^4 A^{5j} - (M_{V^4}^G)^2 V_j^4 V^{4j} - (M_{A^4}^G)^2 A_j^4 A^{4j} - (M_{A^5}^G)^2 A_j^5 A^{5j} \right\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{\alpha,\beta}, A^a)^2} \\
& := -\frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_\nu A_\rho^a \cdot \partial^\nu A^{a\rho} - \partial_\nu A_\rho^a \cdot \partial^\rho A^{a\nu}) \right. \\
& \quad + (\partial_\nu V_\rho^\alpha \cdot \partial^\nu V^{\alpha\rho} - \partial_\nu V_\rho^\alpha \cdot \partial^\rho V^{\alpha\nu}) + (\partial_\nu V_\rho^\beta \cdot \partial^\nu V^{\beta\rho} - \partial_\nu V_\rho^\beta \cdot \partial^\rho V^{\beta\nu}) \\
& \quad + 2\mu_B \zeta \sin \theta (\partial_0 A_j^a \cdot V^{\beta j} - \partial_0 V_{\beta j} \cdot A^{aj}) + 2\mu_B \cos \theta (\partial_0 V_{\alpha j} \cdot V^{\beta j} - \partial_0 V_{\beta j} \cdot V^{\alpha j}) \\
& \quad \left. + 2\mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta A_j^a V^{\alpha j} - (M_{A^a}^G)^2 A_j^a A^{aj} - (M_{V^\alpha}^G)^2 V_j^\alpha V^{\alpha j} - (M_{V^\beta}^G)^2 V_j^\beta V^{\beta j} \right\}, \\
& \quad ((\alpha, \beta, a) = \{(5, 6, 2), (7, 8, 1), (9, 10, 3)\}), \quad (5.51)
\end{aligned}$$

で表される(軸性)ベクトルボソン場の2次項である。更に、 $(M_{V^{4,\alpha,\beta}}^G)^2$ と $(M_{A^{a,4,5}}^G)^2$ をそれぞれ次の様に定義している。

$$(M_{V^4}^G)^2 := M_V^2 - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta, \quad (5.52)$$

$$(M_{V^\alpha}^G)^2 := M_V^2 - \mu_B^2 \cos^2 \theta, \quad (5.53)$$

$$(M_{V^\beta}^G)^2 := M_V^2 - \mu_B^2 \cos^2 \theta - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta, \quad (5.54)$$

$$(M_{A^a}^G)^2 := M_A^2 - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta, \quad (5.55)$$

$$(M_{A^4}^G)^2 := M_A^2 - \mu_B^2 \cos^2 \theta, \quad (5.56)$$

$$(M_{A^5}^G)^2 := M_A^2 - \mu_B^2 \cos^2 \theta - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta, \quad (5.57)$$

また、式(5.51)については、以下の議論では $(V_\nu^5, V_\nu^6, A_\nu^2)$ 成分をその代表として考えていくことにする。表4と表6より、 $V_\nu^A(x)$ は $\rho$ 中間子、 $V_\nu^4(x)$ は $\omega$ 中間子、 $V_\nu^{5,6}(x)$ はバリオン荷を持つベクトルボソン $V_{B\pm}$ 、 $A_\nu^2(x)$ は $a_1$ 中間子、 $A_\nu^{4,5}(x)$ はバリオン荷を持つ軸性ベクトルボソン $A_{B\pm}$ 、にそれぞれ対応することに注意すると、式(5.49)は $\mu_B > M_\pi$ の $U(1)_B$ が破れた相において $\omega$ 中間子と $A_{B\pm}$ 、 $a_1$ 中間子と $V_{B\pm}$ という同じアイソスピン $I$ とスピンパリティ $J^P$ の量子数を持つ粒子がそれぞれ混合することを表している。

(軸性)ベクトルボソン質量の密度依存性を具体的に調べるために、 $V_\nu^\alpha(x)$ のフーリエ変換(4.44)と $A_\nu^a(x)$ のフーリエ変換

$$A_\nu^a(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{A}_\nu^a(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (a = 1, \dots, 5), \quad (5.58)$$

をラグランジアン(5.51)の作用積分へ代入し、空間運動量成分をゼロとしたものを考える。この時、 $V^A$ 、つまり $\rho$ 中間子については式(4.45)-(4.47)と同じ議論からその質量を

$$m_\rho = M_V, \quad (5.59)$$

と求めることができる。次に、 $(V_\nu^4, A_\nu^4, A_\nu^5)$  について考えると

$$\begin{aligned} & \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4, A^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \left( \hat{V}_j^{4\dagger}(E), \hat{A}_j^{4\dagger}(E), \hat{A}_j^{5\dagger}(E) \right) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} E^2 - (M_{V^4}^G)^2 & \mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta & i2E\mu_B \zeta \sin \theta \\ \mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta & E^2 - (M_{A^4}^G)^2 & i2E\mu_B \cos \theta \\ -i2E\mu_B \zeta \sin \theta & -i2E\mu_B \cos \theta & E^2 - (M_{A^5}^G)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}^{4j}(E) \\ \hat{A}^{4j}(E) \\ \hat{A}^{5j}(E) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

ここで、以下の様な場の取り直しを考える。

$$\hat{A}_{B+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A}^5 - i\hat{A}^4), \quad \hat{A}_{B-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A}^5 + i\hat{A}^4). \quad (5.61)$$

この時、式 (5.60) は  $\hat{A}_{B\pm}$  を用いて

$$\begin{aligned} & \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^4, A^{4,5})^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\ &= \frac{-1}{4g^2} \left( \hat{V}_j^{4\dagger}(E), \hat{A}_{B+j}^\dagger(E), \hat{A}_{B-j}^\dagger(E) \right) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} 2(E^2 - M_V^2 - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta) \\ -i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta + 2E) \\ i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta - 2E) \\ i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta + 2E) \\ 2 \left\{ (E + \mu_B \cos \theta)^2 - M_A^2 \right\} + \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \\ \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \\ -i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta - 2E) \\ \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \\ 2 \left\{ (E - \mu_B \cos \theta)^2 - M_A^2 \right\} + \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}^{4j}(E) \\ \hat{A}_{B+}^j(E) \\ \hat{A}_{B-}^j(E) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.62)$$



と書くことができる。同様に、 $(V_\nu^5, V_\nu^6, A_\nu^2)$  について考えると

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{O}(p^2)-(V^{5,6}, A^2)^2} \Big|_{k_0=E, k_j \rightarrow 0} \\
&= -\frac{1}{2g^2} \left( \hat{A}_j^{2\dagger}(E), \hat{V}_j^{5\dagger}(E), \hat{V}_j^{6\dagger}(E) \right) \\
& \quad \times \begin{pmatrix} E^2 - (M_{A^2}^G)^2 & \mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta & i2E\mu_B \zeta \sin \theta \\ \mu_B^2 \zeta \sin \theta \cos \theta & E^2 - (M_{V^4}^G)^2 & i2E\mu_B \cos \theta \\ -i2E\mu_B \zeta \sin \theta & -i2E\mu_B \cos \theta & E^2 - (M_{V^5}^G)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}^{2j}(E) \\ \hat{V}^{5j}(E) \\ \hat{V}^{6j}(E) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{4g^2} \left( \hat{A}_j^{2\dagger}(E), \hat{V}_{B+j}^\dagger(E), \hat{V}_{B-j}^\dagger(E) \right) \\
& \quad \times \begin{pmatrix} 2(E^2 - M_A^2 - \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta) \\ -i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta + 2E) \\ i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta - 2E) \end{pmatrix} \\
& \quad \begin{pmatrix} i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta + 2E) \\ 2\left\{ (E + \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 \right\} + \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \\ \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
& \quad \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}\mu_B \zeta \sin \theta (\mu_B \cos \theta - 2E) \\ \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \\ 2\left\{ (E - \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 \right\} + \mu_B^2 \zeta^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}^{2j}(E) \\ \hat{V}_{B+}^j(E) \\ \hat{V}_{B-}^j(E) \end{pmatrix}, \tag{5.63}
\end{aligned}$$

となる。但しここで、式 (4.50) で定義される場  $V_\nu^{5,6}$  の取り直しを用いた。 $\omega$  中間子とバリオン荷を持つ軸性ベクトルボソン  $A_{B\pm}$ 、 $a_1$  中間子とバリオン荷を持つベクトルボソン  $V_{B\pm}$  の質量の密度依存性は、式 (5.62) と式 (5.63) それぞれの  $3 \times 3$  行列式をゼロとするような  $E(>0)$  の解を求めることにより得られる。

### Weinberg 和則

この小節では文献 [55] を参考に、 $\mu_B = T = 0$  において GHLS ラグランジアン の係数の間に成り立つ関係について議論する。ベクトルカレント  $J_a^\nu$  と軸性ベクトルカレント  $J_{5a}^\nu$  の相関関数；

$$\begin{aligned}
G_A(Q^2) (q^\nu q^\rho - q^2 g^{\nu\rho}) \delta_{ab} &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_{5a}^\nu(x) J_{5b}^\rho(0) | 0 \rangle, \\
G_V(Q^2) (q^\nu q^\rho - q^2 g^{\nu\rho}) \delta_{ab} &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_a^\nu(x) J_b^\rho(0) | 0 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.64}$$

を考える。ここで、 $Q^2 = -q^2$  は空間的な運動量であり、 $(a, b) = 1, \dots, N_f^2 - 1$  は  $SU(N_f)$  のフレーバーの足を表す。 $\mathcal{O}(p^2)$  の GHLS ラグランジアン (5.24) よりこのカレント相関関数は

$$G_A(Q^2) = \frac{f_\pi^2}{Q^2} + \frac{f_A^2}{M_A^2 + Q^2}, \quad G_V(Q^2) = \frac{f_V^2}{M_V^2 + Q^2}. \tag{5.65}$$

と求めることができる。但しここで、 $f_A^2$  と  $f_V^2$  を

$$f_A^2 := \left( \frac{g_A}{M_A} \right)^2 = \frac{b^2}{b+c} f^2, \quad f_V^2 := \left( \frac{g_V}{M_V} \right)^2 = a f^2, \quad (5.66)$$

と定義し、ベクトルボソン  $V_\nu$  と外場  $C_\nu$  の破れていない成分との結合定数  $g_V$  と、軸性ベクトルボソン  $A_\nu$  と外場  $C_\nu$  の破れた成分との結合定数  $g_A$  が

$$g_V = g f_\sigma^2 = g a f^2, \quad g_A = g \zeta f_p^2 = g b f^2, \quad (5.67)$$

と表されることを用いた。一方、QCD の演算子積展開 (OPE) による計算 [56] から、 $G_A^{\text{OPE}}(Q^2)$  と  $G_V^{\text{OPE}}(Q^2)$  の差が

$$G_A^{\text{OPE}}(Q^2) - G_V^{\text{OPE}}(Q^2) = \frac{4\pi (N_C^2 - 1) \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{N_C^2 Q^6}, \quad (5.68)$$

となることが知られている。ここで、 $N_C$  はカラーの数、 $\alpha_s$  はクォークとグルーオンの結合定数を表す。

OPE による相関関数 (5.68) は高エネルギー領域において妥当な結果であるため、これを GHLS の相関関数と比較するためは模型のエネルギースケールがゼロ密度での (軸性)ベクトルボソン質量に比べて高い領域;  $Q^2 \gg M_A^2, M_V^2$  を考える必要がある。この時、式 (5.65) は

$$\begin{aligned} G_A(Q^2) &= \frac{f_\pi^2 + f_A^2}{Q^2} - \frac{f_A^2 M_A^2}{Q^4} + \frac{f_A^2 M_A^2}{Q^6}, \\ G_V(Q^2) &= \frac{f_V^2}{Q^2} - \frac{f_V^2 M_V^2}{Q^4} + \frac{f_V^2 f_A^2}{Q^6}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

と展開することができ、ここから  $G_A(Q^2)$  と  $G_V(Q^2)$  の差が次のように求まる。

$$G_A(Q^2) - G_V(Q^2) = \frac{f_\pi^2 + f_A^2 - f_V^2}{Q^2} - \frac{f_A^2 M_A^2 - f_V^2 M_V^2}{Q^4} + \frac{f_A^2 M_A^2 - f_V^2 M_V^2}{Q^6}. \quad (5.70)$$

よって、高エネルギー領域における GHLS のカレント相関関数の差 (5.70) が OPE の結果 (5.68) と一致することを要求すると、式 (5.70) における  $1/Q^2$  項と  $1/Q^4$  項はゼロとなるべきであり、ここから関係式;

$$f_\pi^2 + f_A^2 = f_V^2, \quad f_A^2 M_A^2 = f_V^2 M_V^2, \quad (5.71)$$

が導かれる。これは文献 [34] で示される “Weinberg 和則” であり、この 2 つの関係式は  $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアン (5.24) の係数を

$$a = b, \quad d = 0, \quad (5.72)$$

と取ることと同値である。また、式 (5.71) の第 2 式は  $M_V$  と  $M_A$  の比が式 (5.27) で定義される  $\zeta$  を用いて

$$\left( \frac{M_V}{M_A} \right)^2 = \zeta \quad (\because (5.27)), \quad (5.73)$$

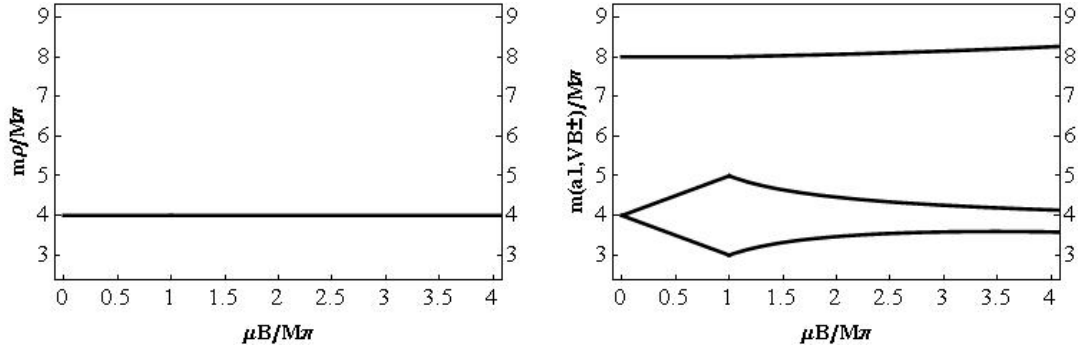
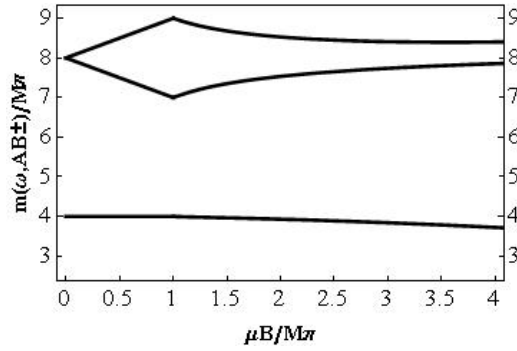
(a)  $\rho$  中間子質量の密度依存性(b)  $a_1$  中間子質量と  $V_{B\pm}$  質量の密度依存性(c)  $\omega$  中間子質量と  $A_{B\pm}$  質量の密度依存性

図 12:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による (軸性) ベクトルボソン質量の変化を示す図。ここでは、ゼロ密度での擬 NG ボソン質量とベクトルボソン質量の比を  $M_V/M_\pi = 4$ 、軸性ベクトルボソン質量と  $M_V$  の比が大きい場合の例として  $M_A/M_V = 8$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/64$ ) を取っている。また、HLS のゲージ結合定数  $g = 1$  とした。

と表されることを示している。この時、 $M_V$  と  $M_A$  の比を決めることによって  $\zeta$  の値が決まるため、 $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアン (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性を調べるにあたって、定めるべき残ったパラメタはゼロ密度での擬 NG ボソン質量  $M_\pi$  と  $M_V$  の比のみとなる。

ここまでの内容から読み取れる (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性の特徴をまとめると以下の様になる。

♠ 式 (5.59) より、 $\rho$  中間子質量  $m_\rho$  は密度依存性を持たず  $M_V$  のままで一定である。特に  $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  が破れた領域においても  $m_\rho$  が変化しないのは、軸性ベクトルボソン (表 6) の中に  $\rho$  中間子と同じ  $I$  と  $J^P$  の量子数を持つ粒子が無いことを反映している。これは、 $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンから軸性ベクトルボソンを integrate out して作った HLS ラグランジアンの高次項には  $\mu_B > M_\pi$  で  $m_\rho$  を変化させる項が無いことを表

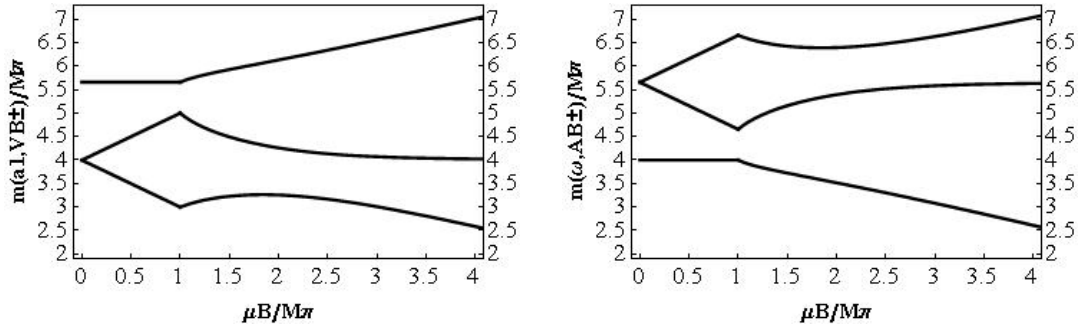
(a)  $a_1$  中間子質量と  $V_{B\pm}$  質量の密度依存性(b)  $\omega$  中間子質量と  $A_{B\pm}$  質量の密度依存性

図 13:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による (軸性) ベクトルボソン質量の変化を示す図。ここでは、ゼロ密度での擬 NG ボソン質量とベクトルボソン質量の比を  $M_V/M_\pi = 4$ 、 $M_V$  と軸性ベクトルボソン質量の比を  $M_A/M_V = \sqrt{2}$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/2$ )、HLS のゲージ結合定数  $g = 1$  とした。

している。よって、格子 QCD 計算 [26, 27] で示される  $m_\rho$  の減少を再現するには、GHLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  の効果を考える必要がある。

◇ 式 (5.63) より、 $\mu_B > M_\pi$  の  $U(1)_B$  が破れた領域において、同じ  $I$  と  $J^P$  の量子数を持つ  $a_1$  中間子とベクトルボソン  $V_{B\pm}$  が混合する。この混合を制御するパラメタとして  $\theta$  と  $\zeta$  の 2 つがあるが、特に  $\zeta$  の役割については次の様な議論が考えられる：まず  $\zeta \rightarrow 0$  という場合を考えると、これは式 (5.73) より  $M_V$  に比べて  $M_A$  が重い極限に対応する。この時、式 (5.63) は

$$\begin{aligned} & \lim_{\zeta \rightarrow 0} (5.63) \\ &= -\frac{1}{2g^2} \left( \hat{A}_j^{2\dagger}(E), \hat{V}_{B+j}^\dagger(E), \hat{V}_{B-j}^\dagger(E) \right) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} E^2 - M_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & (E + \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 & 0 \\ 0 & 0 & (E - \mu_B \cos \theta)^2 - M_V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}^{2j}(E) \\ \hat{V}_{B+}^j(E) \\ \hat{V}_{B-}^j(E) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

となり、それぞれの粒子間の混合は無くなり、 $V_{B\pm}$  については  $\mathcal{O}(p^2)$  HLS ラグランジアンの結果 (4.51) と一致することが分かる。

次に、 $\zeta$  をゼロから増加させる、つまり  $M_A$  を  $M_V$  に近づけていくことを考えると、 $a_1$  中間子とベクトルボソン  $V_{B\pm}$  の間の混合によりそれぞれの質量の間に準位反発が生じる。さらにこの混合には、バリオン数を 1 変化させる ( $\Delta B = 1$ )  $a_1$ - $V_{B+}$  と  $a_1$ - $V_{B-}$  の混合と、バリオン数を 2 変化させる ( $\Delta B = 2$ )  $V_{B+}$ - $V_{B-}$  の混合の 2 種類があり、式 (5.63) より  $\Delta B = 1$  はその混合の強さが  $\zeta$  に比例し、 $\Delta B = 2$  はその混合の強さが  $\zeta^2$  に比例している。よって、 $\zeta \ll 1$  を考えた場合の  $\zeta$  の 1 次までの近似では、 $\Delta B = 1$  の混合のみが生じ

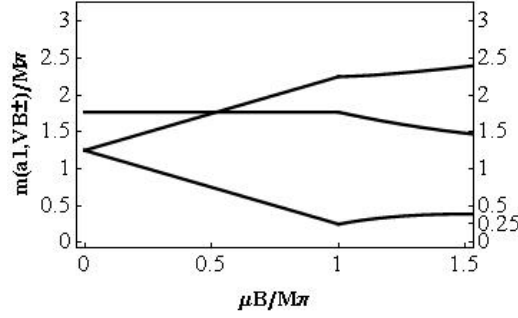


図 14:  $M_\pi$  を単位とした時の  $\mu_B$  による (軸性) ベクトルボソン質量の変化を示す図。ここでは、ゼロ密度での擬 NG ボソン質量とベクトルボソン質量の比を  $M_V/M_\pi = 5/4$ 、 $M_V$  と軸性ベクトルボソン質量の比を  $M_A/M_V = \sqrt{2}$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/2$ )、HLS のゲージ結合定数  $g = 1$  とした。

る。この例として、 $M_A/M_V = 8$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/64$ ) の場合の (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性をプロットしたのが図 12 である。この図では、 $a_1$ - $V_{B\pm}$  の質量間にわずかに反発が見られるが、 $V_{B\pm}$  の間には大きな反発は無く、その質量の密度依存性の振る舞いは  $\mathcal{O}(p^2)$  HLS の結果 7(b) に近いものとなっている。一方で、 $\zeta$  をより大きくした場合には  $\Delta B = 1$  の混合による質量間の準位反発が大きくなる他に、 $\zeta^2$  の効果により  $\Delta B = 2$  の混合が生じる。この例として、 $M_A/M_V = \sqrt{2}$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/2$ ) の場合の (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性をプロットしたのが図 13 である。(ここでは、 $\rho$  中間子質量の密度依存性は省略した。) 特に図 12(b) と 13(a) を比べた時、 $\mu_B/M_\pi = 4$  における一番軽い状態の質量減少と一番重い状態の質量増加はより顕著であるのに対し、中間質量の状態はほとんど変化が見られない。これは、 $\zeta^2$  の効果で  $V_{B\pm}$  間に生じた混合により、この 2 つの状態間に反発が生まれたものと考えられる。

また、ここまでの議論は式 (5.62) の  $\omega$  中間子と軸性ベクトルボソン  $A_{B\pm}$  についても同様に適応できる。

♣ 最後に、格子 QCD 計算 [27] との比較を行うために、擬 NG ボソンとベクトルボソンの質量比が小さい、 $M_V/M_\pi = 5/4$  という場合を考える。また、[27] の結果を再現するような軸性ベクトルボソン質量とベクトルボソン質量の比は  $M_A/M_V = \sqrt{2}$  ( $\leftrightarrow \zeta = 1/2$ ) で与えられる。この場合の  $a_1$  中間子と  $V_{B\pm}$  の質量の密度依存性を図 14 に示す。この図においても、前章の図 9(b) や 10(b) と同様に、 $V_{B+}$  の質量は [27] の結果を再現できておらず、 $V_{B+}$  の質量を再現するには  $\mathcal{O}(p^2)$  での  $a_1$  中間子との混合を考えるだけでは不十分であることが分かる。また、 $\rho$  中間子質量の考察 (♠) で述べた様に、この  $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンでは [27] で指摘されている  $m_\rho$  の減少が説明できていない。よって、格子 QCD 計算の結果と、この結果との詳細な比較を行うためには、HLS の場合と同様に GHLS の高次項効果を考慮に入れる必要があると考えられる。

## 6 まとめと今後の課題

本論文では、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD におけるカイラル対称性を正しく尊重しながら、擬 NG ボソン、ベクトルボソンと軸性ベクトルボソンを含む低エネルギー有効模型を構成し、それぞれのボソン質量の密度依存性と有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の相構造の関係について議論した。

まず 2 章では、 $SU(2)_{\text{color}}$  QCD ラグランジアンは  $2N_f$  表現のフェルミオン  $\Psi$  を用いて書きなおす事ができ、この結果としてカイラル対称性とその自発的破れが  $SU(2N_f) \rightarrow Sp(2N_f)$  として表されることを確認した。この本質は、 $SU(2)$  群の擬実性により、2 成分スピノル  $\sigma_2 \tau_2^c q_R^*$  ( $\sigma_2$  と  $\tau_2^c$  はそれぞれ  $SU(2)_{\text{spin}}$  と  $SU(2)_{\text{color}}$  の生成子。) が同じく 2 成分スピノルの  $q_L$  とスピン・カラー変換の下で同じ変換性を持つことにあった。また、カレントクォーク質量とバリオン化学ポテンシャルの両方の効果を導入した場合には、QCD ラグランジアンに残る対称性は  $SU(N_f)_V \times U(1)_B$  となることを見た。

3 章では、CCWZ の構成法に従い、2 章で議論したカイラル対称性の自発的破れのパターンの下で現れる、NG ボソンを低エネルギーで記述する有効模型を構成した。そして、そこへクォーク質量とバリオン化学ポテンシャルの効果を加えることで、 $\mu_B/M_\pi$  の変化における模型の真空構造を議論し、 $\mu_B = M_\pi$  においてバリオン荷を持つ擬 NG ボソンが有限真空期待値を持つことによる対称性の自発的破れ  $SU(N_f)_V \times U(1)_B \rightarrow Sp(N_f)_V$ 、が起こることを示した。また、 $N_f = 2$  の場合を考え、この真空構造の下での擬 NG ボソン質量の密度依存性を解析し、 $\mu_B > M_\pi$  において  $m_{\pi_{B+}}$  が  $U(1)_B$  の自発的破れに伴う質量ゼロの NG ボソンとなることを確認した。

4 章では、HLS の枠組みに基づき、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times Sp(2N_f)_{\text{local}} \rightarrow Sp(2N_f)_{\text{global}}$  という対称性の自発的破れの下で現れる、擬 NG ボソンとベクトルボソンを含む有効模型を構成した。そして、この有効ラグランジアンが 3 章で議論したものと同様の真空構造を持ち、特に  $N_f = 2$  の場合に、 $\omega$  中間子の時間成分が有限密度中で有限の真空期待値を持つことを見た。次に、この真空構造の下で  $\mathcal{O}(p^2)$  HLS ラグランジアンから導かれるベクトルボソン質量の密度依存性を解析した。この結果、 $\rho$ 、 $\omega$  中間子質量は密度依存性を持たずゼロ密度の質量のまま一定であること、バリオン荷  $-1$  を持つ  $V_{B-}$  は  $0 < \mu_B < M_\pi$  ではその質量が密度と共に増加するが、 $\mu_B > M_\pi$  では減少に転じ、バリオン荷  $+1$  を持つ  $V_{B+}$  は  $V_{B-}$  と逆の振る舞いを示すことが分かった。格子 QCD の軽いクォーク質量での計算ができた場合には、この  $V_{B\pm}$  質量の密度依存性が、 $U(1)_B$  が自発的に破れる相転移密度を示す新たなシグナルになると考えられる。また、ボソンの静止系を考えた場合には、 $U(1)_B$  が破れた密度領域においても  $V_{B\pm}$  は混合しないことを確認した。

次に、 $\mathcal{O}(p^2)$  HLS ラグランジアンの真空構造を変えずにベクトルボソン質量の密度依存性へ影響を与える、HLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  項について考えた。この結果、対称性からは決まらない 2 つの係数  $\bar{y}_1$  と  $\bar{y}_3$  を伴うベクトルボソンの質量項を求めることができた。 $\bar{y}_1$  は全てのベクトルボソン質量に等しく正負の影響を与える係数、 $\bar{y}_3$  は  $\rho$  と  $\omega$  中間子に質量差を与え、 $V_{B\pm}$  の間の混合を引き起こす係数であり、本研究では、 $\rho$  と  $\omega$  中間子の質量差と  $V_{B\pm}$  の混合の大きさの間に成り立つ関係  $m_{\rho'}^2 - m_{\omega'}^2 = \bar{y}_3 (g\mu_B \sin \theta)^2 / 2$  を見出した。4 章でも強調したように、これはカイラル対称性の自発的破れのパターンのみから決まる非自明な関係式であり、クォーク質量が軽い場合の格子 QCD 計算において、密度の変化によるこの関係式の成り立ちを確認することは、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD における密度の変化に伴う



カイラル対称性の成り立ちの確認になると考えられる。この章の最後では、クォーク質量が重い場合を考え、HLS 模型と格子 QCD 計算の結果 [27] との比較を行った。[27] を再現するためにベクトルボソンと擬 NG ボソンの質量比を固定すると、調節できるパラメタは  $\mathcal{O}(p^4)$  項由来の係数  $\bar{y}_1$  と  $\bar{y}_3$  の 2 つとなる。この時、この 2 つのパラメタでは  $\rho$  中間子質量の減少とその他のベクトルボソン質量（特に  $V_{B+}$ ）の密度依存性の定性的な振る舞いを同時に再現することができなかった。ここから、HLS 模型では格子 QCD 計算の結果 [27] を再現することが困難であり、重いクォーク質量を考える場合には軸性ベクトルボソンの効果を考慮に入れる必要があることを議論した。

5 章では、GHLS の枠組みに基づき、 $SU(2N_f)_{\text{chiral}} \times SU(2N_f)_{\text{local}} \rightarrow Sp(2N_f)_{\text{global}}$  という対称性の自発的破れの下で現れる、擬 NG ボソンと（軸性）ベクトルボソンを含む有効模型を構成した。そして、この模型も HLS の場合に議論したのと同じ真空構造を持つことに加えて、特に  $N_f = 2$  の場合に、 $\mu_B > M_\pi$  においてバリオン荷を持つ軸性ベクトルボソンの成分が有限の真空期待値を持つことを示した。次に、上記の真空構造の下で  $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンから導かれる（軸性）ベクトルボソン質量の密度依存性を解析した。この結果、 $\rho$  中間子質量は密度依存性を持たないこと、そして、その他の（軸性）ベクトルボソンについては、 $\mu_B > M_\pi$  において同じアイソスピン  $I$  とスピンパリティ  $J^P$  の量子数を持つ状態が混合することが分かった。さらに、Weinberg 和則が成り立つ場合には、この混合の強さがベクトルボソンと軸性ベクトルボソンの質量比  $M_V/M_A$  に比例することが分かった。そして、 $M_A \gg M_V$  の場合には、ベクトルボソンと軸性ベクトルボソン間の混合は小さくなり、ベクトルボソン質量の密度依存性が  $\mathcal{O}(p^2)$  HLS ラグランジアンから得られる結果と無矛盾なものになること、 $M_A$  が  $M_V$  に近づくと、ベクトルボソンと軸性ベクトルボソン間の混合が大きくなり、これらの質量の間に準位反発が起こることを確認した。しかし、 $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンを用いた解析は、格子 QCD の結果 [26, 27] で示される  $\rho$  中間子質量の密度増加による減少を再現出来ず、 $a_1$ - $V_{B\pm}$  間の混合も [27] で示される  $V_{B+}$  の振る舞いを再現するには不十分であることが分かった。

本研究から得られる将来課題として、次の 2 つが考えられる。1 つは  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD 計算へ向けてのものであり、軽いクォーク質量での計算、特に擬 NG ボソンとベクトルボソンのみが軽い有効自由度となる計算が可能になれば、4 章で議論した様に、HLS 模型から予想されるベクトルボソン質量の密度依存性を調べることで、 $SU(2)_{\text{color}}$  有限密度 QCD の相構造に対して新たな提言ができることが予想される。

もう 1 つは、GHLS に基づく有効模型を用いた解析についての今後の課題である。5 章で議論した様に、 $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンは有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  格子 QCD 計算で示される  $\rho$  中間子質量の減少を再現することができない。これは、HLS 模型の場合と同様に、GHLS 模型においても微分展開の高次項（ $\mathcal{O}(p^4)$ ）を考え、その効果が（軸性）ベクトルボソン質量の密度依存性へ与える影響を考慮する必要があることを示している。この場合、 $\mathcal{O}(p^2)$  GHLS ラグランジアンの真空構造を変えずに、 $\rho$  中間子質量へ影響を与える  $\mathcal{O}(p^4)$  の項は、HLS 模型で考えたものと同様であると考えられ、その質量の密度依存性は  $\bar{y}_1$  と  $\bar{y}_3$  で表される 2 つの係数で決まることが予想される。これは、軸性ベクトルボソンには  $\rho$  中間子と同じ  $I$  と  $J^P$  の量子数を持つ粒子がないためである。一方で、 $\omega$  中間子については  $\mu_B > M_\pi$  で同じ量子数を持つ軸性ベクトルボソン  $A_{B\pm}$  との混合が起こるため、HLS 模型の様に、 $\mathcal{O}(p^4)$  項が質量の密度依存性へ与える影響を単純に議論することができないと考



えられる。また、GHLS の  $\mathcal{O}(p^4)$  項からは、HLS の場合と比べて、よりも多くの係数が現れることが予想されるが、格子 QCD と GHLS 模型の結果の詳細なフィッティングを行うことにより、その値に制限がつくと考えられる。この時、これらの係数から、格子 QCD 計算では測定されていない (軸性) ベクトルボソン質量の密度依存性に関する、新たな予言が得られることが期待される。GHLS 模型は重いクォーク質量の格子 QCD 計算と直に比較することができるため、これは格子 QCD 側から見れば、計算量がより多い軽いクォーク質量を用いなくて済むという便利さがある。こういった視点からも、この模型の拡張には意義があると考えられる。この様に、今後、有効模型からのアプローチと格子 QCD 計算によるアプローチの連携を今以上に深めていくことが、有限密度  $SU(2)_{\text{color}}$  QCD の相構造のより深い理解のために必要となる。

また、本論文で用いた HLS、もしくは GHLS の手法に基づく有効模型の構成法を  $SU(3)_{\text{color}}$  有限密度 QCD の系へ応用することで、その相構造を解明するために有用なカイラル有効模型の構成が可能となることが考えられる。これは、本研究が持つ将来への展望である。

## 謝辞

本論文の作成にあたり、御協力いただきました数多くの方々に深くお礼申し上げます。私の指導教員の原田正康先生には、修士課程からの研究全般についてとても厚く御指導をいただきました。私が本研究分野に興味を抱くきっかけを与えていただき、更には研究中の議論やご教授いただいた内容を通じて、研究テーマや問題に対して、どうアプローチし、どう解決していくのか、という非常に大切な方法論を学ばせていただきました。これまでご指導いただいたことを心から感謝致します。野中千穂先生には、本研究の共同研究者として、非常に有意義な議論をしていただいたこと、格子 QCD 計算の立場からの御助言を沢山いただいたことを深く感謝いたします。また、同研究室の院生の皆様、竹本真平さん、星野紘憲さん、福田恭平さん、若山将征さんには日々の様々な議論を通じて、研究の理解を深めるためのお力添えをいただきました。その他にも、セミナーやゼミなど、大学院生活の様々な場面を通じてお世話になった、EHQ 研のスタッフと学生の皆様、そして御卒業された先輩方にこの場を借りて感謝申し上げます。

本研究は名古屋大学グローバル COE プログラム「宇宙基礎原理の探求」の援助を受けて行われました。

## A $Sp(2N)$ 群

この付録では  $Sp(2N)$  群の基本的な性質を簡単にまとめておく。  
任意の  $2N \times 2N$  行列  $A$  を次の様に分解する。

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (A + \bar{\Sigma} A^T \bar{\Sigma}) + \frac{1}{2} (A - \bar{\Sigma} A^T \bar{\Sigma}) \\ &=: A_S + A_X. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで  $\bar{\Sigma}$  は

$$\bar{\Sigma}^2 = -\mathbf{1}_{2N}, \quad \bar{\Sigma}^T = \bar{\Sigma}^\dagger = -\bar{\Sigma}, \quad (\text{A.2})$$

を満たすような  $2N \times 2N$  行列であり、この時  $A_S$  と  $A_X$  は  $\bar{\Sigma}$  に対して以下の性質を満たす。

$$(A_S)^T = \bar{\Sigma} A_S \bar{\Sigma}, \quad (A_X)^T = -\bar{\Sigma} A_X \bar{\Sigma}. \quad (\text{A.3})$$

$Sp(2N)$  群はこの  $A_S$  と同様の性質を持つ生成子  $S^\alpha$  によって定義される群であり、その Lie 代数  $\mathcal{H}$  は以下のように表される。

$$\mathcal{H} = \left\{ S^\alpha \left| (S^\alpha)^T = (S^\alpha)^* = \bar{\Sigma} S^\alpha \bar{\Sigma} \right. \right\}, \quad (\alpha = 1, \dots, 2N^2 + N) \quad (\text{A.4})$$

また  $Sp(2N)$  は  $SU(2N)$  の部分群であり、これは、 $SU(2N)$  の Lie 代数  $\mathcal{G}$ <sup>16</sup> を式 (A.1) と同様に、 $\mathcal{H}$  とそれ以外の部分 ( $\mathcal{G} - \mathcal{H}$ ) に分けることができることを表す。

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left\{ S^\alpha \left| (S^\alpha)^T = (S^\alpha)^* = \bar{\Sigma} S^\alpha \bar{\Sigma} \right. \right\} \oplus \left\{ X^a \left| (X^a)^T = (X^a)^* = -\bar{\Sigma} X^a \bar{\Sigma}, \text{tr}(X^a) = 0 \right. \right\} \\ &= \mathcal{H} \oplus \mathcal{G} - \mathcal{H}, \quad (a = 1, \dots, 2N^2 - N - 1). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

この時、それぞれの生成子は以下の規格化を満たす。

$$\text{tr}(S^\alpha S^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}, \quad \text{tr}(X^a X^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad \text{tr}(S^\alpha X^a) = 0. \quad (\text{A.7})$$

また、 $Sp(2N)$  群の元  $h$  を

$$h = \exp(i\theta^\alpha S^\alpha), \quad (\theta^\alpha \in \mathbb{R}), \quad (\text{A.8})$$

とおくと、 $S^\alpha$  の性質 (A.4) より  $h$  と  $\bar{\Sigma}$  について以下の関係が成り立つ。

$$\bar{\Sigma} (h^\dagger)^T \bar{\Sigma}^\dagger = h. \quad (\text{A.9})$$

破れた生成子同士の交換関係については

$$\left( [X^a, X^b] \right)^T = \bar{\Sigma} [X^a, X^b] \bar{\Sigma}, \quad (\because (\text{A.6})), \quad (\text{A.10})$$

<sup>16</sup>この Lie 代数  $\mathcal{G}$  に属する  $SU(2N)$  の生成子を  $T^A$  とし、これは以下の規格直交化を満たすものとする。

$$\text{tr}[T^A T^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (A, B = 1, \dots, 4N^2 - 1). \quad (\text{A.5})$$

が成り立つ。これは、式 (A.4) よりこの交換関係が  $\mathcal{H}$  に属しており、商空間  $SU(2N)/Sp(2N)$  が対称空間であることを表す。この時、 $SU(2N)$  の Lie 代数に対するパリティ変換

$$\tau : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \tau^2 = 1, \quad (\text{A.11})$$

を考えると

$$\begin{aligned} \tau(Y) &= +Y, \quad (Y \in \mathcal{H} \text{ の時}), \\ \tau(Y) &= -Y, \quad (Y \in \mathcal{G} - \mathcal{H} \text{ の時}), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となり、破れていない  $Sp(2N)$  の Lie 代数に対しては正の固有パリティ、破れた Lie 代数  $\{X^a\}$  に対しては負の固有パリティが付与される。

## B Callan-Caleman-Wess-Zumino による非線形シグマ模型の定式化

この付録では、Callan-Caleman-Wess-Zumino (CCWZ) [32] によって定式化された非線形シグマ模型構成の一般論についてまとめる。この付録の主な内容は文献 [30] を参考にしている。

一般の群  $G$  とその部分群  $H$  を考える。この時、商空間  $G/H$  の代表元  $\xi$  は破れた生成子  $X^a$  を用いて次の様にパラメトライズされる。

$$\xi(\pi) = \exp \left[ \frac{i}{f_\pi} \pi^a(x) X^a \right], \quad (\{X^a\} \in \mathcal{G} - \mathcal{H}, a = 1, \dots, \dim G - \dim H). \quad (\text{B.1})$$

ここで、破れていない部分群  $H$  の生成子を  $S^\alpha$  とし、 $S^\alpha$  と  $X^a$  は以下の規格直交化を満たすものとする。

$$\begin{cases} \text{tr}(S^\alpha S^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}, & (\alpha, \beta = 1, \dots, \dim H) \\ \text{tr}(X^a X^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, & (a, b = 1, \dots, \dim G - \dim H) \\ \text{tr}(S^\alpha X^a) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

この時、

$$\text{tr} \left( S^\alpha \left[ S^\beta, X^a \right] \right) = \text{tr} \left( \left[ S^\alpha, S^\beta \right] X^a \right) = i f^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(S^\gamma X^a) = 0, \quad (\text{B.3})$$

より、 $[S^\beta, X^a]$  は  $S^\alpha$  と直交する、つまり交換関係  $[S^\beta, X^a]$  は破れた生成子に属することが分かる。

この時、商空間の代表元  $\xi(\pi)$  の群  $G$  の下での変換は次の様に表される。

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = g \xi(\pi) h^{-1}(g, \pi). \quad (\text{B.4})$$

商空間の代表元の変換 (B.4) のイメージを掴むために、正三角形の合同変換群  $C_{3V}$  を考える。 $C_{3V}$  は以下の元を持つ離散群である。

$$C_{3V} = \{ e, c_3, c_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}.$$

この元の積に対して、次のような群表を書くことができる。(表はヨコの元を  $a$ 、タテの元を  $b$  として  $a \cdot b$  という積を考えた時の群表。)

	$e$	$c_3$	$c_3^{-1}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$e$	$e$	$c_3$	$c_3^{-1}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$c_3$	$c_3$	$c_3^{-1}$	$e$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$c_3^{-1}$	$c_3^{-1}$	$e$	$c_3$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$e$	$c_3$	$c_3^{-1}$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$c_3^{-1}$	$e$	$c_3$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$c_3$	$c_3^{-1}$	$e$

また、 $C_{3V}$  群は次のような部分群  $H_1$  を持つ。

$$H_1 = \{ e, \sigma_1 \}.$$

この  $H_1$  が群を成すことは、次の群表によって確認できる。

	$e$	$\sigma_1$
$e$	$e$	$\sigma_1$
$\sigma_1$	$\sigma$	$e$

これより、以下のような  $H_1$  を用いた  $C_{3V}$  の左剰余類分解

$$\begin{aligned} C_{3V} &= H_1 \oplus \sigma_2 H_1 \oplus \sigma_3 H_1 \\ &= \{e, \sigma_1\} \oplus \{\sigma_2 e, \sigma_2 \sigma_1\} \oplus \{\sigma_3 e, \sigma_3 \sigma_1\} \\ &= \{e, \sigma_1\} \oplus \{\sigma_2, c_3^{-1}\} \oplus \{\sigma_3, c_3\}, \end{aligned}$$

を考えることができ、商空間  $C_{3V}/H_1$  は剰余類の集合として

$$\frac{C_{3V}}{H_1} = \{ \{e, \sigma_1\}, \{\sigma_2, c_3^{-1}\}, \{\sigma_3, c_3\} \} =: \{ [\sigma_1], [\sigma_2], [\sigma_3] \},$$

と書くことができる。この時、例えば上の商空間の代表元として

$$\xi = \sigma_1,$$

を選んだとする。この  $\xi$  に左から  $\sigma_2 (\in C_{3V})$  を作用させると

$$\sigma_2 \xi = \sigma_2 \sigma_1 = c_3^{-1},$$

となり、これは単なる  $C_{3V}$  の変換となる。これを商空間の「代表元から代表元への変換」にするためには、部分群  $H_1$  の元の逆元、つまりこの場合では

$$e^{-1} = e, \quad \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \quad (\in H_1),$$

を右から作用させる必要がある。実際これを作用させると

$$\begin{cases} \sigma_2 \xi e^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 e = \sigma_2 \sigma_1 = c_3^{-1}, \\ \sigma_2 \xi \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_2, \end{cases}$$

となり、これは

$$[\sigma_1] \text{ の代表元 } \rightarrow [\sigma_2] \text{ の代表元}$$

という変換になっていることが分かる。この例から分かる通り、ある代表元を

$$\xi \rightarrow g\xi, \quad (g \in G),$$

と変換させたものは単なる群  $G$  の下での  $\xi$  の変換であるが、ここへさらに  $h^{-1} \in H$  を作用させる、つまり

$$\xi \rightarrow g\xi \rightarrow g\xi h^{-1},$$

とすると、この変換はある剰余類の代表元から別の（同一のでもよいが）剰余類の元への変換になる。これが離散群の具体例による代表元の変換 (B.4) のイメージである。

群  $G$  の下で不変なラグランジアンを構成するために Maurer-Cartan 1-form

$$\alpha_\mu(\pi) = \frac{1}{i} \xi^{-1}(\pi) \partial_\mu \xi(\pi), \quad (\text{B.5})$$

を導入する。 $\xi(\pi)$  の変換 (B.4) の下で  $\alpha_\mu(\pi)$  は次のように変換する。

$$\alpha_\mu(\pi) \rightarrow \alpha_\mu(\pi') = h(\pi, g) \alpha_\mu(\pi) h^{-1}(\pi, g) + \frac{1}{i} h(\pi, g) \partial_\mu h^{-1}(\pi, g). \quad (\text{B.6})$$

$\alpha_\mu(\pi)$  はその定義より Lie 代数  $\mathcal{G}$  に属するので、破れていない部分  $\mathcal{H}$  と破れた部分  $\mathcal{G} - \mathcal{H}$  に分けることができる。

$$\begin{aligned} \alpha_\mu(\pi) &= \alpha_\mu^\alpha(\pi) S^\alpha + \alpha_\mu^a(\pi) X^a \\ &= 2\text{tr}(S^\alpha \alpha_\mu(\pi)) S^\alpha + 2\text{tr}(X^a \alpha_\mu(\pi)) X^a \\ &=: \alpha_{\parallel\mu}(\pi) + \alpha_{\perp\mu}(\pi). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

この時、 $\alpha_{\parallel\mu}(\pi)$  の変換について考えると、

$$\begin{aligned} \alpha_{\parallel\mu}(\pi) &\rightarrow \alpha_{\parallel\mu}(\pi') \\ &= 2\text{tr}[S^\alpha \alpha_\mu(\pi')] S^\alpha \\ &= 2\text{tr}[S^\alpha (h(\pi, g) \alpha_\mu(\pi) h^{-1}(\pi, g))] S^\alpha + 2\text{tr}\left[S^\alpha \left(\frac{1}{i} h(\pi, g) \partial_\mu h^{-1}(\pi, g)\right)\right] S^\alpha \\ &\stackrel{(*)}{=} 2(h\alpha_{\parallel\mu}h^{-1})^\alpha \text{tr}(S^\alpha S^\beta) S^\beta + 2(h\alpha_{\perp\mu}h^{-1})^a \text{tr}(S^\alpha X^a) S^\alpha + \frac{2}{i} (h\partial_\mu h^{-1})^\alpha \text{tr}(S^\alpha S^\beta) S^\beta \\ &= h(\pi, g) \alpha_{\parallel\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g) + \frac{1}{i} h(\pi, g) \partial_\mu h^{-1}(\pi, g), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる。ここで、3 つめの等号部分 (\*) において次の 2 つの等式

$$\begin{aligned} \bullet h(\pi, g) \alpha_\mu(\pi) h^{-1}(\pi, g) &= h(\pi, g) \alpha_{\parallel\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g) + h(\pi, g) \alpha_{\perp\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g) \quad (\because \text{(B.7)}) \\ &= (h \alpha_{\parallel\mu} h^{-1})^\alpha S^\alpha + (h \alpha_{\perp\mu} h^{-1})^a X^a, \end{aligned}$$

$$\bullet h(\pi, g) \partial_\mu h^{-1}(\pi, g) = [h (\partial_\mu h^{-1})]^\alpha S^\alpha,$$

が成り立つことを用いた<sup>17</sup>。

$\alpha_{\perp\mu}(\pi)$  の変換についても同様に考えることができる。

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp\mu}(\pi) &\rightarrow \alpha_{\perp\mu}(\pi') \\ &= 2\text{tr} [X^a \alpha_\mu(\pi')] X^a \\ &= 2\text{tr} [X^a (h \alpha_\mu h^{-1})] X^a + 2\text{tr} \left[ X^a \left( \frac{1}{i} h \partial_\mu h^{-1} \right) \right] X^a \\ &= 2 (h \alpha_{\parallel\mu} h^{-1})^\alpha \text{tr} (X^a S^\alpha) X^a + 2 (h \alpha_{\perp\mu} h^{-1})^a \text{tr} (X^b X^a) X^b + \frac{2}{i} (h \partial_\mu h^{-1})^\alpha \text{tr} (X^a S^\alpha) X^a \\ &= h(\pi, g) \alpha_{\perp\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g). \end{aligned} \tag{B.10}$$

これより、 $\alpha_\mu(\pi)$  の破れた Lie 代数に属する部分  $\alpha_{\perp\mu}(\pi)$  が群  $G$  の下で斉次的な変換性を持つことが分かる。

---

<sup>17</sup>  $h(\pi, g) \alpha_{\parallel\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g)$  と  $h(\pi, g) \alpha_{\perp\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g)$  のそれぞれが、 $\mathcal{H}$  と  $\mathcal{G} - \mathcal{H}$  のどちらに属しているか考える。これは、実際に破れていない部分群  $H$  の元を  $h = e^{i\theta^\alpha S^\alpha}$  ( $\theta^\alpha \ll 1$ ) とおくことで、簡易的にではあるが

$$\begin{aligned} h(\pi, g) \alpha_{\parallel\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g) &= e^{i\theta^\alpha S^\alpha} (\alpha_\mu^\beta S^\beta) e^{-i\theta^\gamma S^\gamma} \\ &\simeq [\mathbf{1} + i\theta^\alpha S^\alpha] [\alpha_\mu^\beta S^\beta] [\mathbf{1} - i\theta^\gamma S^\gamma] \\ &\simeq \alpha_\mu^\alpha S^\alpha + i\theta^\alpha \alpha_\mu^\beta [S^\alpha, S^\beta] \\ &\in \mathcal{H}, \quad (\because [S^\alpha, S^\beta] \in \mathcal{H}), \\ \\ h(\pi, g) \alpha_{\perp\mu}(\pi) h^{-1}(\pi, g) &= e^{i\theta^\alpha S^\alpha} (\alpha_\mu^a X^a) e^{-i\theta^\beta S^\beta} \\ &\simeq [\mathbf{1} + i\theta^\alpha S^\alpha] [\alpha_\mu^a X^a] [\mathbf{1} - i\theta^\beta S^\beta] \\ &\simeq \alpha_\mu^a X^a + i\theta^\alpha \alpha_\mu^a [S^\alpha, X^a] \\ &\in \mathcal{G} - \mathcal{H}, \quad (\because [S^\alpha, X^a] \in \mathcal{H}), \end{aligned} \tag{B.9}$$

として計算することにより、確かめることができる。

$h (\partial_\mu h^{-1})$  についても同様に考える。

$$\begin{aligned} h (\partial_\mu h^{-1}) &= e^{i\theta^\alpha S^\alpha} (\partial_\mu e^{-i\theta^\beta S^\beta}) \\ &= [\mathbf{1} + i\theta^\alpha S^\alpha + \dots] \left[ -i (\partial_\mu \theta^\beta) S^\beta + \frac{i^2}{2} \left\{ (\partial_\mu \theta^\beta) \theta^\gamma + \theta^\beta (\partial_\mu \theta^\gamma) \right\} S^\beta S^\gamma + \dots \right] \\ &= -i (\partial_\mu \theta^\beta) S^\beta + \frac{i^2}{2} \left\{ (\partial_\mu \theta^\beta) \theta^\gamma + \theta^\beta (\partial_\mu \theta^\gamma) \right\} S^\beta S^\gamma - i^2 \theta^\gamma (\partial_\mu \theta^\beta) S^\gamma S^\beta + \dots \\ &= -i (\partial_\mu \theta^\beta) S^\beta + \frac{i^2}{2} (\partial_\mu \theta^\beta) \theta^\gamma [S^\beta, S^\gamma] + \mathcal{O}(\theta^3) \\ &\in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

また、式 (B.9) は破れた生成子  $X^a$  が

$$hX^a h^{-1} \in \mathcal{G} - \mathcal{H}, \quad (\text{B.11})$$

となることを表しており、これは「破れた生成子は部分群  $H$  の下で線形変換され、破れた生成子に属する」ということを意味している。よって、 $\{X^a\}$  は群  $H$  の線形な、一般に可約な、表現基底を与える。すなわち、

$$\begin{aligned} & h(\{X^{a_1}\}, \{X^{a_2}\}, \dots, \{X^{a_n}\}) h^{-1} \\ &= \left( \{X^{b_1}\}, \{X^{b_2}\}, \dots, \{X^{b_n}\} \right) \begin{pmatrix} \rho_{b_1 a_1}^1(h) & & & \mathbf{0} \\ & \rho_{b_2 a_2}^2(h) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \rho_{b_n a_n}^n(h) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

と書ける。(これは可約表現を  $n$  個のセクターに既約分解している。) これより、直交成分  $\alpha_{\perp\mu}(\pi)$  も  $n$  個の既約成分

$$\alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi) := \alpha_{\mu}^{a_i}(\pi) X^{a_i} = 2\text{tr}(X^{a_i} \alpha_{\mu}(\pi)) X^{a_i}, \quad (a_i = a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (\text{B.13})$$

に分解され、それぞれが独立に変換する。

$$\alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi) \rightarrow \alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi') = h(\pi, g) \alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi) h^{-1}(\pi, g). \quad (\text{B.14})$$

以上より、微分の次数が最低次 (2 次) の  $G$  の下で不変な一般的なラグランジアンは  $\alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi)$  を用いて次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{CCWZ}} = \sum_{i=1}^n f_i^2 \text{tr} \left( \alpha_{\perp\mu}^{(i)}(\pi) \right)^2 \quad (\text{B.15})$$

ここから分かるように、ラグランジアンは  $X^a$  の群  $H$  の下での既約成分の数  $n$  だけの任意定数  $f_i^2$  を含んでいる。

## C $SU(4)$ 群の生成子

この付録では文献 [28] を参考として  $SU(4)$  群の生成子の具体的な表現を記す。

$SU(4)$  群の生成子は 15 個ある。この中の 10 個は  $\bar{\Sigma} = \Sigma_c$  に対して性質 (A.4) を満たす  $Sp(4)$  の生成子であり、その内 4 個は以下のように定義される。

$$S^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\tau_\alpha)^T \end{pmatrix}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{C.1})$$

ここで、 $\alpha = 1, 2, 3$  については  $\tau_\alpha$  はパウリ行列を表し、 $\alpha = 4$  については  $\tau_4 = \mathbf{1}$  であるとする。残り 6 個の  $Sp(4)$  の生成子は以下のように定義される。

$$S^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B_\alpha \\ (B_\alpha)^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\alpha = 5, \dots, 10), \quad (\text{C.2})$$



ここで、 $\alpha = 5, \dots, 10$  に対して  $B_\alpha$  は次の様に定められる。

$$B_5 = \mathbf{1}_2, \quad B_6 = i\mathbf{1}_2, \quad B_7 = \tau_3, \quad B_8 = i\tau_3, \quad B_9 = \tau_1, \quad B_{10} = i\tau_1. \quad (\text{C.3})$$

$\bar{\Sigma} = \Sigma_c$  に対して性質 (A.6) を満たす  $Sp(4)/Sp(4)$  の破れた生成子は全部で 5 個あり、その内 3 個は以下のように定義される。

$$X^a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\tau_a)^T \end{pmatrix}, \quad (a = 1, 2, 3), \quad (\text{C.4})$$

ここで、 $\tau_a$  はパウリ行列を表す。残り 2 個の破れた生成子は以下のように定義される。

$$X^a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & D_a \\ (D_a)^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (a = 4, 5), \quad (\text{C.5})$$

ここで、 $a = 4, 5$  に対して  $D_a$  は次の様に定められる。

$$D_4 = \tau_2, \quad D_5 = i\tau_2. \quad (\text{C.6})$$

また、これらの生成子は以下の規格直行化を満たしている；

$$\text{tr}(S^\alpha S^\beta) = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}, \quad \text{tr}(X^a X^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad \text{tr}(S^\alpha X^a) = 0. \quad (\text{C.7})$$

## D 隠れた局所対称性の枠組みに基づく $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$ 線形シグマ模型の定式化

この付録では、隠れた局所対称性 (HLS) の枠組みに基づいた、 $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$  の対称性を持ち  $H_{\text{local}}$  に対応するゲージ場を含む線形シグマ模型構成の一般論についてまとめる。有効模型へベクトルボソンを含める手法としてはこの他に、Callan-Caleman-Wess-Zumino の物質場として含める手法 [32, 33]、テンソル場として含める手法 [35, 36, 37]、そして Massive Yang-Mills 場として含める手法 [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45] などがあるが、これらの手法は全て HLS に基づく模型と等価であり、この手法はベクトルボソンを含む有効模型を構成する最も一般的な枠組みであると言える。また、 $H_{\text{local}}$  に対応するゲージ場を除去した際には、この模型が付録 B で構成した商空間  $G/H$  における非線形シグマ模型へ帰着することを示す。この付録の主な内容は文献 [30] を参考にしている。

今、考える線形シグマ模型の基本変数を  $\xi(x)$  とおき、これが  $\xi(x)\xi^\dagger(x) = \xi^\dagger(x)\xi(x) = \mathbf{1}$  を満たす群  $G$  のユニタリ行列であり、 $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$  の下で次の様に変換するとする。

$$\xi(x) \rightarrow \xi'(x) = h(x)\xi(x)g^\dagger, \quad (g \in G_{\text{global}}, h(x) \in H_{\text{local}}). \quad (\text{D.1})$$

$\xi(x)$  を次のようにパラメトライズする。

$$\xi(x) = \xi(\sigma)\xi(\pi) = \exp\left[\frac{i}{f_\sigma}\sigma^\alpha(x)S^\alpha\right]\exp\left[\frac{i}{f_\pi}\pi^a(x)X^a\right], \quad (S^\alpha \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}), \quad (\text{D.2})$$

ここで  $\mathcal{G}$  と  $\mathcal{H}$  はそれぞれ群  $G$  と  $H$  の Lie 代数であり、 $S^\alpha$  と  $X^a$  は規格直行化 (B.2) を満たすものとする。

Maurer-Cartan 1-form

$$\alpha_\mu(x) = \frac{1}{i} \partial_\mu \xi(x) \cdot \xi^\dagger(x), \quad (\text{D.3})$$

を導入すると、 $\xi(x)$  の変換 (D.1) の下で  $\alpha_\mu(x)$  は次のように変換する。

$$\alpha_\mu(x) \rightarrow \alpha'_\mu(x) = h(x) \alpha_\mu(x) h^\dagger(x) + \frac{1}{i} \partial_\mu h(x) \cdot h^\dagger(x). \quad (\text{D.4})$$

$\alpha_\mu(x)$  はその定義より Lie 代数  $\mathcal{G}$  に属するので、その部分群  $H$  に対応する破れていない部分  $\mathcal{H}$  と破れた部分  $\mathcal{G} - \mathcal{H}$  に分けて

$$\begin{aligned} \alpha_\mu(x) &= \alpha_\mu^\alpha(x) S^\alpha + \alpha_\mu^a(x) X^a \\ &= 2\text{tr}(S^\alpha \alpha_\mu(x)) S^\alpha + 2\text{tr}(X^a \alpha_\mu(x)) X^a \\ &=: \alpha_{\parallel\mu}(x) + \alpha_{\perp\mu}(x), \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

と書くことができる。この時、式 (B.8) と (B.10) と同様に考えることで、 $\alpha_{\parallel\mu}(x)$  と  $\alpha_{\perp\mu}(x)$  の変換性を以下の様に求めることができる。

$$\alpha_{\parallel\mu}(x) \rightarrow \alpha'_{\parallel\mu}(x) = h(x) \alpha_{\parallel\mu}(x) h^\dagger(x) + \frac{1}{i} \partial_\mu h(x) \cdot h^\dagger(x), \quad (\text{D.6})$$

$$\alpha_{\perp\mu}(x) \rightarrow \alpha'_{\perp\mu}(x) = h(x) \alpha_{\perp\mu}(x) h^\dagger(x). \quad (\text{D.7})$$

$H_{\text{local}}$  対称性に対応するゲージ場  $V_\mu = V_\mu^\alpha(x) S^\alpha$  を導入するために共変微分  $D_\mu \xi(x)$  を定義する；

$$D_\mu \xi(x) := \partial_\mu \xi(x) - i V_\mu(x) \xi(x). \quad (\text{D.8})$$

$D_\mu \xi(x)$  が  $\xi(x)$  と同じ変換性 (D.1) を満たすための  $V_\mu$  の変換性は

$$V_\mu(x) \rightarrow V'_\mu(x) = h(x) V_\mu(x) h^\dagger(x) + i h(x) \cdot \partial_\mu h^\dagger(x), \quad (\text{D.9})$$

となる。これにより、Maurer-Cartan 1-form (D.3) を共変化した  $\hat{\alpha}_\mu(x)$  が

$$\hat{\alpha}_\mu(x) := \frac{1}{i} D_\mu \xi(x) \cdot \xi^\dagger(x) = \alpha_\mu(x) - V_\mu(x), \quad (\because (\text{D.3}), (\text{D.8})), \quad (\text{D.10})$$

と定義され、これは  $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$  の下で斉次的に変換する：

$$\hat{\alpha}_\mu(x) \rightarrow \hat{\alpha}'_\mu(x) = h(x) \hat{\alpha}_\mu(x) h^\dagger(x). \quad (\text{D.11})$$

この時、 $\hat{\alpha}_\mu(x)$  を

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_\mu(x) &= \hat{\alpha}_\mu^\alpha(x) S^\alpha + \hat{\alpha}_\mu^a(x) X^a \\ &= 2\text{tr}(S^\alpha \hat{\alpha}_\mu(x)) S^\alpha + 2\text{tr}(X^a \hat{\alpha}_\mu(x)) X^a \\ &=: \hat{\alpha}_{\parallel\mu}(x) + \hat{\alpha}_{\perp\mu}(x), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

として  $\mathcal{H}$  と  $\mathcal{G} - \mathcal{H}$  に属する部分に分解すると、その両方が

$$\hat{\alpha}_{\parallel, \perp \mu}(x) \rightarrow \hat{\alpha}'_{\parallel, \perp \mu}(x) = h(x) \hat{\alpha}_{\parallel, \perp \mu}(x) h^\dagger(x), \quad (\text{D.13})$$

として斉次的に変換する。よって、微分の次数が最低次の  $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$  不変なラグランジアンは  $\hat{\alpha}_{\parallel \mu}(x)$  と  $\hat{\alpha}_{\perp \mu}(x)$  の2つの構成要素を用いて次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{HLS}} &= \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_A \\ &:= f_\sigma^2 \text{tr} \left[ \hat{\alpha}_{\parallel \mu}^2(x) \right] + f_\pi^2 \text{tr} \left[ \hat{\alpha}_{\perp \mu}^2(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$\hat{\alpha}_{\parallel, \perp \mu}(x)$  は  $\alpha_{\parallel, \perp \mu}(x)$  を用いて

$$\hat{\alpha}_{\parallel \mu}(x) = \alpha_{\parallel \mu}(x) - V_\mu(x), \quad \hat{\alpha}_{\perp \mu}(x) = \alpha_{\perp \mu}(x), \quad (\text{D.15})$$

と書くことができる。この時、ラグランジアン (D.14) の  $H_{\text{local}}$  のゲージ場成分  $V_\mu^\alpha$  に対する停留条件より

$$\frac{\partial}{\partial V_{\alpha \mu}} \mathcal{L}_{\text{HLS}} = 0 \leftrightarrow V_\mu^\alpha = \alpha_\mu^\alpha, \quad (\because V_\mu = \alpha_{\parallel \mu}). \quad (\text{D.16})$$

となるので、この解を再び  $\mathcal{L}_{\text{HLS}}$  へ代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{HLS}} \Big|_{V_\mu = \alpha_{\parallel \mu}} &= \left( f_\sigma^2 \text{tr} \left[ (\alpha_{\parallel \mu} - V_\mu)^2 \right] + f_\pi^2 \text{tr} \left[ \alpha_{\perp \mu}^2 \right] \right) \Big|_{V_\mu = \alpha_{\parallel \mu}} \\ &= f_\pi^2 \text{tr} \left[ \alpha_{\perp \mu}^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

となり  $V_\mu$  を含む項  $\mathcal{L}_V$  が消去される。ここで、 $\xi(x)$  の変換性 (D.1) は

$$\begin{aligned} (\text{D.1}) : \xi(x) &\rightarrow h(x) \xi(x) g^\dagger \\ &= h(x) \cdot \xi(\sigma) \xi(\pi) \cdot g^\dagger \quad (\because (\text{D.2})) \\ &= h(x) \xi(\sigma) \tilde{h}^\dagger(\pi, \sigma, g) \cdot \tilde{h}(\pi, \sigma, g) \xi(\pi) g^\dagger \quad \left( \because \tilde{h}^\dagger \tilde{h} = \mathbf{1}, \tilde{h} \in H \right), \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

と書きなおせる。これは変数  $\xi(\sigma)$  と  $\xi(\pi)$  が  $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$  の下でそれぞれ

$$\xi(\sigma) \rightarrow \xi(\sigma') = h(x) \xi(\sigma) \tilde{h}^\dagger(\pi, \sigma, g), \quad (\text{D.19})$$

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = \tilde{h}(\pi, \sigma, g) \xi(\pi) g^\dagger, \quad (\text{D.20})$$

と変換することを表している。ここで、 $H_{\text{local}}$  変換についてのゲージ固定 (ユニタリーゲージ)  $\sigma(x) = 0$  を考えると  $\xi(x)$  は

$$(\text{D.2}) : \xi(x) = \xi(\pi) \quad (\because \sigma = 0), \quad (\text{D.21})$$

となり、この変換性は

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = \tilde{h}(\pi, g) \xi(\pi) g^\dagger, \quad (\text{D.22})$$

と表される<sup>18</sup>。よってこの時、 $\xi(x) = \xi(\pi)$  は商空間  $G/H$  の代表元そのものであり、これを用いて定義される Maurer-Cartan 1-form (D.3) とその垂直成分を用いて記述されるラグランジアン (D.17) は、付録 B の非線形シグマ模型構成の際に議論したものと同一ものとなる：

$$\therefore \mathcal{L}_{\text{HLS}} \Big|_{V_\mu = \alpha_{\parallel\mu}} = \mathcal{L}_{\text{CCWZ}} \quad (\text{for } \sigma(x) = 0). \quad (\text{D.24})$$

また、 $H_{\text{local}}$  変換が (D.23) の形で与えられる時、ゲージ場  $V_\mu(x)$  の変換 (D.9) は

$$V_\mu(x) \rightarrow V'_\mu(x) = \tilde{h}(\pi, g)V(x)\tilde{h}^\dagger(\pi, g) + i\tilde{h}(\pi, g) \cdot \partial_\mu \tilde{h}^\dagger(\pi, g), \quad (\text{D.25})$$

となる。これは文献 [34] における”Weinberg’s  $\rho$ -meson”と同じ変換性である。

## E $SU(2)_{\text{color}}$ における $\mathcal{O}(p^4)$ HLS ラグランジアン

この付録では、参考文献 [31, 49] に基づいて作成した  $SU(2)_{\text{color}}$  の  $N_f$  フレーバーにおける  $\mathcal{O}(p^4)$  HLS ラグランジアンの形を示す。表記の便宜のために、ラグランジアンの構成要素として  $\hat{V}_{\mu\nu}$  と  $\hat{A}_{\mu\nu}$  という場を以下の様に定義する。

$$\hat{V}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[ \xi_R \bar{\Sigma} C_{\mu\nu}^T \bar{\Sigma} \xi_R^\dagger + \xi_L C_{\mu\nu} \xi_L^\dagger \right], \quad \hat{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \xi_R \bar{\Sigma} C_{\mu\nu}^T \bar{\Sigma} \xi_R^\dagger - \xi_L C_{\mu\nu} \xi_L^\dagger \right], \quad (\text{E.1})$$

ここで、 $C_{\mu\nu}$  は式 (2.18) で定義される  $SU(2N_f)_{\text{chiral}}$  の外場としてのゲージ場  $C_\mu$  の場の強さのテンソル；

$$C_{\mu\nu} := \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu - i[C_\mu, C_\nu], \quad (\text{E.2})$$

である。式 (E.1) と表 4 にまとめられる構成要素を用いると  $P$  と  $C$  変換の下で不変な  $\mathcal{O}(p^4)$  HLS ラグランジアンは次の様に与えられる。

$$\mathcal{L}_{(4)} = \mathcal{L}_{(4)y} + \mathcal{L}_{(4)w} + \mathcal{L}_{(4)z}, \quad (\text{E.3})$$

<sup>18</sup> これは式 (D.20) において  $\sigma = 0$  としたもの、と考えても良いし、次の様に考えることもできる。 $\xi(\sigma)$  の変換性 (D.19) より

$$\begin{aligned} \xi(\sigma') &= h(x)\xi(\sigma)\tilde{h}^\dagger(\pi, \sigma, g) \\ \Leftrightarrow \xi(0) &= h(x)\xi(0)\tilde{h}^\dagger(\pi, 0, g) \quad (\because \sigma = 0) \\ \Leftrightarrow \mathbf{1} &= h(x)\tilde{h}^\dagger(\pi, 0, g) \\ \therefore h(x) &= \tilde{h}(\pi, g), \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

となるので、 $\xi(x)$  の変換 (D.1) は式 (D.22) で表されることになる。

ここで、 $\mathcal{L}_{(4)y}$ 、 $\mathcal{L}_{(4)w}$ 、 $\mathcal{L}_{(4)z}$  はそれぞれ次の形で与えられる：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(4)y} = & y_1 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}] + y_2 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}] + y_3 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] \\
& + y_4 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + y_5 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + y_6 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] \\
& + y_7 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu}] + y_8 \left\{ \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu}] \right\} \\
& + y_9 \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + y_{10} (\text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu}])^2 + y_{11} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu}] \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}] \\
& + y_{12} (\text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu}])^2 + y_{13} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu}] \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + y_{14} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu}] \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] \\
& + y_{15} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu}] \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}], \tag{E.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(4)w} = & w_1 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} (\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger})] + w_2 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu}] \text{tr} [\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger}] + w_3 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} (\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger})] \\
& + w_4 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [\hat{\alpha}_{\parallel\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu}] \text{tr} [\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger}] + w_5 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [(\hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp\mu} - \hat{\alpha}_{\perp\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu}) (\hat{\chi} - \hat{\chi}^{\dagger})] \\
& + w_6 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [(\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger})^2] + w_7 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} (\text{tr} [\hat{\chi} + \hat{\chi}^{\dagger}])^2 + w_8 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} \text{tr} [(\hat{\chi} - \hat{\chi}^{\dagger})^2] \\
& + w_9 \frac{f_{\chi}^2}{f_{\pi}^2} (\text{tr} [\hat{\chi} - \hat{\chi}^{\dagger}])^2, \tag{E.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(4)z} = & z_1 \text{tr} [\hat{\mathcal{V}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{V}}^{\mu\nu}] + z_2 \text{tr} [\hat{\mathcal{A}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}^{\mu\nu}] + z_3 \text{tr} [\hat{\mathcal{V}}_{\mu\nu} V^{\mu\nu}] \\
& + iz_4 \text{tr} [V_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}] + iz_5 \text{tr} [V_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] + iz_6 \text{tr} [\hat{\mathcal{V}}_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu}] + iz_7 \text{tr} [\hat{\mathcal{V}}_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu}] \\
& - iz_8 \text{tr} [\hat{\mathcal{A}}_{\mu\nu} (\hat{\alpha}_{\perp}^{\mu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\nu} + \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\nu})]. \tag{E.6}
\end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] G. E. Brown and M. Rho, “Scaling effective Lagrangians in a dense medium,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2720 (1991).
- [2] T. Hatsuda and S. H. Lee, “QCD sum rules for vector mesons in nuclear medium,” *Phys. Rev. C* **46**, 34 (1992).
- [3] M. Harada and C. Sasaki, “Vector manifestation in hot matter,” *Phys. Lett. B* **537**, 280 (2002).
- [4] M. Harada, Y. Kim and M. Rho, “Vector manifestation and fate of vector mesons in dense matter,” *Phys. Rev. D* **66**, 016003 (2002).
- [5] R. Arnaldi *et al.* [NA60 Collaboration], “First measurement of the rho spectral function in high-energy nuclear collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 162302 (2006)
- [6] K. Ozawa *et al.* [E325 Collaboration], “Observation of rho / omega meson modification in nuclear matter,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5019 (2001)
- [7] M. Naruki *et al.*, “Experimental signature of the medium modification for rho and omega mesons in 12-GeV p + A reactions,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 092301 (2006)
- [8] C. Bernard *et al.*, “QCD equation of state with 2+1 flavors of improved staggered quarks,” *Phys. Rev. D* **75**, 094505 (2007).
- [9] See e.g. S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka and T. Takaishi, “Lattice QCD at finite density: An introductory review,” *Prog. Theor. Phys.* **110**, 615 (2003).
- [10] J. B. Kogut, M. A. Stephanov and D. Toublan, “On two-color QCD with baryon chemical potential,” *Phys. Lett. B* **464**, 183 (1999).
- [11] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot and A. Zhitnitsky, “QCD-like theories at finite baryon density,” *Nucl. Phys. B* **582**, 477 (2000).
- [12] K. Splittorff, D. T. Son and M. A. Stephanov, “QCD-like Theories at Finite Baryon and Isospin Density,” *Phys. Rev. D* **64**, 016003 (2001).
- [13] J. Wirstam, J. T. Lenaghan and K. Splittorff, “Melting the diquark condensate in two-color QCD: A renormalization group analysis,” *Phys. Rev. D* **67**, 034021 (2003).
- [14] C. Ratti and W. Weise, “Thermodynamics of two-colour QCD and the Nambu Jona-Lasinio model,” *Phys. Rev. D* **70**, 054013 (2004).
- [15] T. Kanazawa, T. Wettig and N. Yamamoto, “Chiral Lagrangian and spectral sum rules for dense two-color QCD,” *JHEP* **0908**, 003 (2009).

- [16] T. Brauner, K. Fukushima and Y. Hidaka, “Two-color quark matter:  $U(1)_A$  restoration, superfluidity, and quarkyonic phase,” *Phys. Rev. D* **80**, 074035 (2009).
- [17] T. Kanazawa, T. Wettig and N. Yamamoto, “Chiral random matrix theory for two-color QCD at high density,” *Phys. Rev. D* **81**, 081701 (2010)
- [18] G. Akemann, T. Kanazawa, M. J. Phillips and T. Wettig, “Random matrix theory of unquenched two-colour QCD with nonzero chemical potential,” *JHEP* **1103**, 066 (2011)
- [19] S. Hands, I. Montvay, S. Morrison, M. Oevers, L. Scorzato and J. Skullerud, “Numerical study of dense adjoint matter in two color QCD,” *Eur. Phys. J. C* **17**, 285 (2000).
- [20] S. Hands, I. Montvay, L. Scorzato and J. Skullerud, “Diquark condensation in dense adjoint matter,” *Eur. Phys. J. C* **22**, 451 (2001).
- [21] S. Hands, J. B. Kogut, M. P. Lombardo and S. E. Morrison, “Symmetries and spectrum of  $SU(2)$  lattice gauge theory at finite chemical potential,” *Nucl. Phys. B* **558**, 327 (1999).
- [22] J. B. Kogut, D. K. Sinclair, S. J. Hands and S. E. Morrison, “Two-colour QCD at non-zero quark-number density,” *Phys. Rev. D* **64**, 094505 (2001).
- [23] J. B. Kogut, D. Toublan and D. K. Sinclair, “The phase diagram of four flavor  $SU(2)$  lattice gauge theory at nonzero chemical potential and temperature,” *Nucl. Phys. B* **642**, 181 (2002).
- [24] J. B. Kogut, D. Toublan and D. K. Sinclair, “The pseudo-Goldstone spectrum of 2-colour QCD at finite density,” *Phys. Rev. D* **68**, 054507 (2003).
- [25] Y. Nishida, K. Fukushima and T. Hatsuda, “Thermodynamics of strong coupling 2-color QCD with chiral and diquark condensates,” *Phys. Rept.* **398**, 281 (2004).
- [26] S. Muroya, A. Nakamura and C. Nonaka, “Behavior of hadrons at finite density: Lattice study of color  $SU(2)$  QCD,” *Phys. Lett. B* **551**, 305 (2003).
- [27] S. Hands, P. Sitch and J. I. Skullerud, “Hadron Spectrum in a Two-Colour Baryon-Rich Medium,” *Phys. Lett. B* **662**, 405 (2008).
- [28] J. T. Lenaghan, F. Sannino and K. Splittorff, “The superfluid and conformal phase transitions of two-color QCD,” *Phys. Rev. D* **65**, 054002 (2002).
- [29] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki and T. Yanagida, “Is Rho Meson A Dynamical Gauge Boson Of Hidden Local Symmetry ?,” *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1215 (1985).



- [30] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, “Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries,” *Phys. Rept.* **164**, 217 (1988).
- [31] M. Harada and K. Yamawaki, “Hidden local symmetry at loop: A new perspective of composite gauge boson and chiral phase transition,” *Phys. Rept.* **381**, 1 (2003).
- [32] S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, “Structure of phenomenological Lagrangians. 1,” *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969); C. G. Callan, S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, “Structure of phenomenological Lagrangians. 2,” *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969).
- [33] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich and E. de Rafael, “Chiral Lagrangians for Massive Spin 1 Fields,” *Phys. Lett. B* **223**, 425 (1989).
- [34] S. Weinberg, “Precise relations between the spectra of vector and axial vector mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **18**, 507 (1967).
- [35] J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory To One Loop,” *Annals Phys.* **158**, 142 (1984).
- [36] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich and E. de Rafael, “The Role Of Resonances In Chiral Perturbation Theory,” *Nucl. Phys. B* **321**, 311 (1989).
- [37] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich and E. de Rafael, “Chiral Lagrangians for Massive Spin 1 Fields,” *Phys. Lett. B* **223**, 425 (1989).
- [38] J. Wess and B. Zumino, “Lagrangian method for chiral symmetries,” *Phys. Rev.* **163**, 1727 (1967);
- [39] J. S. Schwinger, “Chiral Dynamics,” *Phys. Lett. B* **24**, 473 (1967).
- [40] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, “Effective Lagrangians and field algebras with chiral symmetry,” *Rev. Mod. Phys.* **41**, 531 (1969).
- [41] O. Kaymakçalan, S. Rajeev and J. Schechter, “Nonabelian Anomaly And Vector Meson Decays,” *Phys. Rev. D* **30**, 594 (1984).
- [42] J. Schechter, “Electromagnetism In A Gauged Chiral Model,” *Phys. Rev. D* **34**, 868 (1986).
- [43] M. F. L. Golterman and N. D. Hari Dass, “On The QCD Effective Action For Pions And Vector Mesons,” *Nucl. Phys. B* **277**, 739 (1986).
- [44] U. G. Meissner, “Low-Energy Hadron Physics From Effective Chiral Lagrangians With Vector Mesons,” *Phys. Rept.* **161**, 213 (1988).
- [45] U. G. Meissner and I. Zahed, “NUCLEONS FROM SKYRMIONS WITH VECTOR MESONS,” *Z. Phys. A* **327**, 5 (1987).

- [46] H. Georgi. “NEW REALIZATION OF CHIRAL SYMMETRY,” Phys. Rev. Lett. **63**, 1917 (1989).
- [47] H. Georgi. “Vector Realization Of Chiral Symmetry,” Nucl. Phys. B **331**, 311 (1990).
- [48] M. Harada and K. Yamawaki, “Hidden local symmetry at one loop,” Phys. Lett. B **297**, 151 (1992).
- [49] M. Tanabashi, “Chiral perturbation to one loop including the rho meson,” Phys. Lett. B **316**, 534 (1993).
- [50] M. Harada and K. Yamawaki, “Wilsonian matching of effective field theory with underlying QCD,” Phys. Rev. D **64**, 014023 (2001).
- [51] M. Harada, C. Nonaka and T. Yamaoka, “Masses of vector boson in two-color dense QCD based on the hidden local symmetry” Phys. Rev. D **81**, 096003 (2010).
- [52] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, “On The Vector Mesons As Dynamical Gauge Bosons Of Hidden Local Symmetries,” Nucl. Phys. B **259**, 493 (1985).
- [53] M. Bando, T. Fujiwara and K. Yamawaki, “GENERALIZED HIDDEN LOCAL SYMMETRY AND THE A1 MESON,” Prog. Theor. Phys. **79**, 1140 (1988).
- [54] N. Kaiser and U. G. Meissner, “Generalized hidden symmetry for low-energy hadron physics,” Nucl. Phys. A **519**, 671 (1990).
- [55] M. Harada and C. Sasaki, “Dropping rho and A(1) meson masses at chiral phase transition in the generalized hidden local symmetry,” Phys. Rev. D **73**, 036001 (2006).
- [56] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “QCD and Resonance Physics. Sum Rules,” Nucl. Phys. B **147** (1979) 385; “QCD and Resonance Physics: Applications,” Nucl. Phys. B **147** (1979) 448.