

$B - L$ 数の破れた相互作用と宇宙のバリオン数生成

榎本 成志

2012 年 12 月 14 日

概 要

現在の宇宙には反粒子で構成される反物質はほとんど見られず、宇宙は物質優勢である。宇宙に存在する物質のうち、バリオンの量は比較的良好に分かっており、フォトンの量との存在比はおよそ 6×10^{-10} ほどである。場の理論によれば、粒子と反粒子は互いに対となって生成・消滅を行うので、粒子と反粒子の存在度はほぼ対称的となり、このわずかな差が現在の物質の一部であるバリオンの量として残っていると理解できる。しかしながら現在の素粒子標準模型には直接的にバリオン数を生成できるような相互作用が存在しないために、現在の宇宙に存在するバリオン数を説明することは非常に難しい。従って現在の宇宙に存在するバリオン数を説明するためには、標準模型を超える物理が必要であることを示唆している。

我々の研究では、 $B-L$ 数を破るような重い粒子の崩壊による宇宙のバリオン数を生成するシナリオを考え、その制限を与えた。本論文では、まず宇宙のバリオン数生成のためにどのような相互作用が必要かを論じ、少なくとも $B-L$ 数を破るという観点から、標準模型での高次元相互作用項の中には質量次元 5 の相互作用項に 1 種類、次元 7 の相互作用項に 11 種類だけの $B-L$ 数を破る項が存在することを挙げた。

次にこれらの相互作用項をさらに 2 つの相互作用に分解することによって、どのような粒子が媒介し、 $B-L$ 数を破る役割を担っているかを調べ上げた。その中には標準模型のフェルミオンと同じ電荷を持つ、 $SU(5)$ での 10 表現や $\bar{5}$ 表現に属するスカラー場が現れ、我々は特にこれらの粒子に注目し、それらの粒子による宇宙のバリオン数生成のシナリオを考えた。

我々の解析結果からは、このような重いスカラー場が熱的に生成された場合、ゲージ相互作用が存在するにもかかわらず、質量が 10^{14} GeV より大きければ、対消滅を始める前にバリオン数生成に十分な量が freeze-out し、その崩壊で必要なバリオン数を生成できる得ることが示された。

この重いスカラー場が宇宙のエネルギー的に対し優勢になった場合は別の評価が必要になるが、そのような場合に対してもやはり 10^{14} GeV 以上の質量であれば必要なバリオン数を生成でき得ることが示された。

バリオン数を破る相互作用に強くかかる制限として陽子崩壊の制限があるが、我々の研究に用いられた演算子は質量次元 7 由来のものであるため、そのような相互作用は自動的に非常に強く抑制される。

目次

第 1 章	序論	5
第 2 章	Sakharov の 3 条件	9
第 3 章	GUT バリオジェネシス	11
3.1	minimal $SU(5)$ 統一模型	11
3.2	最小 $SU(5)$ GUT モデルでのバリオジェネシス	16
第 4 章	スファレロン過程と $B - L$ 数転換	21
4.1	標準模型でのバリオ数・レプトン数非保存	21
4.2	スファレロン過程	23
4.3	$B - L$ 数から B 数, L 数への転換	24
第 5 章	レプトジェネシス	29
5.1	ニュートリノ質量とシーソー機構	29
5.2	熱的レプトジェネシス	31
第 6 章	$B - L$ 数生成によるバリオジェネシス	35
6.1	$B - L$ 数を破る相互作用	35
6.2	初期宇宙における $B - L$ 数生成	39
第 7 章	まとめと展望	49
	謝辞	51
付録 A	熱力学量と宇宙論	53
A.1	平衡系での熱力学量	53
A.2	輻射優勢期の宇宙膨張	58
A.3	エントロピー	60
付録 B	平均正味 $B - L$ 数の計算	65
	参考文献	69

第1章

序論

現在の宇宙には反粒子で構成される反物質はほとんど見られない。人工衛星の探査から、地球はもちろん月や他の惑星なども明らかに物質で構成されている。一方、地球に降り注ぐ宇宙線に目を向けてみると、宇宙線は銀河磁場によって銀河に拘束されており、観測される宇宙線は我々の銀河内で生じたものと考えられる。従って、これらの観測から銀河スケールで物質・反物質がどれほど存在しているかがわかる。実際の観測からは、その主成分は陽子であり、反陽子の量はその 10^{-4} 程度に過ぎないことがわかっており、またこれら宇宙線中の反陽子は、陽子と星間物質にある陽子とで2次的に生成されたものとして説明できるので、我々の銀河もまた物質で構成されていることが分かる。さらに銀河スケールでどのようなになっているかは、銀河団と銀河団の衝突で対消滅を起こしていないかが観測できればよい。もしも銀河団の中に反物質で構成される銀河が存在すると、物質で構成される銀河との境界で粒子と反粒子の対消滅が起こり、強いガンマ線が生じることとなる。しかしながら観測的にそのようなものは今日まで発見されていない。以上のような議論から、少なくとも我々の観測できうる範囲での現在の宇宙は物質優勢であると言える。

宇宙に存在する物質のうち、バリオンの量は比較的よく分かっている。宇宙論で最も成功している理論の1つであるビッグバン軽元素合成の理論によれば、現在の宇宙に存在する、水素やヘリウムといった物質の存在比を再現するためには、バリオン数/フォトン数比 η が

$$5.1 \times 10^{-10} < \eta < 6.5 \times 10^{-10} \quad (95\% \text{ CL}) \quad (1.1)$$

であればよい [1]。一方、WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) による観測からは

$$\eta = (6.19 \pm 0.15) \times 10^{-10} \quad (68\% \text{ CL}) \quad (1.2)$$

という結果が得られており [2]、理論と観測とが一致している。

現在の宇宙論では、軽元素合成以前の極初期にインフレーションが起こったと考えられているので、たとえインフレーション以前にバリオンが存在していても、インフレーション

ンによって薄められ^{*1}，その存在量はほぼ0になると考えられる。従って，いずれにせよインフレーション後の宇宙はバリオン数・反バリオン数はともに0の状態から発展していくと言える。また素粒子論では，粒子と反粒子は互いに対となって生成・消滅を行うので，粒子と反粒子はほぼ対称的に存在することが知られている。そこで，現在の宇宙でもバリオン・反バリオンが対称的に存在していると考え，観測の範囲を超えてバリオンと反バリオンが分離していると仮定すると，観測されたバリオン/フォトン比というのは，軽元素合成期での熱平衡からの離脱時に対消滅しきれずに残ったバリオンの量と考えられる。しかし，この立場に立ってバリオン/フォトン比を理論的に見積もると， $\eta \sim 10^{-18}$ となり，実際の値よりも8桁以上異なる結果となる。これでは我々を構成できるほど物質が残らなくなってしまう。

以上の議論から，現在の宇宙はバリオン非対称であると考えなければならない。インフレーション後はバリオン対称の状態であるから，インフレーション後の宇宙の発展中にバリオンと反バリオンが対生成で生じ，何らかのメカニズムでバリオンと反バリオンの数に差がついた，と考えるのが自然である。このように考えると，軽元素合成までの熱平衡時にバリオンの対消滅で反バリオンだけが先になくなり，現在のバリオンが残ったと考えられる。この意味で，バリオン数/フォトン数比というものは正味バリオン数 (net baryon number) での比として再定義できる。

$$\eta \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \sim 6 \times 10^{-10} \quad (1.3)$$

ここで n_B ， $n_{\bar{B}}$ ， n_γ はそれぞれ，バリオン数密度，反バリオン数密度，フォトン数密度である。このようにバリオンと反バリオンとの間に非対称性を生み出し，現在の宇宙に存在するバリオン数を生成する機構をバリオジェネシス (baryogenesis) と呼ぶ。

バリオンの生成・消滅のダイナミクスは場の量子論に基づいて評価されるべきである。バリオジェネシスはこのような立場のもと，素粒子間での適切な相互作用を考え，現在のバリオン/フォトン比を再現するようなシナリオを構築することを目標とする。

一般にバリオン対称な宇宙から非対称な宇宙へと発展させるには，2章で述べる Sakharov の条件を満たす必要がある。この条件は大統一理論 (GUT) による素粒子モデルで考えると満たすことができ，早くからこの GUT を用いた GUT バリオジェネシスが考えられていた。これについては3章で述べる。このシナリオはシンプルであるものの，陽子崩壊などから素粒子モデル自体が排除されていたり，またそれを考慮に入れずバリオン数を生成できたとしても，軽元素合成期以前の電弱相転移ごろまでの起こるとされる，スファレロン過程と呼ばれる相互作用によってバリオン数がかき消されてしまう，など多くの困難を抱えている。スファレロン過程については4章で述べる。

5章では現在最も有力なバリオン生成のシナリオとしてのレプトジェネシスシナリオを紹介する。このシナリオでは GUT は導入せず，右巻きニュートリノのみを導入する。そ

^{*1} 正確に言えば，インフレーション後に起こる宇宙の再加熱時に薄まる。これは宇宙のバリオン数をエントロピーで規格化して定義しているためであり，バリオン数を持たない軽い粒子が多数生成されればそれだけ薄まることになる。

の崩壊によって宇宙にレプトン数 L のみが生成され、その後スファレロン過程を通じてバリオン数が生成される。特に、熱的に生成された右巻きニュートリノの崩壊でレプトン数が生成されるような熱的レプトジェネシスと呼ばれるシナリオは、観測されるバリオン数がニュートリノ振動から制限されるニュートリノ質量や混合のパラメータと関係付くために、非常に興味深いシナリオの 1 つとなっている。

しかしながら熱的レプトジェネシスを適用できる素粒子模型は限られているので、 $B-L$ 数を生成できる他の可能性を探っておくことは価値のあることである。6 章ではそのようなモデルとしてどのような相互作用が必要かを論じ、その一例を扱ったバリオジェネシスのシナリオを論じる。

第 2 章

Sakharov の 3 条件

現在の宇宙には反物質がほとんど存在しない。つまり、現在の宇宙はバリオン非対称である。もしも宇宙の始まりがバリオン対称であったと仮定すると、現在のバリオン非対称な宇宙へ発展するためにはいくつかの条件が必要となる。

A. D. Sakharov はバリオン対称な宇宙からバリオン非対称な宇宙へダイナミカルに発展するために次の 3 つの条件が必要であることを指摘した [3]。

1. バリオン数の破れ
2. C と CP の破れ
3. 非平衡反応

多くのバリोजェネシスのモデル・シナリオではこれらの 3 つの条件を満たしている必要がある。この章ではこれらの条件の必要性について議論する。

1. バリオン数の破れ：バリオン対称な宇宙から非対称な宇宙への発展を考えるので、この条件は明らかである。ただし、宇宙の電弱相転移前にバリオン非対称な宇宙へと発展できたとしても、スファレロン過程と呼ばれる、 B 数や L 数を破る相互作用のような相互作用が活発に起こることによってバリオン対称な宇宙へ戻ってしまう場合がある。これはある温度から電弱相転移期までに宇宙がバリオン数とレプトン数との差 $B - L$ 数のみを保存するような相互作用によって平衡状態になってしまい、それまでに生成された B 数が L 数に転換したり、場合によっては消えてしまう。このような平衡状態は宇宙の温度がおよそ 10^{12} GeV から 100 GeV ほどまで続くと考えられている。平衡状態の議論は後に述べる 3. の条件が本質的な問題である。

2. C と CP の破れ：系 X から Y への遷移確率を $\Gamma(X \rightarrow Y)$ と書き、 Y の全バリオン数を B とする。また、この系を C (荷電共役) 変換した系での遷移確率を $\Gamma(X^C \rightarrow Y^C)$ と書く。この場合、 Y^C の全バリオン数は $-B$ である。

もしも系に C 不変性があると

$$\Gamma(X \rightarrow Y) = \Gamma(X^C \rightarrow Y^C) \quad (\text{C 不変}) \quad (2.1)$$

であり, $X \rightarrow Y$ と $X^C \rightarrow Y^C$ は同じ確率で遷移する。従って遷移後の正味バリオン数 B_{net} は

$$B_{\text{net}} = B - B = 0$$

となり, C 不変性があると正味バリオン数は生成されないことになる。

CP についても, バリオン数 B の系 Y に対して CP 変換された状態 Y^{CP} でのバリオン数が $-B$ となることから, C に関して全く同様の議論により, 破れている必要があることが分かる。

3. 非平衡反応: 分布関数において, 電荷といった保存量子数の総和が 0 である場合, 平衡状態での化学ポテンシャルは 0 になる。また, CPT 定理により粒子と反粒子の質量は同じであるので, 粒子と反粒子の分布関数は同じ形になり, 数密度も同じになる。従って平衡状態での正味バリオン数は 0 となってしまうので, バリオン非対称な宇宙への発展は非平衡の反応で起こらねばならない^{*1}。従ってインフレーション後, バリオン数 0 の宇宙から出発し, 10^{12} GeV 以上でバリオン非対称な宇宙が実現されても, それらの反応が $B - L$ を保存するものである限りは, スファレロン過程の平衡状態を経て最終的にバリオン数は 0 へと戻ってしまう。よって, 電弱相転移前までにバリオン非対称な宇宙へと発展するようなモデルでは, バリオン数の破れだけでなく, $B - L$ の破れを気にしなければならない。

考えるモデルが宇宙の発展で非平衡反応となるかどうかは, 大雑把には粒子反応の程度を表す遷移率 Γ と, 宇宙膨張による粒子数の散逸を表す Hubble パラメータ H とを比べればよい。順反応と逆反応のバランスが崩れるのは, 熱力学的に言っておよそその時の温度がその反応を成り立たせるために必要なエネルギーの程度である。今は粒子の反応であるから, 崩壊や対生成・対消滅といった場合のスケールは焦点を当てている粒子の質量程度であるので, 温度 T と粒子の質量 m が同程度 $T \sim m$ の時に非平衡かどうかを比較すればよい。従って, 判定条件は

$$\begin{aligned} \Gamma &\gtrsim H && \text{平衡状態} \\ \Gamma &\sim H && \text{平衡状態からの離脱} \\ \Gamma &\lesssim H && \text{非平衡状態} \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。この判定基準は単純であるが, 実際の非平衡統計力学における正確な取り扱いの定性的な性質をよく説明する。

^{*1} しかしながら平衡状態にいながらもバリオン非対称な宇宙へと発展できるようなモデルも存在する [4, 5]。基本的なアイデアは, 宇宙膨張の効果で CPT を破らせ, 粒子と反粒子との間にエネルギー差を生じさせる。それによって分布関数に差が生じ, 結果粒子数密度に差が生じる。そのために Lagrangian にバリオン数を持ったカレント (J_B^μ) と, あるスカラー場 (ϕ) を微分演算子と組み合わせ結合させ, 相互作用項として導入する ($\Delta\mathcal{L} = A\partial_\mu\phi J_B^\mu$, A はある質量次元を持った定数)。Robertson-Walker 計量の空間一様性のために時間成分だけが残るため, $\dot{\phi}$ がゼロでなければ J_B^0 によるバリオン数 (カレントが運ぶ量子数) に比例したエネルギーシフトを, 粒子と反粒子で逆に生じさせることができ, 粒子と反粒子の間にエネルギー差を生み出せる。

第 3 章

GUT バリオジェネシス

バリオン対称な宇宙から非対称な宇宙へと発展させるには Sakharov の条件を満たさなければならないことを 2 章で見たが、この条件を満たす素粒子モデルの候補として、すぐに大統一理論が候補に挙がる。大統一理論は素粒子論的な立場からも非常に興味深く、バリオン生成の研究に関しては歴史的にも最も早くからなされてきた [6, 7]。このモデルでのバリオン生成のシナリオでは GUT で現れる、標準模型に対して付加的な、とても重いゲージボソンやヒッグスの崩壊によってバリオン数を生成する。この章では、最も単純な最小 $SU(5)$ GUT モデルと、その GUT モデルで構成される GUT バリオジェネシスを簡単に説明する。

3.1 minimal $SU(5)$ 統一模型

Weinberg-Salam 理論の成功により、弱い相互作用と電磁相互作用は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性を持つ電弱相互作用として統一的に理解できるようになった。しかし“統一理論”としての観点からはまだ不十分な点があり、電弱ゲージ相互作用 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の 2 つの相互作用の強さが異なっている点や、 $SU(3)_C$ のゲージ理論で記述される強い相互作用も依然として独立に存在しており、これも相互作用の強さが異なる。ところが、ゲージ結合定数のエネルギー依存性を繰り込み群で追うと、3 つのゲージ結合定数が高エネルギー領域である値に統一されるような振る舞いを見せており、標準模型の $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ が 1 つのゲージ相互作用で記述できる可能性を示唆している。

その統一理論の最も単純なものは $SU(5)$ のモデルである [8]。 $SU(5)$ は標準模型のゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を部分群として含む、最小の半単純群である。標準模型 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に含まれる場とその表現・電荷を表 3.1 に示す。 $SU(5)$ 対称性に基づく minimal $SU(5)$ GUT では、これらのクォークとレプトンはさらに $SU(5)$ の 5 次元複素表現 ($\bar{5}$) の場と 10 次元表現 (10) の場へとまとめられる。

これから統一場の成分を見ていくが、以下では成分を表す添え字の定義として、大文字のアルファベット A, B, \dots は 1 から 5 まで走ることにする。このうち、1 から 3 まで

粒子	表記	表現と電荷 $(SU(3), SU(2))_{U(1)}$
左巻き 2 重項クォーク	$q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}$
右巻きアップ	u_R	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3}$
右巻きダウン	d_R	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}$
左巻き 2 重項レプトン	$l = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$
右巻き電子	e_R	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}$
2 重項ヒッグス	$h_D = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}$
グルーオン	G	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$
W ボソン	W	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$
B ボソン	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$

表 3.1 標準模型 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に現れる粒子とその表記。

を $SU(3)$ カラーの添え字に用い, $i, j, \dots \ni 1, 2, 3$ で表す。また, $4, 5$ は $SU(2)$ の添え字に用い, こちらは $a, b, \dots \ni 1, 2$ で表すことにする。

3.1.1 $SU(5)$ での場の表現

物質場 (クォーク・レプトン・ヒッグス): 5 次元複素表現 ($\bar{\mathbf{5}}$) は右巻きダウンと 2 重項レプトンとから成り,

$$\bar{\mathbf{5}}_A = \left(\begin{array}{c} d_{Ri}^c \\ \epsilon_{abl} l^b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} d_R^{1c} \\ d_R^{2c} \\ d_R^{3c} \\ e_L \\ -\nu_{eL} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} SU(3) \\ \\ \\ SU(2) \end{array} \quad (3.1)$$

とまとまる。ただし c は荷電共役変換を表し, また ϵ_{ab} は 2 行 2 列の完全反対称テンソルを表す。対して他のクォーク・レプトンは $\mathbf{10}$ 表現の場でまとめることができ,

$$\begin{aligned} \mathbf{10}^{AB} &= \{ \epsilon^{ijk} u_{Rk}, q^{ia}, \epsilon^{ab} e_R^c \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & u_R^{3c} & -u_L^{2c} & -u_L^1 & -d_L^1 \\ -u_R^{3c} & 0 & u_R^{1c} & -u_L^2 & -d_L^2 \\ u_R^{2c} & -u_R^{1c} & 0 & -u_L^3 & -d_L^3 \\ u_L^1 & u_L^2 & u_L^3 & 0 & -e_R^c \\ d_L^1 & d_L^2 & d_L^3 & e_R^c & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} SU(3) \\ \\ \\ SU(2) \end{array} \quad (3.2) \end{aligned}$$

と反対称行列の形でまとめられる。係数の $1/\sqrt{2}$ と行列中の符号は convention である。また ϵ^{ijk} は 3 行 3 列の完全反対称テンソルを表す。

ヒッグスは $\mathbf{5}$ 表現にまとめられる。この場を $\mathbf{5}_h$ と書くと、その形は

$$\mathbf{5}^A = \begin{pmatrix} h_T^i \\ h_D^a \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} h_T^1 \\ h_T^2 \\ h_T^3 \\ h_+ \\ h_0 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} SU(3) \\ SU(2) \end{matrix} \quad (3.4)$$

となる。ここで新たに導入された h_T は $SU(3)$ 3重項ヒッグスで、カラー電荷を持つ。標準模型での表現は $(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}$ である。

ゲージ場：ゲージ場は随伴表現の $\mathbf{24}$ 表現でまとめられる。標準模型の表現で分解すると

$$\mathbf{24} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5/6} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{5/6} \quad (3.5)$$

となり、初めの3つが標準模型の $U(1), SU(2), SU(3)$ のゲージ場 B, W, G にそれぞれ対応する。残りの2つは標準模型にはない付加的なゲージ場で、 X ゲージボソンと呼ばれる：

$$X : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{5/6}, \quad \bar{X} : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5/6} \quad (3.6)$$

X ゲージボソンは $SU(2)$ 2重項であるが、アイソスピン上向き、下向きのものをそれぞれ X, Y ゲージボソンと呼ぶ。電磁電荷はそれぞれ $4e/3, e/3$ である。

ゲージ場 $\mathbf{24}$ の具体形を見るために、生成子を定義しておく。 $SU(5)$ には $5^2 - 1 = 24$ 個の生成子 ($T^a; a = 0, 1, \dots, 23$) が存在し、すべてエルミートかつトレースレスである。また、基本表現での規格化 $\text{tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ を満たしているとする。まず、 T^0 をハイパーチャージに比例する行列に採る：

$$T^0 = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ & & & +1/2 & \\ & & & & +1/2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$T^{1,2,3}$ は $SU(2)$ 生成子の Pauli 行列 $\sigma^{1,2,3}/2$ で割り当て、また $T^{4,5,\dots,11}$ は $SU(3)$ 生成子の Gell-Mann 行列 $\lambda^{1,2,\dots,8}/2$ で割り当てる：

$$T^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma^{1,2,3}}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{4,5,\dots,11} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{1,2,\dots,8}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

残りの生成子については、例えば $T^{12}, T^{13}, T^{18}, T^{19}$ については、以下のようなペアで定義する：

$$T^{12} = \begin{pmatrix} & & 1/2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad T^{13} = \begin{pmatrix} & & +i/2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$T^{18} = \begin{pmatrix} & & 0 & 1/2 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1/2 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad T^{19} = \begin{pmatrix} & & 0 & -i/2 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ +i/2 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$T^{14\sim 17}, T^{20\sim 23}$ についても同様に, $1/2, \pm i/2$ が対になった形で定義される。以上の生成子の具体形を用いると, ゲージ場に対する表記を 24_V として次のように表される:

$$24_V = \sum_{a=0}^{23} 24_V^a T^a \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & \bar{X}^1 & \bar{Y}^1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & \bar{X}^2 & \bar{Y}^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}^3 & \bar{Y}^3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ただし, $G_1^1 \equiv G^3/\sqrt{2} + G^8/\sqrt{6}, G_2^2 \equiv -G^3/\sqrt{2} + G^8/\sqrt{6}, G_3^3 \equiv -2G^8/\sqrt{6}, G_j^i \equiv (G^i - iG^j)/\sqrt{2}, W^\pm \equiv (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$ の表記を用いた。

物質場, ゲージ場は以上のようにまとまったが, 実はこれだけではまだ不十分で, GUT の破れを説明するためにさらに付加的な場が必要になる。標準模型では電弱相互作用の対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ がヒッグス機構により自発的に破れ, 電磁相互作用の対称性 $U(1)_{em}$ が残ったと考えられているように, GUT でも $SU(5)$ がヒッグス機構により, 標準模型の対称性 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ へと自発的に破れると考えなければならない。GUT のスケールは $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ のそれぞれのゲージ相互作用の強さが等しくなるスケールであり, その大きさはおよそ $\sim 10^{14-15}$ GeV である*1。従って, 電弱相互作用のスケールの ~ 100 GeV とは大きく異なるために, 自発的に対称性を破るためのヒッグスは, 5_h だけでなくもう 1 種類必要となる。 $SU(5)$ GUT ではさらに 24 次元随伴表現のヒッグス 24_h を導入し, これが $SU(5)$ を標準模型の対称性 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ へと破る。

$$SU(5) \xrightarrow{\langle 24_h \rangle} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle 5_h \rangle} SU(3)_C \times U(1)_{em}$$

この対称性の自発的破れを起こすために必要なヒッグス場まで含めた $SU(5)$ GUT 模型は minimal $SU(5)$ モデルと呼ばれる。

*1 超対称性を取り入れた minimal $SU(5)$ モデルでは, そのスケールは 10^{16} GeV 程になる。またこの理論での 3 つのゲージ結合定数の running は超対称性を課さないものに比べより精度よく 1 点で交わるようになる [10]。

崩壊過程	B	L
$h_T \rightarrow \bar{q}\bar{q}$	$-2/3$	0
$h_T \rightarrow u_R^c d_R^c$	$-2/3$	0
$h_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c$	$+1/3$	$+1$
$h_T \rightarrow ql$	$+1/3$	$+1$
$X \rightarrow q\bar{u}_R^c$	$+2/3$	0
$X \rightarrow e_R^c \bar{q}$	$-1/3$	-1
$X \rightarrow \bar{l}d_R^c$	$-1/3$	-1

表 3.2 h_T, X の崩壊で生成される B 数と L 数。バー (-) は反粒子を表す。

3.1.2 相互作用項

場の相互作用項は $SU(5)$ 1 重項になるように組む。minimal $SU(5)$ での繰り込み可能な相互作用項で、標準模型フェルミオンと結合する相互作用項は、湯川型に対しては

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 \cdot 5_h &\equiv \epsilon_{ABCDE} 10^{AB} 10^{CD} 5_h^E \\ 10 \cdot \bar{5} \cdot 5_h^* &\equiv 10^{AB} \bar{5}_A 5_{hB}^* \end{aligned}$$

の 2 種類とそれに複素共役なものが存在し、そしてゲージ相互作用項に関しては、

$$\begin{aligned} 10^\dagger \cdot 24_V \cdot 10 &\equiv 10_{AB}^\dagger 24_V^B 10^{CA} \\ \bar{5}^\dagger \cdot 24_V \cdot \bar{5} &\equiv \bar{5}^{\dagger A} 24_V^B \bar{5}_B \end{aligned}$$

の 2 種類が存在する*²。これによって、標準模型には存在しなかった場 h_T, X, \bar{X} と標準模型フェルミオンとの間に次のような新たな相互作用項が現れる：

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 \cdot 5_h &\supset q q h_T, \quad u_R^c e_R^c h_T, \quad (h.c.) \\ 10 \cdot \bar{5} \cdot 5_h^\dagger &\supset u_R^c d_R^c h_T^*, \quad q l h_T^*, \quad (h.c.) \\ 10^\dagger \cdot 24_V \cdot 10 &\supset q^\dagger X u_R^c, \quad e_R^{\dagger c} X q, \quad u_R^{\dagger c} \bar{X} q, \quad q^\dagger \bar{X} e_R^c \\ \bar{5}^\dagger \cdot 24_V \cdot \bar{5} &\supset d_R^{\dagger c} X l, \quad l^\dagger \bar{X} d_R^c \end{aligned}$$

ただしここでは簡単化のために $SU(2)$ や $SU(3)$ の添え字は省略している。ここで重要なことは、新たに現れた h_T や X, \bar{X} を伴う相互作用によって、バリオン数、レプトン数をそれぞれ破る反応が可能になったことである。 h_T や X, \bar{X} の崩壊過程と、それによって生じるバリオン数、レプトン数を表 3.2 に示す。このことが GUT バリオジェネシスへ

*² 他にも 5_h や 24_h のゲージ相互作用項や自己相互作用項が存在するが、バリオン数生成には直接関わらないのでここでは省略した。ただし相互作用項として繰り込み不可能な項まで許すと、 24_h ヒッグスは標準模型フェルミオンと結合でき、バリオン数を破る過程が存在する。

の動機へとつながる^{*3}。ちなみにこの $SU(5)$ GUT ではバリオン数，レプトン数はともに破れてはいるが，すべての相互作用に対してバリオン数とレプトン数の差 $B - L$ は保存していることを言及しておく。

3.2 最小 $SU(5)$ GUT モデルでのバリオジェネシス

3.2.1 平均正味バリオン数

ここではまず，バリオン数を破る相互作用によりどれだけのバリオン数が生じるかを定量的に表す，平均正味バリオン数 (mean net baryon number) と呼ばれる量 ϵ を定義する。この量は 1 粒子始状態 i からある崩壊過程 j への分岐比 (branching ratio) $r_{i \rightarrow j}$ と，終状態でのバリオン数 B_f とを用いて，次のように定義される：

$$\epsilon \equiv \sum_f B_f (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \quad (3.16)$$

\bar{i}, \bar{f} は CP 変換された状態で，すなわち反粒子状態を表す。この定義からわかるように，平均正味バリオン数 ϵ は i と \bar{i} がそれぞれ 1 個崩壊したときにどのくらいの正味バリオン数が生成されるかを表している。従ってこの量を用いることによって，数密度 n_i の粒子 i がすべて崩壊すると，生成されるバリオン数密度 n_B は

$$n_B \sim \epsilon n_i \quad (3.17)$$

によって評価することができる。この評価が妥当である条件は，評価に用いられる粒子数のすべてがバリオン数を破る相互作用を通して崩壊すること，そして生成されたバリオン数が他のバリオン数を破る相互作用（例えば散乱など）によって消えないことである。従って，粒子 i が十分に平衡状態から外れた状況から崩壊し，なおかつ他のバリオン数を破る相互作用が抑制されていればよい。

^{*3} しかしながらこのようなバリオン数を破る相互作用は，標準模型では安定と考えられている陽子が， h_T や X を介してより軽いレプトンへと崩壊することを可能にする。これら相互作用の結合定数を g ， h_T や X の質量を M ，陽子質量を m_p として陽子の崩壊幅 Γ_p を見積ると，

$$\Gamma_p \sim \left(\frac{g^2}{M^2} \right)^2 m_p^5 \quad (3.13)$$

が得られる。 X ボソンによる効果が効いていると仮定すると，標準模型が $SU(5)$ 統一されるスケールでのゲージ結合定数や X ボソンの質量はモデルから得ることができるので，それらの値から陽子の寿命 τ_p に対して

$$\tau_p = \Gamma_p^{-1} \sim 10^{31} \text{ year} \quad (3.14)$$

が予言される [11]。しかしながら近年の陽子崩壊の観測からは

$$\tau_p^{\text{exp}} > 10^{34} \text{ year} \quad (3.15)$$

と制限されており [12]，minimal $SU(5)$ GUT モデルは残念ながらすでに exclude されている。このことは超対称性を課したモデルでも同様である。しかしながら minimal でないモデルについてはまだ可能性はある。

この平均正味バリオン数の評価から、バリオン数、 C 、 CP のすべてが破れていなければその値はゼロになることがわかる。具体的に i の崩壊過程が 2 種類ある場合を考えてみる。それぞれのモードへの分岐比を $r_1 \equiv r, r_2 = 1 - r$ と書くことにし、それぞれの崩壊過程で生じるバリオン数が B_1, B_2 であるとする、平均正味バリオン数は

$$\epsilon = B_1 r - B_1 \bar{r} + B_2(1 - r) - B_2(1 - \bar{r}) = (B_1 - B_2)(r - \bar{r}) \quad (3.18)$$

と求められる。ただし反粒子状態の分岐比を \bar{r} で表している。従って、崩壊でのバリオン数が保存されていると $B_1 = B_2$ であり、また C, CP が保存していると $r = \bar{r}$ となってしまうので、そのような場合には $\epsilon = 0$ であり、結局正味バリオン数がゼロになることが示される。

崩壊過程が 3 種類以上存在する場合にも同様の結論が得られ^{*4}、その場合の一般的な表式は

$$\epsilon_i = \sum_{f \notin G} (B_{i \rightarrow f} - B_{i \rightarrow g})(r_{i \rightarrow f} - r_{i \rightarrow \bar{f}}) \quad (3.19)$$

で与えられる。ここで G は、終状態は異なるが生成される B 数は同じである崩壊過程のグループを表し、そのうちの 1 つのモードを g と表している。この表式からも、バリオン数を破る反応が少なくとも 2 種類以上必要であることと、同時に C, CP の破れが必要であることが理解できる。この表式の利点は計算量が軽減されることで、 ϵ_i の評価にすべての分岐比を計算する必要はなく、あるグループ G を 1 つ選び、それ以外のグループの分岐比のみを計算すればよいことを (3.19) は示している。

3.2.2 最小 $SU(5)$ GUT モデルで生成されるバリオン数

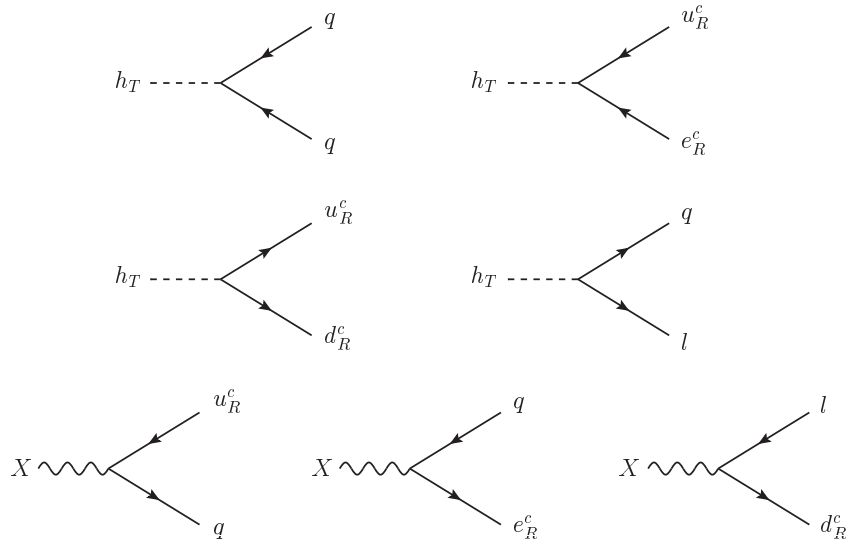
最小 $SU(5)$ GUT では図 3.1 のようなバリオン数を破る相互作用が存在する。これらの相互作用から生成される平均正味バリオン数は、(3.19) を用いることで求めることができる。ここでの計算では X, h_T の崩壊過程の基準に、それぞれ $h_T \rightarrow \bar{q}\bar{q}, X \rightarrow \bar{d}_R^c l$ を選ぶ。 X, h_T の崩壊で生成される平均正味バリオン数をそれぞれ $\epsilon_X, \epsilon_{h_T}$ とすると、

$$\begin{aligned} \epsilon_{h_T} &= \left[+\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] \left[r_{h_T \rightarrow ql} - r_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{q}\bar{l}} \right. \\ &\quad \left. + r_{h_T \rightarrow u_R^c e_R^c} - r_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c} \right] \\ &= r_{h_T \rightarrow ql} - r_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{q}\bar{l}} + r_{h_T \rightarrow u_R^c e_R^c} - r_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \left[+\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \left[r_{X \rightarrow \bar{u}_R^c q} - r_{\bar{X} \rightarrow u_R^c \bar{q}} \right] \\ &= r_{X \rightarrow \bar{u}_R^c q} - r_{\bar{X} \rightarrow u_R^c \bar{q}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。

^{*4} 付録 B を参照。

図 3.1 $SU(5)$ GUT でのバリオン数を破る相互作用

次に分岐比 r を求める。2 体崩壊で、さらに終状態の粒子の質量が 0 である場合の部分崩壊幅 (partial decay width) は

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{16\pi m_i} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \quad (3.22)$$

で与えられる。ただし m_i は崩壊粒子 i の質量で、 \mathcal{M} は不変散乱振幅である。これを用いると、全崩壊幅 (total decay width) $\Gamma_i \equiv \sum_f \Gamma_{i \rightarrow f}$ はツリー項までの寄与で、

$$\begin{aligned} \Gamma_{h_T} &= \Gamma_{h_T \rightarrow \bar{q}q} + \Gamma_{h_T \rightarrow u_R^c d_R^c} + \Gamma_{h_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c} + \Gamma_{h_T \rightarrow ql} \\ &= \frac{m_{h_T}}{48\pi} \text{tr} \left[2y_{qq}^\dagger y_{qq} + 2y_{ud}^\dagger y_{ud} + y_{ue}^\dagger y_{ue} + 2y_{ql}^\dagger y_{ql} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_X &= \Gamma_{X \rightarrow \bar{u}_R^c q} + \Gamma_{X \rightarrow \bar{q} e_R^c} + \Gamma_{X \rightarrow \bar{l} d_R^c} \\ &= \frac{g^2}{2\pi} m_X \end{aligned} \quad (3.24)$$

と得られる。ここで m_{h_T}, m_X はそれぞれ h_T, X の質量で、 g は $SU(5)$ ゲージ結合定数、 $y_{qq}, y_{ue}, y_{ud}, y_{ql}$ はそれぞれ湯川型相互作用 $qqh_T, u_R^c e_R^c h_T, u_R^c d_R^c h_T^*, qlh_T^*$ に対する湯川結合定数である。また (3.23) 中のトレースは、添え字は省略しているが、世代に対するものである。

粒子・反粒子の崩壊幅の差 $\Gamma - \bar{\Gamma}$ は、振幅のツリー項は粒子・反粒子からの寄与で互いに打ち消し合い、ツリー項と 1 ループ項との干渉項が leading になる。その評価に必要なダイアグラムを図 3.2 に示す。(a)~(c) は $h_T \rightarrow \bar{q}q$ からの寄与で、(d), (e) は $h_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c$ から、(f), (g) は $X \rightarrow \bar{u}_R^c q$ からの寄与である。これらのダイアグラムの評価は、どれもおよそ

$$|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 - |\mathcal{M}_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}|^2 \propto \text{Im} Y_{\text{couplings}} \cdot \text{Im} I_{\text{kin}} \quad (3.25)$$

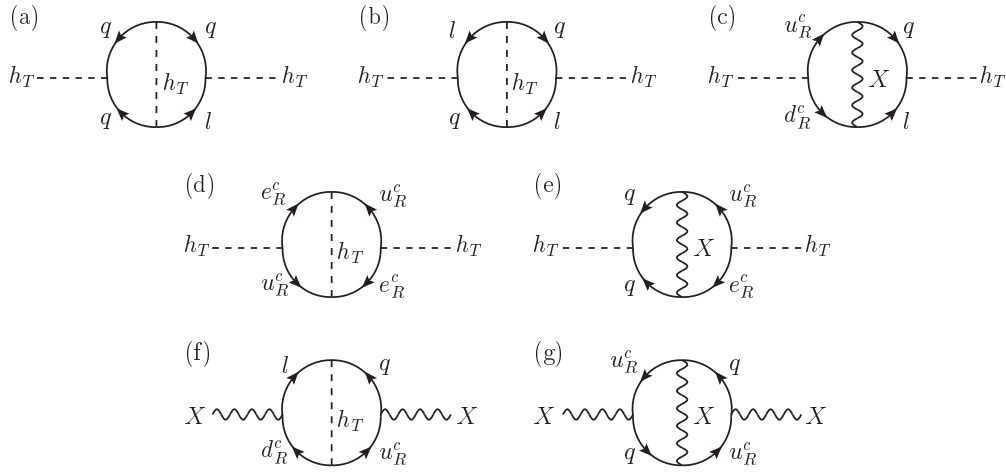


図 3.2 平均正味バリオン数の評価に必要な, h_T, X の崩壊の 1 次補正の振幅 (干渉項)。しかしながら (a), (b), (d), (g) のダイアグラムからの振幅への寄与はゼロである。

の形になる。ただし Y_{coup} はダイアグラム中に含まれるすべての結合定数の積で, I_{kin} は運動量のループ積分に関する項である。例えば (a) では $Y_{\text{coup}} = \text{tr}[y_{ql}y_{qq}^\dagger y_{qq}y_{ql}^\dagger]$ となる。しかしこの例からも分かるように, (a), (b), (d), (g) での Y_{coup} は虚数部分がなくなり, 従ってこれらのダイアグラムからの寄与はなくなる。残りの (c), (e), (f) からのダイアグラムを評価すると,

$$\begin{aligned} & \Gamma_{h_T \rightarrow ql} - \Gamma_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{q}\bar{l}} + \Gamma_{h_T \rightarrow u_R^c e_R^c} - \Gamma_{\bar{h}_T \rightarrow \bar{u}_R^c \bar{e}_R^c} \\ & \sim \frac{g^2 m_{h_T}}{48\pi^2} \text{Im tr} \left[y_{ql}^\dagger y_{ud} + y_{ue} y_{qq}^\dagger \right] \cdot A(m_X^2/m_{h_T}^2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_{X \rightarrow \bar{u}_R^c q} - \Gamma_{\bar{X} \rightarrow u_R^c \bar{q}} \\ & \sim \frac{g^2 m_X}{4\pi^2} \text{Im tr} \left[y_{ql}^\dagger y_{ud} \right] \cdot B(m_{h_T}^2/m_X^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

を得られる。ただし A, B は次のような関数である。

$$A(x) \equiv \ln(1 + 1/x) = \begin{cases} x - \ln x + \mathcal{O}(x^2) & (x \lesssim 1) \\ 1/x + \mathcal{O}(1/x^2) & (x \gtrsim 1) \end{cases} \quad (3.28)$$

$$B(x) \equiv 1 - 2x + 2x^2 \ln(1 + 1/x) = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(x) & (x \lesssim 1) \\ 2/3x + \mathcal{O}(1/x^2) & (x \gtrsim 1) \end{cases} \quad (3.29)$$

これらを全崩壊幅 (3.23), (3.24) で割れば, それぞれの粒子の崩壊により生成される平均正味バリオン数が得られる。 $m_{h_T} \sim m_X, g^2/4\pi \sim 1/45$ と仮定すると, オーダー的には

$$\epsilon_{h_T} \sim 10^{-2}\delta, \quad \epsilon_X \sim 10^{-2}y^2\delta \quad (3.30)$$

となる。ここで $\delta \equiv \text{Im tr}[y^\dagger y]/\text{tr}[y^\dagger y]$ は CP 位相に関するパラメータを表す。 h_T, X が熱的に生成されたと仮定すると, その粒子数は高温において (A.71) より $n/s \sim 10^{-3}$

だけ存在する。 n は数密度で、 s はエントロピー密度である。これがすぐに freeze-out してその後崩壊すると考えると、生成され得るバリオン数は、 h_T の崩壊による場合は

$$B \sim \epsilon_{h_T} n_{h_T} / s \sim 10^{-5} \delta \quad (3.31)$$

となり、 X の崩壊による場合は

$$B \sim \epsilon_X n_X / s \sim 10^{-5} y^2 \delta \quad (3.32)$$

となる。

一見して (3.26), (3.27) からは十分なバリオン数を生成できるように見えるが、しかしながら湯川結合が $SU(5)$ で統一されていると、 $10 \cdot 5 \cdot 5_h^*$ の湯川結合である y_{ql} と y_{ud} 、 $10 \cdot 10 \cdot 5_h$ の湯川結合である y_{ue} と y_{qq} はそれぞれ同じものになり、その結果 Y_{coup} にあたる部分がエルミート行列のトレースとなってしまう。エルミート行列の固有値は実数であることから、その結果 $\text{Im } Y_{\text{coup}} = 0$ となってしまう、バリオン数が生成されない。2 ループまでの寄与を考えても、やはり同じ理由でゼロになる。ゼロでない寄与は 3 ループで初めて可能となり、この場合の $\text{Im } Y_{\text{coup}}$ の例として

$$\text{Im tr} \left[y_D^\dagger y_U y_U^\dagger y_U y_D^\dagger y_D y_U^\dagger y_D \right] \quad (3.33)$$

のような形で、キャンセルされない干渉項を生じさせる。ただし、 y_D は $10 \cdot 5 \cdot 5_h^*$ の、 y_U は $10 \cdot 10 \cdot 5_h$ の湯川相互結合定数である。この場合の生成される平均正味バリオン数のオーダーは

$$\epsilon_{h_T} \gtrsim 10^{-6} y^6 \delta \quad (3.34)$$

となり [13]、 $h = \mathcal{O}(0.1 - 1)$ でなおかつ CP 位相も大きくなければならない。

ここでは GUT バリオジェネシスの定性的理解のために粒子の崩壊でどれだけバリオン数が生じるかを議論した。しかしながら定量的には、逆崩壊過程や、標準模型粒子の h_T や X を介した散乱過程、また、相互作用の効果を変化させる宇宙膨張の効果も考えなければならない。これには多体系での Boltzmann 方程式を解く必要があるが、ここでは詳細には立ち入らない。そのような詳細な計算 [13] でも有効なパラメータ領域は存在するのだが、残念なことにこのバリオジェネシスのシナリオでは、その後の宇宙の発展に起こる、バリオン数とレプトン数の差 $B - L$ 数は保存しつつ、バリオン数とレプトン数を破るような、スファレロン過程と呼ばれるプロセスによって、バリオン数とレプトン数が互いに転換し合い、結果的にそれまでに生成されたバリオン数がかき消されてしまうことが知られている [14]。これについては次章で述べる。この現象に対する本質的な問題は、minimal $SU(5)$ が $B - L$ 数を保存するような相互作用しか存在しないことに起因し、初め宇宙が $B - L$ 数対称であると、結局宇宙の $B - L$ 数を変えられず、元の状態に戻ってしまうために起こる。このスファレロン過程は電弱相転移期まで続くとされ、従って h_T や X の崩壊が電弱相転移後に起こらない限りは、このような $B - L$ 数の保存した理論でのバリオジェネシスのシナリオはうまくいかないことになる。

第4章

スファレロン過程と $B - L$ 数転換

4.1 標準模型でのバリオン数・レプトン数非保存

標準模型での相互作用を見る限りは、バリオン数もレプトン数も保存した相互作用しか存在しない。しかしながら、電弱相互作用がカイラルな理論になっているために、量子補正を考えるとバリオン数とレプトン数は保存しない。

バリオン数カレント J_B^μ とレプトン数カレント J_L^μ はそれぞれ以下のように表される：

$$J_B^\mu = \frac{1}{3} \sum_i \left(q_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu q_i + u_{Ri}^{c\dagger} \bar{\sigma}^\mu u_{Ri}^c + d_{Ri}^{c\dagger} \bar{\sigma}^\mu d_{Ri}^c \right) \quad (4.1)$$

$$J_L^\mu = \sum_i \left(l_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu l_i + e_{Ri}^{c\dagger} \bar{\sigma}^\mu e_{Ri}^c \right) \quad (4.2)$$

ただし和の i は世代を表す。また $\bar{\sigma}^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ は Pauli 行列 $\sigma^i, i = 1, 2, 3$ を用いて $\bar{\sigma}^0 = 1, \bar{\sigma}^i = -\sigma^i$ で表される行列である。

カレントとの発散を図 4.1 の三角ダイアグラムから評価すると、

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = \frac{N_f}{32\pi^2} \left(g^2 W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} - g'^2 B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \right) \quad (4.3)$$

とどちらも同じ表式になる。ただし N_f は世代数で、 g, g' はそれぞれ $SU(2), U(1)$ のゲージ結合定数、そしてゲージ場 W, B について

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad \tilde{W}^{a\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_{\rho\sigma}^a \quad (4.4)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad \tilde{B}^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (4.5)$$

である。 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \epsilon^{abc}$ は完全反対称テンソルである。この結果からバリオン数カレント、レプトン数カレントは保存せず、しかし $B - L$ 数カレントは

$$J_{B-L}^\mu = J_B^\mu - J_L^\mu = 0 \quad (4.6)$$

と、保存することがわかる。また

$$W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} = \partial_\mu \left[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(W_{\nu\rho}^a W_\sigma^a - \frac{1}{3} g\epsilon^{abc} W_\nu^a W_\rho^b W_\sigma^c \right) \right] \quad (4.7)$$

$$B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} = \partial_\mu [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\nu\rho} B_\sigma^a] \quad (4.8)$$

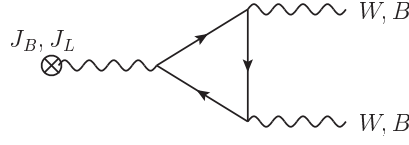


図 4.1 バリオン数，レプトン数非保存を導くダイアグラム。

と書き直せることから，(4.3) での微分はくくりだせて

$$\partial_\mu J_B^\mu = \frac{N_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left[g^2 \left(W_{\nu\rho}^a W_\sigma^a - \frac{1}{3} g \epsilon^{abc} W_\nu^a W_\rho^b W_\sigma^c \right) - g'^2 B_{\nu\rho} B_\sigma \right] \quad (4.9)$$

となる。この表式からバリオン数

$$B = \int d^3x j_B^0 \quad (4.10)$$

の時間的変化量を評価する。 $W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ の真空解として $W_{\mu\nu} = 0, B_{\mu\nu} = 0$ が存在するので，始状態と終状態の時刻 $t \rightarrow t_i, t_f$ で $W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} \rightarrow 0$ であるとする。始状態での時刻 $t = t_i$ から終状態 $t = t_f$ までのバリオン数の変化量は，(4.9) を用いて

$$B(t_f) - B(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \partial_0 j_B^0 \quad (4.11)$$

$$= \int d^3x \frac{N_f}{32\pi^2} \epsilon^{0\nu\rho\sigma} \times \left[g^2 \left(W_{\nu\rho}^a W_\sigma^a - \frac{1}{3} g \epsilon^{abc} W_\nu^a W_\rho^b W_\sigma^c \right) - g'^2 B_{\nu\rho} B_\sigma \right] \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} \quad (4.12)$$

$$= -N_f \int d^3x \frac{g^3}{96\pi^2} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} W_i^a W_j^b W_k^c \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} \quad (4.13)$$

$$= N_f [N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i)] \quad (4.14)$$

と表される。ここで

$$N_{CS}(t) = -\frac{g^3}{96\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} W_i^a W_j^b W_k^c \quad (4.15)$$

であり，巻付き数 (winding number)，もしくは Chern-Simons 数と呼ばれる。この量はトポロジー不変量であり，ある整数値を採る。また， $U(1)$ の配位は効かず，非可換ゲージ群の $SU(2)$ からの寄与のみが残ることに注目すべきところである。これは非可換ゲージ理論であることが本質的である。(4.14) より，バリオン数やレプトン数の変化分は世代数と Chern-Simons 数に比例し，

$$\Delta B = \Delta L = N_f \Delta N_{CS} \quad (4.16)$$

となる。従って標準模型での最も小さいバリオン数，レプトン数の変化量は $\Delta B = \Delta L = \pm 3$ となる。

非可換ゲージ理論では無限に多くの縮退した基底状態が存在し、それらは Chern-Simons 数 N_{CS} の値で分類される。 W_μ を連続的に変える変換ではこの量は変化しないので、ある N_{CS} に対応する真空から別の N_{CS} の真空へと遷移するためには、いったん $W_{\mu\nu} \neq 0$ の配位を経る必要がある。つまりこのことは、異なる N_{CS} に属する真空の間にはポテンシャル障壁が存在していることを意味する。この障壁の高さはスファレロンエネルギー E_{sph} と呼ばれるものにより与えられる [15]。

準古典近似を用いると、近傍の真空へトンネル効果により遷移する確率はインスタントンの配位により決定される。標準模型における $SU(2)$ インスタントンは次の 12 フェルミオンの相互作用

$$\mathcal{O}_{B+L} = \prod_{i=1,2,3} (q_i q_i q_i l_i) \quad (4.17)$$

を誘発する。これは $\Delta B = \Delta L = 3$ の相互作用になっている。単位体積当たりの遷移確率 Γ/V はインスタントンの作用 S_{inst} により決められ、

$$\Gamma/V \propto e^{-2S_{inst}} = e^{-4\pi^2/\alpha_W} \sim \mathcal{O}(10^{-160}) \quad (4.18)$$

と求められた [16]。 $\alpha_W \equiv g^2/4\pi$ である。この値は非常に小さいために、標準模型においてはバリオン数やレプトン数を破る過程はほぼ完全に起こらないとみなすことができる。しかしながらこの描像は有限温度になると劇的に変わる。

4.2 スファレロン過程

熱浴が存在すると、トンネル効果ではなく熱的揺らぎによりポテンシャル障壁を乗り越えるような、ゲージ場の異なる N_{CS} での真空間の転移が可能になる。この異なる N_{CS} 間の経路のうち、エネルギーを極大にするような配位が経路の選び方に対応して無数に存在し、その中で最もエネルギーの低い配位のことをスファレロン (sphaleron) と呼ぶ。この配位は場の運動方程式の定常的な鞍点解である。

スファレロンエネルギーは

$$E_{sph} = \frac{4\pi v}{g} B \quad (4.19)$$

と表され、 $1.5 \lesssim B \lesssim 2.7$ はヒッグスの質量に依存するパラメータである [15, 17]。また、ヒッグスが真空期待値を持つ、電弱対称性の破れの相における有限温度の遷移率は

$$\Gamma/V = \mu \left(\frac{M_W(T)}{\alpha_W T} \right)^3 M_W^4(T) e^{-E_{sph}/T} \quad (4.20)$$

と評価されている [18, 19, 20]。 μ は無次元量のある定数で、 $M_W(T)$ や $E_{sph}(T)$ はヒッグスの真空期待値を $v \rightarrow v(T)$ と温度依存化させたものである。従って温度がスファレロンエネルギー程度になると Boltzmann 因子による遷移率の指数関数的な抑制は緩くなり、結果としてバリオン数やレプトン数を破る過程が相当数の割合で起こるようになる。

しかしながらヒッグスの真空期待値がゼロになる電弱対称な相では、スファレロンエネルギーがゼロとなるために Boltzmann 抑制の効果がなくなり、異なる N_{CS} の真空間

の遷移が容易に起こるようになる。従って対称相となる高温での遷移率の評価は (4.20) とは別の評価が必要である。このような場合に重要となるのは磁気遮蔽長 (magnetic screening length) のスケール

$$\zeta \sim (\alpha_W T)^{-1} \quad (4.21)$$

のみであり, これより次元解析から単位体積あたりのバリオン数, レプトン数を破る過程の遷移率は

$$\Gamma/V \sim \alpha_W^4 T^4 \quad (4.22)$$

と見積もられた [21]。さらに [22] によれば, プラズマ中であることを考慮するとさらにゲージ結合の分の抑制効果が働き,

$$\Gamma/V \sim \alpha_W^5 T^4 \quad (4.23)$$

となることが示唆された。数値計算によるアプローチ [23] でも

$$\Gamma/V = (25.4 \pm 2.0) \alpha_W^5 T^4 \quad (4.24)$$

と, (4.23) の結果が支持されている。この遷移率が宇宙膨張率 $H = 1.66 g_*^{1/2} T^2 / M_{pl}$ より大きくなる条件 $\Gamma T^3 \gtrsim H$ から, スファレロン過程が平衡状態にある温度の上限

$$T \lesssim \begin{cases} 1.0 \times 10^{10} \text{ GeV} & (\alpha_W = 1/45, g_* = 100) \\ 1.1 \times 10^{12} \text{ GeV} & (\alpha_W = 1/25, g_* = 200) \end{cases} \quad (4.25)$$

を得る。

4.3 $B-L$ 数から B 数, L 数への転換

前節までの議論で, $B-L$ 数は保存するが, B 数, L 数をそれぞれ破るような過程が, 高温領域ではスファレロン過程を通じて頻繁に起こり, B 数と L 数が互いに転換し得ることを見た。この節では, 初めに与えられた $B-L$ 数から, 最終的に残る B 数, L 数がどれほどになるかを定量的に議論する*1。

まず, 熱平衡系で真に保存する電荷は $U(1)_Y$ ハイパーチャージ Y , $SU(2)_L$ アイソスピン生成子 T_3 (従って電磁気 $U(1)_{em}$ 電荷 $e = T_3 + Y$ も保存している), $SU(3)_C$ カラーの生成子 H_3, H_8 , そして $B-L$ 電荷であると仮定する。また, それぞれの粒子 i はある保存電荷 a に対応する量子数 q_{ai} を持つとする。例えば $a = Y, i = e_R^c$ の場合は $q_{ai} = 1$ である。表 4.1 に粒子とそれに対応する量子数を記しておく。

次に系の化学平衡を仮定する。これによって反応の前後で化学ポテンシャルの和は保存する。このことは, 各粒子に対する化学ポテンシャル μ_i が, 粒子 i それぞれに割り当て

*1 この議論は [24] によってなされている。ただし本論文では彼らの手法とは少し異なる, [25] で紹介されている方法に基づいて, 最終的に残る B 数を評価している。ちなみに [24] では, すべての素過程に対する化学ポテンシャルの保存則を書き下した後, それぞれの粒子に対する化学ポテンシャルをある 1 つの粒子の種類の化学ポテンシャルで表すことで, B 数と $B-L$ 数との間の関係を求めている。

粒子		$(SU(3)_C, SU(2)_L)_{U(1)_Y}$	B	L
クォーク 2 重項	q	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}$	$+1/3$	0
右巻きアップ	u_R^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}$	$-1/3$	0
右巻きダウン	d_R^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$	$-1/3$	0
レプトン 2 重項	l	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$	0	$+1$
右巻き電子	e_R^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$	0	-1
ヒッグス 2 重項	h_D	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}$	0	0

表 4.1 標準模型粒子の表記とそれぞれの電荷

られた量子数 q_{ai} と適当なある係数 μ_a による, 保存電荷のラベルでの線形結合

$$\mu_i = \sum_a q_{ai} \mu_a \quad (4.26)$$

で書けることを意味する。まずこの係数 μ_a が量子数 q_{ai} や保存電荷密度 n_a , そして温度で書き表せられることを示し, そして最終的にバリオン数密度 n_B がどのように表されるかを見ていく。

我々が興味のある宇宙の時代の温度は高温, 少なくとも電弱相転移期のオーダー以上 $T \gtrsim 100$ GeV であるので, この時代の宇宙ではすべての標準模型粒子は極めて相対論的になり, 質量は無視できる。この時, (A.29) で与えられているように, 相対論的極限での粒子 i とその反粒子の粒子数の差 (正味粒子数密度) $n_i - \bar{n}_i$ は化学ポテンシャル μ_i を用いて

$$n_i - \bar{n}_i = \tilde{g}_i \frac{T^2}{6} \cdot \mu_i \quad (4.27)$$

と表される。ただし

$$\tilde{g}_i \equiv g_i \times \begin{cases} 2 & (\text{ボソン}) \\ 1 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (4.28)$$

で, g_i は粒子 i の内部自由度である。さらに (4.27) は (4.26) を用いると

$$n_i - \bar{n}_i = \tilde{g}_i \frac{T^2}{6} \sum_a q_{ai} \mu_a \quad (4.29)$$

と書き表されるが, この両辺に量子数 q_{ai} を掛け, すべての粒子 i についての和を採ることと, 保存電荷に対する密度

$$n_a = \sum_i q_{ai} (n_i - \bar{n}_i) = \frac{T^2}{6} \sum_b M_{ab} \mu_b \quad (4.30)$$

が得られる。ただし

$$M_{ab} \equiv \sum_i \tilde{g}_i q_{ai} q_{bi} \quad (4.31)$$

は保存電荷のラベルに対する行列である。この行列は正定値行列であり、従って逆行列 M^{-1} を持つ。よって (4.30) の両辺に M^{-1} を掛けることによって、 μ_a に対する表式

$$\mu_a = \frac{6}{T^2} \sum_b M_{ab}^{-1} n_b \quad (4.32)$$

を得る。さらにこの式を (4.29) に代入することで、正味数密度の表式

$$n_i - \bar{n}_i = \sum_{a,b} \tilde{g}_i q_{ai} M_{ab}^{-1} n_b \quad (4.33)$$

が得られる。この表式に関して、特に、すべての保存電荷密度がゼロであるような粒子の種類に対しては粒子と反粒子の数が等しくなり、結果正味粒子数密度がゼロになる、という点が重要である。

我々が焦点を当てているバリオン数密度 n_B を評価するには、(4.33) の両辺に粒子 i のバリオン数 B_i を掛け、すべての粒子に対して和をとることにより、バリオン数密度に対する表式

$$n_B = \sum_i B_i (n_i - \bar{n}_i) = \sum_{i,a,b} B_i \tilde{g}_i q_{ai} M_{ab}^{-1} n_b \quad (4.34)$$

を得ることができる。あとは M_{ab} の成分を (4.31) に従って計算すればよい。しかしながらすべての成分を計算する必要はなく、 T_3 や H_3, H_8 のトレースが 0 である事実を考慮すると、(4.31) のでの和 a, b のうち、 T_3, H_3, H_8 のうち 1 つと $Y, B-L$ のうち 1 つとでラベルが指定される交差項はすべて 0 になる。従って行列 M は T_3, H_3, H_8 のラベルに対しては対角的で、逆行列 M^{-1} を求めるためには $Y, B-L$ の成分だけを計算すればよい。また M の T_3, H_3, H_8 に関する対角成分に対しても、バリオン数を求める際には (4.34) でその項の係数として現れる $B_i q_{ai}$ の i による和を考えると、これも T_3, H_3, H_8 のトレースが 0 であることからこの項からの寄与も 0 となり、結局バリオン数密度を求める際の行列 M は Y と $B-L$ の成分しか効かず、結果 T_3, H_3, H_8 の対角成分はバリオン数密度の計算には必要ないので考えなくてよい。また、仮定としてこの時代の宇宙の $U(1)$ ハイパーチャージは中性であったと仮定する^{*2}と、結局 (4.34) での b による和は $B-L$ 電荷に対するもののみ残る。従ってスファレロン過程を経た後の正味粒子数密度は $B-L$ 数密度に比例する。

議論に一般性を持たせておけるように、フェルミオンの世代が N_g 世代、2 重項ヒッグスが N_h 種類あるとしておく。この時、表 4.1 に従って (4.31) の行列要素 $M_{YY}, M_{YB-L} (= M_{B-LY}), M_{B-LB-L}$ を求めると、次のように求められる：

$$M_{YY} = \frac{13}{3} N_g, \quad M_{YB-L} = \frac{8}{3} N_g, \quad M_{B-LB-L} = \frac{10}{3} N_g + N_h \quad (4.35)$$

^{*2} この仮定は、 $U(1)$ 部分群を含まないゲージ群から $U(1)$ を含むものに破れるような半単群による大統一理論では自動的に満たされる。このような理論は、標準模型内では説明できない電磁気 $U(1)_{\text{em}}$ 電荷が量子化されている事実も自動的に説明できる点も魅力的である。

これから逆行列を求めると, 成分ごとにそれぞれ

$$M_{YY}^{-1} = \frac{10N_g + 3N_h}{3 \det M}, \quad M_{YB-L}^{-1} = -\frac{8N_g}{3 \det M}, \quad M_{B-L B-L}^{-1} = \frac{13N_g}{3 \det M} \quad (4.36)$$

となることが示される。ただし行列式は

$$\det M = \frac{N_g}{3} (22N_g + 13N_h) \quad (4.37)$$

で与えられる。従ってこれらの関係式から (4.34) は

$$n_B = \sum_i \tilde{g}_i B_i ((B-L)_i M_{B-L B-L}^{-1} + Y_i M_{YB-L}^{-1}) n_{B-L} \quad (4.38)$$

$$= \left(\frac{4}{3} M_{B-L B-L}^{-1} + \frac{2}{3} M_{YB-L}^{-1} \right) N_g n_{B-L} \quad (4.39)$$

$$= \frac{8N_g + 4N_h}{22N_g + 13N_h} \cdot n_{B-L} \quad (4.40)$$

と評価される。 $B - L$ 数は保存するので, レプトン数密度 n_L に対する表式はすぐに

$$n_L = n_B - n_{B-L} = -\frac{14N_g + 9N_h}{22N_g + 13N_h} \cdot n_{B-L} \quad (4.41)$$

と得られる。実際に標準模型での値 $N_g = 3, N_h = 1$ を用いると, $B - L$ 数からの具体的な転換率

$$n_B = \frac{28}{79} n_{B-L}, \quad n_L = -\frac{51}{79} n_{B-L} \quad (4.42)$$

を得る。従ってこの結果は, 前述したように宇宙に $B - L$ 数が存在しなければ, 例えそれまでにバリオン数やレプトン数が宇宙に存在していたとしても, スファレロン過程が十分に起こることにより $n_B = n_L = 0$ となってしまう。しかしながら $B - L$ 数がある程度存在していれば, それと同じオーダーだけのバリオン数, レプトン数を残すことができる。よって宇宙のバリオン数生成のシナリオを成功させるためには, 大まかに (i) $B - L$ の保存する相互作用の場合, スファレロン過程が有効でなくなった後に B 数を生成するか, (ii) $B - L$ を破る相互作用によって初期宇宙に $B - L$ 数を作り出し, その後スファレロン過程によってバリオン数, レプトン数に転換するか, のいずれかである。

(i) のシナリオとしては電弱相転移期にバリオン数を生成する電弱バリオジェネシスと呼ばれるシナリオが考えられている [26, 27]。このシナリオでは十分なバリオン数の生成のために電弱相転移に強い 1 次相転移が要求されるが, しかしその場合ヒッグス粒子の質量が $M_{\text{Higgs}} \lesssim 43 \text{ GeV}$ でなければならない。しかしながら最近の LHC の実験結果により, ヒッグス粒子と思われる粒子が $M_{\text{Higgs}} \sim 125 \text{ GeV}$ ほどで発見されており [28, 29], また, そうでなくともこれまでの LEP 実験からヒッグス粒子の質量に対し $M_{\text{Higgs}} > 114.4 \text{ GeV}$ (95% C.L.) と制限されているために [30], 実際の標準模型ヒッグスでは強い 1 次相転移は起こせない。また CP の破れも弱く, 現状では標準模型での電弱バリオジェネシスは難しい。(ii) に関しては非常に有名なシナリオとしてレプトジェネシス [34] が提唱されている。このシナリオでは右巻きニュートリノ ν_R^c の崩壊によって宇

宙にレプトン数 L のみが生成される。従って $B-L$ を破る相互作用である。特に、熱的に生成された右巻きニュートリノの崩壊でレプトン数が生成されるような熱的レプトジェネシスと呼ばれるシナリオは、観測されるバリオン数がニュートリノ振動から制限されるニュートリノ質量や混合のパラメータと関係付くために、非常に興味深いシナリオの1つとなっている。このシナリオに関しては、次の章で簡単に説明する。しかしながら一般的には、 $B-L$ 数を破るような相互作用は他にも考えられ、例えば大統一理論のレムナントとして現れるような粒子にはそのような $B-L$ 数を破るような相互作用を持つものもあり得る。そのような可能性と具体的なシナリオについては6章で議論することにする*³。

*³ その他にもさまざまなバリオジェネシスのシナリオは存在する。例えば超対称性のスカラーポテンシャルに存在する flat direction を利用した Affleck-Dine バリオジェネシス [31, 32] も有名である。その他のエキゾチックなシナリオについては [33] を参照。

第 5 章

レプトジェネシス

今日で最も成功を収めているバリオン生成シナリオの 1 つがこのレプトジェネシス (leptogenesis) と呼ばれるシナリオ [34] で、観測されるバリオン数がニュートリノ振動から制限されるニュートリノ質量や混合のパラメータと関係付くために、素粒子論的にも非常に興味深い。

このシナリオでは右巻きニュートリノの崩壊によって宇宙にレプトン数 L のみが生成される。しかし前章で述べたように、宇宙にゼロでない $B - L$ 数が存在していれば、スファレロン過程によってそれをバリオン数へと転換できるので、スファレロン過程が始まる以前に宇宙にどれだけのレプトン数が生成されるかを評価できれば、宇宙のバリオン数を評価できることになる。この節では特に熱的レプトジェネシスと呼ばれるシナリオを簡単に紹介する^{*1}。

5.1 ニュートリノ質量とシーソー機構

レプトジェネシスの本題に入る前に、ニュートリノ質量に関わるシーソー機構 (seesaw mechanism) [37, 38, 39, 40] を説明しておく^{*2}。これによってレプトジェネシスによるバリオン数生成のためのパラメータと観測可能なニュートリノのパラメータとの関係がつかことになる。

通常の標準模型の枠組みでは、ニュートリノの質量は 0 である。これは理論に左巻きのニュートリノ ν_L しかなく、これだけではゲージ不変な質量項が組めないためである。しかしながら現在のニュートリノ振動の観測により、各ニュートリノの世代間には

$$\Delta m_{21}^2 = 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad |\Delta m_{31}^2| = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (5.1)$$

と質量差が存在することが示されており [1]、また WMAP や SDSS などといった宇宙論

^{*1} レプトジェネシスに関するレビューとして、ここでは [35, 36] を挙げておく。

^{*2} ただしここで説明するのは Type I シーソー機構と呼ばれるもので、他にも Type II, Type III のシーソー機構が知られている。Type I では $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ のもとで 1 重項であるフェルミオンを導入したのに対し、Type II では $SU(2)$ 3 重項のスカラーを [40, 41, 42, 43, 44]、Type III では $SU(2)$ 3 重項のフェルミオンを導入する [45, 46, 47]。

的な観測からは

$$\sum_i m_i \lesssim 0.5 \text{ eV} \quad (5.2)$$

とニュートリノ質量の和に制限がつけられている [2]。従って、ニュートリノには小さいながらも質量が存在し、標準模型ではこのニュートリノ質量を説明することができない。このようなニュートリノの質量を説明するために、標準模型に $(SU(3), SU(2))_{U(1)} = (1, 1)_0$ であるような標準模型 1 重項となるようなフェルミオンを導入する。これによって、 ν_L を含む 2 重項レプトン l と 2 重項ヒッグス h_D とで湯川型相互作用項を組むことが対称性から許される。従ってヒッグスが真空期待値を持つことによってニュートリノが Dirac 質量項を持つこととなり、この新たな 1 重項のフェルミオンは右巻きニュートリノ ν_R^c と解釈される*³。また、 ν_R^c は標準模型 1 重項の粒子であるために、Majorana 質量を持つことができる。従って、標準模型 1 重項フェルミオンを導入したことにより、対称性から Lagrangian に ν_R^c の運動項と以下の相互作用項が加わる：

$$\Delta\mathcal{L}_\nu = -y_{ij}h_D l_i \nu_{Rj}^c - \frac{1}{2}M_{ij}\nu_{Ri}^c\nu_{Rj}^c + (h.c.) \quad (5.3)$$

ここで y は湯川結合、 M は Majorana 質量で、添え字の i, j は世代を表す。 M は複素対称行列なので、適当なユニタリー行列 U_M を用いて $U_M^T M U_M$ で対角化されることができる。従って、今はこの Majorana 質量が対角化されていることを仮定する。

ヒッグスが真空期待値 $\langle h^0 \rangle = v$ を持つと、湯川相互作用を通じてニュートリノに Dirac 質量 $m_{ij} \equiv y_{ij}v$ が生じる。この時、ニュートリノの質量項を次のように行列でまとめることができる：

$$\Delta\mathcal{L}_\nu = -m_{ij}\nu_{Li}\nu_{Rj}^c - \frac{1}{2}M_{ij}\nu_{Ri}^c\nu_{Rj}^c + (h.c.) \quad (5.4)$$

$$= -(\nu_L \ \nu_R^c)_i \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}_j + (h.c.) \quad (5.5)$$

ここで $|m| \ll |M|$ を仮定すると、第 2 行目の質量行列は近似的なユニタリー行列

$$\mathcal{U} \equiv \begin{pmatrix} 1 & m^* M^{-1*} \\ -M^{-1T} m^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^\dagger\mathcal{U} = 1 + \mathcal{O}((mM^{-1})^2) \quad (5.6)$$

を用いて次のように近似的にブロック対角化できる：

$$\mathcal{U}^T \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M \end{pmatrix} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O}((mM^{-1})^3) \\ \mathcal{O}((mM^{-1})^3) & \mathcal{O}((mM^{-1})^2) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

ただし m_ν は

$$m_\nu \equiv -mM^{-1}m^T \quad (5.8)$$

で定義される、軽いニュートリノの質量行列である。 m がヒッグスの真空期待値程度のスケール $\sim \mathcal{O}(100)$ GeV であると仮定すると、 $m_\nu \sim 10^{-2}$ eV のためには $M \sim 10^{14}$

*³ アップやダウン、電子の Dirac 質量項の組み方を模して、便宜上荷電共役を採っている。

GeV であればよい。\$M\$, すなわち重いニュートリノの質量を重くすれば軽いニュートリノの質量が軽くなるので、これがシーソー機構と呼ばれる所以である。\$m_\nu\$ はさらにある適当なユニタリー行列 \$U_m\$ によって質量を

$$m_{\text{diag}} \equiv U_m^T m_\nu U_m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

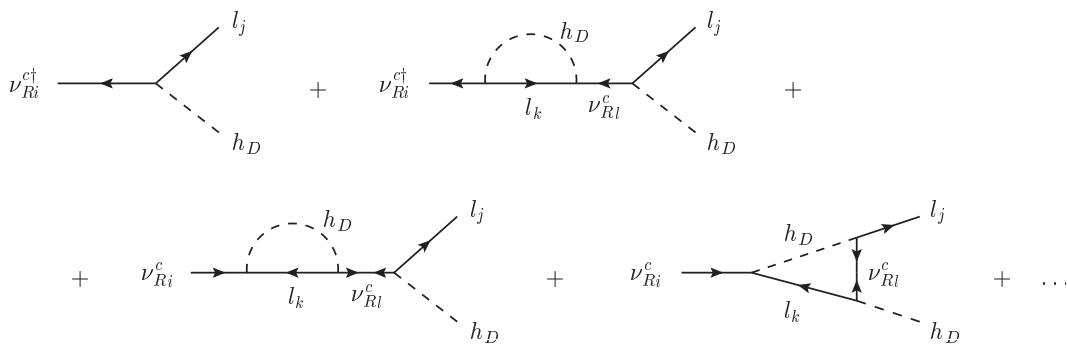
と対角化することができる。これによってニュートリノの質量が湯川結合 \$y\$ と Dirac 質量 \$m\$, そして混合行列 \$U_m\$ によって関係付く。

5.2 熱的レプトジェネシス

右巻きニュートリノの崩壊過程は、(A) \$\nu_{Ri}^c \to l_j h_D\$, (B) \$\bar{\nu}_{Ri}^c \to l_j h_D\$, (C) \$\nu_{Ri}^c \to \bar{l}_j \bar{h}_D\$, (D) \$\bar{\nu}_{Ri}^c \to \bar{l}_j \bar{h}_D\$ の4種類ある。従って、\$\nu_{Ri}^c\$ の崩壊によって、(A), (B) の場合はレプトン数が \$+1\$, (C), (D) の場合は \$-1\$ だけ生成される。この右巻きニュートリノの崩壊から平均正味レプトン数を求めるには、

$$\epsilon_i = \frac{\sum_j \left[\Gamma(\nu_{Ri}^c \to l_j h_D) - \Gamma(\nu_{Ri}^c \to \bar{l}_j \bar{h}_D) \right]}{\sum_j \left[\Gamma(\nu_{Ri}^c \to l_j h_D) + \Gamma(\nu_{Ri}^c \to \bar{l}_j \bar{h}_D) \right]} \quad (5.10)$$

で評価すればよいが、右巻きニュートリノは Majorana 型なので、その崩壊には left-type \$\nu_{Ri}^c\$ と right-type \$\nu_{Ri}^{c\dagger}\$ の両方からの振幅の和 \$\mathcal{M}_{(A)} + \mathcal{M}_{(B)}\$ で評価することに注意する。また、これは CP 非対称度を表すパラメータと言ってもよい。崩壊過程 (A), (B) のような、終状態が \$l_j, h_D\$ である振幅の計算には、以下のダイアグラムを考えればよい：



2 個目と 3 個目のダイアグラムは真空分極の寄与で、これによってフレーバーが変化してから崩壊する過程が存在する。4 個目のダイアグラムは湯川結合定数 \$y\$ に対する量子補正項となっている。(5.10) を計算すると、フレーバー \$i\$ の右巻きニュートリノの崩壊によって生じる平均正味レプトン数について

$$\epsilon_i = -\frac{1}{8\pi(y^\dagger y)_{ii}} \sum_{k \neq i} \text{Im} [(y^\dagger y)_{ki}^2] f(M_k^2/M_i^2) \quad (5.11)$$

と求められる。ただし f は次のような関数である：

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \sqrt{x} \left[1 - (1+x) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \quad (5.12)$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{5}{9x} + \dots \right) \quad (x \gg 1) \quad (5.13)$$

ここでは第1世代の右巻きニュートリノが一番軽く、 $M_1 \ll M_2, M_3$ の場合を考える。第2, 3世代の右巻きニュートリノは重いために早く崩壊し、第1世代の右巻きニュートリノの平衡反応によりレプトン数生成には効かないと仮定して議論を進める。この時、平均正味レプトン数は (5.13) を用いると

$$\epsilon_1 \sim \frac{3M_1}{16\pi(y^\dagger y)_{11}} \sum_{i \neq 1} \text{Im} [(y^\dagger y)_{i1}^2] M_i^{-1} \quad (5.14)$$

$$= \frac{3M_1}{16\pi(y^\dagger y)_{11}} \sum_i \text{Im} [(y^\dagger y)_{i1}^2] M_i^{-1} \quad (5.15)$$

と近似できる。ここで (5.8), (5.9) から関係付く、観測されるニュートリノの質量と Dirac 質量との関係

$$m_{\text{diag}} = -U_m^T m M^{-1} m^T U_m \quad (5.16)$$

から成り立つ、次の複素直交行列

$$O \equiv i m_{\text{diag}}^{-1/2} U_m^T m M^{-1/2}, \quad O O^T = O^T O = 1 \quad (5.17)$$

を定義しておく [48]。この行列を用いると、湯川行列を

$$y = \frac{1}{v} m = -\frac{i}{v} U_m^* m_{\text{diag}}^{1/2} O M^{1/2} \quad (5.18)$$

と書き換えることができる。これを (5.15) に代入すると

$$\epsilon_1 = \frac{3}{16\pi} \frac{M_1}{v^2} \frac{\sum_i (m_{\text{diag}})_i^2 \text{Im}(O_{i1})^2}{\sum_i (m_{\text{diag}})_i |O_{i1}|^2} \quad (5.19)$$

となる。直交条件 $\sum_i (O_{i1})^2 = 1$ を考慮すると、もしも観測されるニュートリノの質量が縮退していると、CP 非対称度が無くなることを示している。今は Majonara 質量を階層的に採っているので、観測される軽いニュートリノの質量もまた階層的であると考えのが自然である。この仮定と (5.19) の結果から、最大の CP 非対称度が次のように得られる [49]：

$$|\epsilon_1| \lesssim |\epsilon_1^{\text{max}}| = \frac{3}{16\pi} \frac{M_1}{v^2} (m_3 - m_1) \quad (5.20)$$

$m_1 \ll m_3$ を仮定して、観測からの値 $|\Delta m_{31}^2| = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \sim m_3^2$ とヒッグスの真真空期待値 $v = 174 \text{ GeV}$ を代入すると、

$$|\epsilon_1^{\text{max}}| = 9.7 M_1 \times 10^{-17} \text{ GeV}^{-1} \quad (5.21)$$

となる。これに崩壊する右巻きニュートリノの粒子数を掛ければ、おおよその生成されるレプトン数が得られる。今は初め右巻きニュートリノが熱的に生成されたと仮定する。その量は (A.71) で与えられているように、

$$Y_{\nu_R^c}^{\max} \equiv \frac{n_{\nu_R^c}^{\max}}{s} = \frac{135\zeta(3)}{4\pi^4 g_*} = 4.2 \times 10^{-3} \left(\frac{100}{g_*} \right) \quad (5.22)$$

である。ただし、 s はエントロピー密度、 g_* は相対論的粒子の自由度である。定量的には、ここから Boltzmann 抑制や散乱による wash-out が起こり、崩壊に効く粒子数が減り得る。しかし、簡単のために相対論的な状態のまま freeze-out し、レプトン数が変化するような散乱からも起こらないと仮定する。これが最も多くレプトン数を生成できる状態である。従って、生成されるレプトン数の最大値は

$$|Y_L^{\max}| \equiv \frac{|n_L^{\max}|}{s} = |\epsilon_1^{\max} Y_{\nu_R^c}^{\max}| = 4.0 M_1 \times 10^{-19} \left(\frac{100}{g_*} \right) \text{GeV}^{-1} \quad (5.23)$$

と表される。これがスファレロン過程を経て (4.42) で得られた割合 $n_B/n_{B-L} = 28/79$ だけバリオン数に転換され、最終的に宇宙のバリオン数となる。以上のことから、宇宙に存在するバリオン数 B (A.74) から、

$$B = 8.8 \times 10^{-11} \lesssim \frac{28}{79} |\epsilon_1^{\max} Y_{\nu_R^c}^{\max}| = 1.4 M_1 \times 10^{-19} \left(\frac{100}{g_*} \right) \text{GeV}^{-1} \quad (5.24)$$

が得られ、これから右巻きニュートリノの質量への下限として

$$M_1 \gtrsim 6.2 \times 10^8 \left(\frac{g_*}{100} \right) \text{GeV} \quad (5.25)$$

を得ることができる。

第 6 章

$B - L$ 数生成によるバリオジェネシス

前章では右巻きニュートリノのレプトン数を破る相互作用によって、最終的にスファレロン過程を通じてバリオン数が生成される、レプトジェネシスのシナリオを紹介した。このシナリオはニュートリノ観測とのパラメータとも関係づくので非常に興味深いのであるが、バリオン生成に関して重要なことは、スファレロン過程の存在により $B - L$ 数を破る相互作用によってバリオン数が生成できたことである。熱的レプトジェネシスを適用できる素粒子模型は限られているので、 $B - L$ 数を生成できる他の可能性を探っておくことは価値のあることである。

この章では、どのような粒子がどのような相互作用を通じて $B - L$ 数を破るのかを議論し、その後、ある程度重く、しかし大統一のスケールよりは低いような質量をもつ場の崩壊によって $B - L$ 数を生成するシナリオを紹介する [50]。

6.1 $B - L$ 数を破る相互作用

標準模型において、繰り込み可能な項は質量次元 4 のものまでで、この枠組み内での相互作用項では B 数も L 数も破ることができない。しかしながら質量次元が 4 より大きな高次元相互作用項を考えると、 B もしくは L 数が保存しないような相互作用を考えることができる。例えば次元 5 の相互作用項としては $llh_D h_D$ が存在する（本論文での標準模型粒子に対する表記の仕方は表 4.1 を参照）。この項はゼロでない $B - L$ 電荷を持ち、またニュートリノに質量を誘発させる。相互作用としては L 数と $B - L$ 数を破っている。次元 6 の相互作用項としては例えば $qqu_R^c e_R^c$ が考えられるが、この項は B 数と L 数を破り（ただし $B - L$ 数は破らない）、陽子崩壊を引き起こす。これらの高次元相互作用項 $llh_D h_D$, $qqu_R^c e_R^c$ はそれぞれ重い右巻きニュートリノ ν_R^c や GUT ゲージボソン X を積分することによって得ることができる。逆に言えば、高次元相互作用項をそれぞれ分解することにより、レプトジェネシスで重要な役割を担う右巻きニュートリノや、GUT バリオジェネシスで重要な役割を担う X ゲージボソンを得ることができるとも言

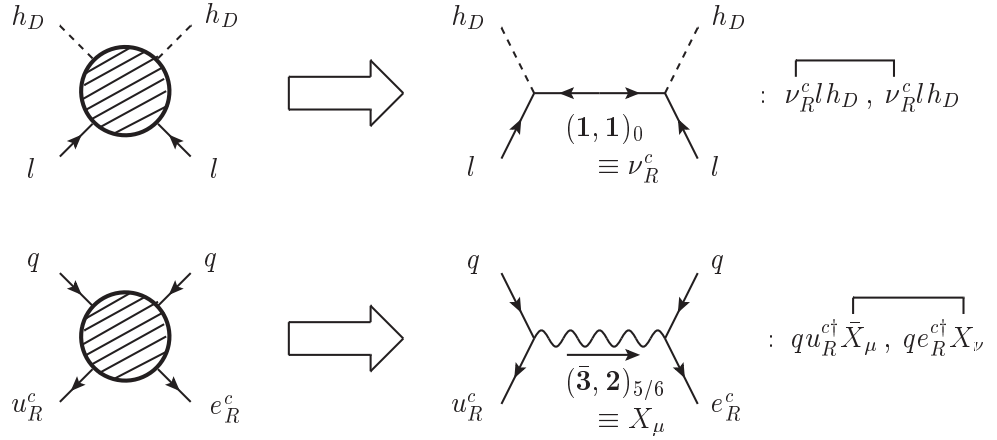


図 6.1 $llh_D h_D$ (上部) と $qqu_R^c e_R^c$ (下部) の分解。繋いでいる線は縮約を表す。

える (図 6.1)。従って宇宙に $B-L$ 数を生成できるようなシナリオを考えるためには、 $B-L$ 数を破るような高次元相互作用項から、 $B-L$ 数を破る役割を担う重い粒子を引き出すことが重要になる。

さて、 $llh_D h_D$ 以外にどのような $B-L$ 数を破る相互作用項が存在するかであるが、標準模型内の粒子で組むことができるものに限ると、5 次の高次相互作用項は $llh_D h_D$ のみで、6 次にはそのような項は存在しない*1。 $llh_D h_D$ 以外の $B-L$ 数の破れた相互作用は次元 7 で初めて現れ、次の 11 種類が存在する：

$$\begin{aligned}
 & qd_R^c llh_D, \quad u_R^c d_R^c d_R^c llh_D, \quad e_R^c llh_D, \quad d_R^c d_R^c d_R^c llh_D^\dagger, \\
 & qqd_R^c l^\dagger h_D^\dagger, \quad qu_R^c l^\dagger h_D^\dagger, \quad qe_R^c d_R^c d_R^c h_D^\dagger, \quad u_R^c e_R^c d_R^c l^\dagger h_D^\dagger, \\
 & qd_R^c d_R^c l^\dagger, \quad u_R^c d_R^c l^\dagger, \quad e_R^c d_R^c d_R^c d_R^c.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

ただし最後の 3 つの相互作用項は 6 次に見えるが、カイラリティ反転のために共変微分演算子がいずれかの場に付随している。しかしながら、運動方程式を用いることによって微分演算子がその作用している場の質量に置き換わるので、質量が無視できる場合はこれら 3 つの相互作用項は無視できる。以下ではこれらの 3 つの相互作用項については考えないことにする。

どのような場が $B-L$ を破る相互作用を引き起こすかは、図 6.1 のようにこれらの高次相互作用項を 2 つの相互作用項に分解してみると理解できる。煩雑さを避けるために、場を $SU(5)$ の多重項で書き下しておく：

$$\mathbf{10} \equiv (q, u_R^c, e_R^c), \quad \bar{\mathbf{5}} \equiv (d_R^c, l), \quad \mathbf{5}_h \equiv (h_T, h_D) \tag{6.2}$$

ただし h_T はカラーヒッグス (電荷： $(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}$) を表す。この表記を用いると (6.1) の初

*1 核子崩壊を背景にした B もしくは L の破れた高次相互作用項の分類は、標準模型については [51] で、最小な超対称標準模型については [52] でなされている。

めの3つ, 次の1つ, その次の4つはそれぞれ

$$10 \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot 5_h, \quad \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot 5_h^\dagger, \quad 10 \cdot 10 \cdot \bar{5}^\dagger \cdot \bar{5}^\dagger \cdot 5_h^\dagger \quad (6.3)$$

と8種類の相互作用を3種類にまとめて書き下すことができる。

まず (A) $10 \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot 5_h$ を分解してみると, 媒介する重い粒子がスカラーである場合は2種類の分け方 (A-i) $10 \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot 5_h$, (A-ii) $\bar{5} \cdot \bar{5} + 10 \cdot \bar{5} \cdot 5_h$ が存在する。(A-i) の場合, 間を媒介できる粒子の表現は 5, 45 またはその複素表現が可能で, (A-ii) の場合には 10, 15 またはその複素表現が可能である。具体的な成分の一例である $q d_R^c l l h_D$ と $u_R^c d_R^c d_R^c l h_D$ に関する分解とその媒介粒子を図に表す。なお, 媒介粒子がフェルミオンとなる場合は (A-iii) $10 \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot 5_h$ と (A-iv) $\bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} + 10 \cdot 5_h$ が存在し, (A-iii) に対しては 1, 24, (A-iv) に対しては 10, 40 とその複素表現が可能である。ベクトル場となるような分解はスカラー場の場合と同様である。ただし媒介粒子がベクトル場の場合, カイラリティ反転のために余計に微分演算子を含むような相互作用項への分解になる。フェルミオン場に対しても同じことが言えるが, 媒介する表現が1重項または随伴表現の場合は Majorana 質量項, もしくは現れる表現とそれに対する複素表現が同時に存在するときは Dirac 質量項がそれぞれ存在できるので, そのような場合は微分演算子の伴わない相互作用に分けられる。逆に言えば, フェルミオン場の質量の存在のためには, 得られる表現が1重項が随伴表現, もしくは得られる表現とその複素表現がセットで必要になる。今考えている場合では媒介する粒子は重いはずなので, フェルミオン場は常に現れる表現とその複素表現がペアで現れることを前提しておく。このような分解で (B), (C) でどのような媒介粒子が現れるかを見ていくと, (B) に関しては, 媒介粒子がスカラー場, フェルミオン場, ベクトル場いずれの場合にも 10 またはその複素表現のみが可能である。ただし媒介粒子がベクトル場の場合 (A) の場合と同様の理由で微分演算子を含むような相互作用項での分解となる。フェルミオン場の場合, カイラリティの向きによっては微分演算子が必要な相互作用項への分解が存在する。(C) に関しては, 微分演算子を伴わない分解ではボソン場としては 5, 10, 15, 45 とその複素表現, ベクトル場として 10, 40 とその複素表現となる。フェルミオン場に対しては 1, 5, 24, 45 が得られるが, (B) の時と同様にカイラリティの向きによって微分演算子が必要な分解が存在する。スカラー場, ベクトル場での微分演算子を伴う分解の仕方は, 微分演算子の伴わないものと逆になり, スカラー場としては 10, 40, とその複素表現, ベクトル場としては 5, 10, 15, 45 とこれら複素表現が現れる。

以上 (A) ~ (C) をまとめると, 媒介粒子として現れ得るものは

スカラー場, ベクトル場 : 5, 10, 15, 40, 45

フェルミオン場 : 1, 5, 10, 24, 40, 45

と結論付けられる。1, 24 以外は複素表現も可能である。微分演算子の伴わない分解だけに限ると

スカラー場 : 5, 10, 15, 45, ベクトル場 : 10, 40

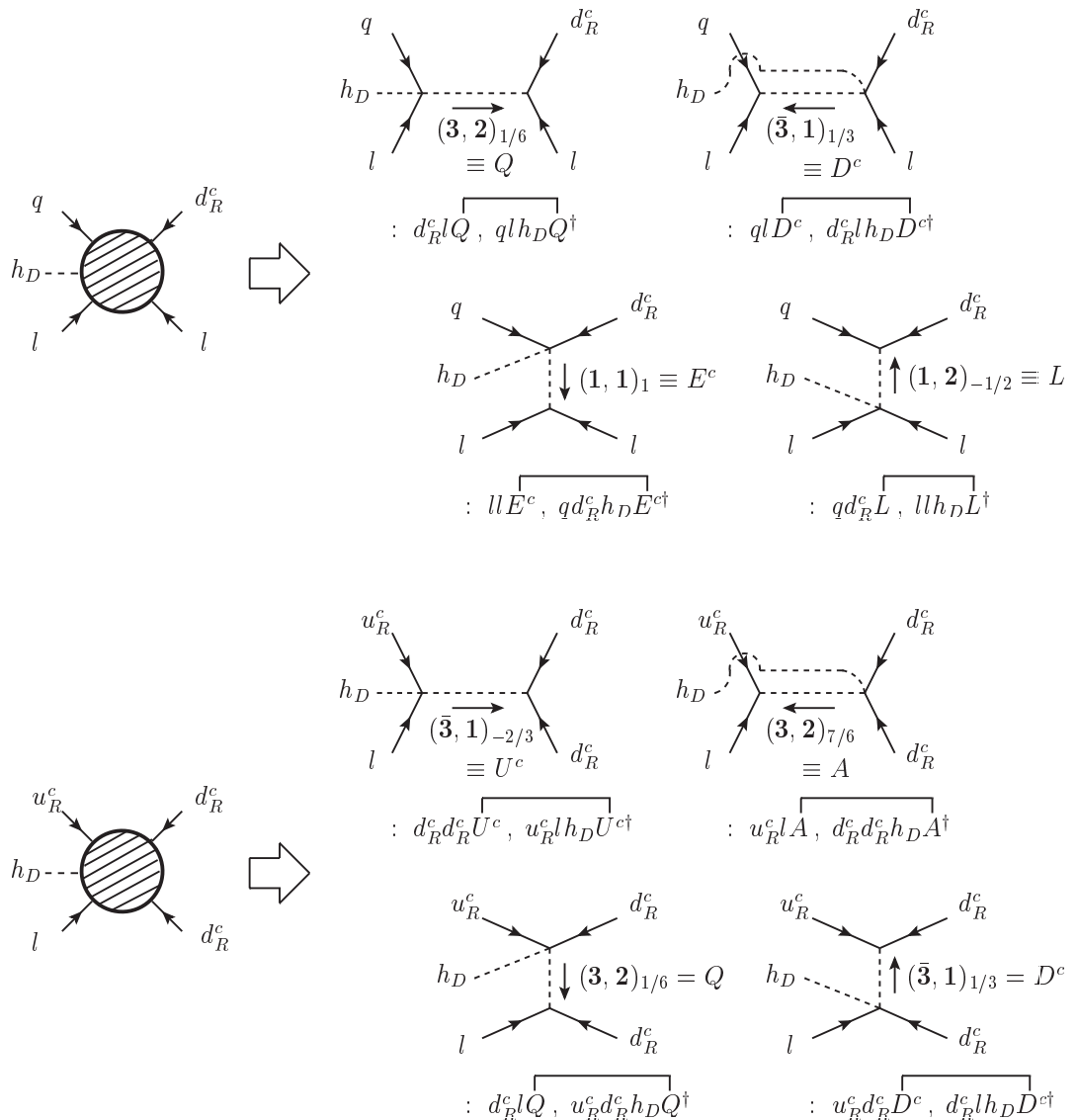


図 6.2 高次相互作用項 $qd_R^c ll h_D$ (上部) と $u_R^c d_R^c d_R^c ll h_D$ (下部) の分解と媒介粒子。大文字表記のものが媒介粒子で、およそのものが $SU(5)$ の表現で $\mathbf{10}$, $\mathbf{5}$ で表される。そのためこれらの粒子は標準模型での小文字で表される粒子と同じ電荷を持っている。ただし A だけは 45 表現なので、標準模型には対応する電荷を持つような粒子はない。

とその複素表現のみが現れる。フェルミオンに関しては先に挙げた表現と同じである。

ここまでで重要なことは、分解する前の相互作用項それぞれが $B-L$ 数を破る項のため、これらの媒介粒子が $B-L$ 数を破る効果を生み出していることである。従って、このような粒子が崩壊することで宇宙に $B-L$ 数を生成することができると考えられる。

この節では $B-L$ 数を破る質量次元 7 の相互作用項を 2 つのものに分解した。このような分解で得られた新たな相互作用項は、具体的な形は記さなかったが、次元 4 以上のものである。しかし $B-L$ 数生成を議論するにあたってそのような項の起源は必要ないの

で、これ以上の分解は行わない。次の節では、この節での質量次元 7 の相互作用項を分解して得られた媒介粒子とそれを伴う相互作用項を用いて、初期宇宙でどれほどの $B - L$ 数が生成されるかを定量的に考える。

6.2 初期宇宙における $B - L$ 数生成

この節では、前節で見た $B - L$ 数を破るような粒子で、特に $SU(5)$ での 10 表現や $\bar{5}$ 表現に属するような重いスカラー場に焦点を当て、これらの崩壊による $B - L$ 数の生成を議論する。

6.2.1 平均正味 $B - L$ 数

まずは導入する粒子を明らかにする。前節で議論したように、 $B - L$ 数生成には新たな場が必要とされ、それが可能である粒子の例として $SU(5)$ 表現での 10 表現や $\bar{5}$ のスカラー粒子が挙げられた。我々はこれらの粒子による $B - L$ 数生成の議論を進めていくが、これらを標準模型の表現で成分別にそれぞれ Q, U^c, E^c, D^c, L と表記する。初めの 3 つは $SU(5)$ の 10 表現に属するもので、残りの 2 つは $\bar{5}$ 表現に属するものである。また、これらの粒子の電荷はそれぞれ標準模型に存在するフェルミオン $q, u_R^c, e_R^c, d_R^c, l$ のものと同じである。また、これらの粒子は高次元相互作用項から得られたものであるため、ある程度重いことを仮定しておく。

次に、次元 7 の相互作用項を分解したときに得られる、上述した新たに導入された重い粒子と付随して得られる次元 4 と 5 の相互作用項を書き下す：

(i) 次元 4 :

$$d_R^c l Q, \quad d_R^c d_R^c U^c, \quad l l E^c, \quad q l D^c, \quad u_R^c d_R^c D^c, \\ q^\dagger q^\dagger D^c, \quad u_R^{c\dagger} e_R^{c\dagger} D^c, \quad q d_R^c L, \quad e_R^c l L, \quad q^\dagger u_R^{c\dagger} L, \quad (h.c.)$$

(ii) 次元 5 :

$$d_R^{c\dagger} d_R^{c\dagger} h_D Q, \quad q q h_D^\dagger Q, \quad u_R^c e_R^c h_D^\dagger Q, \quad q^\dagger l^\dagger h_D^\dagger Q, \quad u_R^{c\dagger} d_R^{c\dagger} h_D^\dagger Q, \\ d_R^{c\dagger} l^\dagger h_D U^c, \quad q e_R^c h_D^\dagger U^c, \quad u_R^{c\dagger} l^\dagger h_D^\dagger U^c, \quad q u_R^c h_D^\dagger E^c, \quad q^\dagger d_R^{c\dagger} h_D^\dagger E^c, \\ e_R^{c\dagger} l^\dagger h_D^\dagger E^c, \quad d_R^{c\dagger} l^\dagger h_D^\dagger D^c, \quad l^\dagger l^\dagger h_D^\dagger L, \quad (h.c.)$$

ただし、ここでは簡単化のためにスピノールやゲージ群 $SU(2)$, $SU(3)$ の添字は省略している。ここで興味深いことは、表 6.1 で表されているように、 Q, U^c, E^c, D^c, L それぞれの崩壊による終状態での $B - L$ 数はそれぞれの次元の相互作用によるものと同じであることである。また、次元 4 の相互作用を通じて生成される $B - L$ 数と次元 5 の相互作用を通じて生成される $B - L$ 数との差が、どの粒子に関しても 2 になる、という点も興味深い。このように次元 4 の相互作用を通じた終状態での $B - L$ 数と次元 5 の相互作用を通じた終状態での $B - L$ 数がそれぞれ異なるので、ゼロでない $B - L$ 数を生成できる。

Interaction	Q	U^c	E^c	D^c	L
dim. 4	+4/3	+2/3	+2	+2/3	0
dim. 5	-2/3	-4/3	0	-4/3	-2

表 6.1 導入された重い粒子の崩壊により生成される $B-L$ 数。

生成される $B-L$ 数を見積もるために、平均正味 $B-L$ 数 (mean net $B-L$ number) ϵ を定義する：

$$\epsilon_i = \sum_f x_{i \rightarrow f} [r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}] \quad (6.4)$$

ここで i は質量 m_i を持った崩壊する粒子のラベルで、 $i \ni Q, U^c, E^c, D^c, L$ を意味する。 f は粒子 i からの 1 つの崩壊過程を表す。 $x_{i \rightarrow f}$ は崩壊過程 f で生成される $B-L$ 数である。また $r_{i \rightarrow f}$ はその崩壊過程への分岐比で、 \bar{i} や \bar{f} は CP 変換された状態、すなわち反粒子を表している。(6.4) で定義される ϵ_i は 2 つの粒子 i と \bar{i} の崩壊で生成される $B-L$ 数を意味しており、それ故にこの ϵ_i と粒子 i の数密度 n_i を用いることで $B-L$ 数密度 n_{B-L} を $n_{B-L} \sim \epsilon_i n_i$ で評価することができる。(4.42) より、スファレロン過程によって $B-L$ 数密度から転換されるバリオン数密度 n_B は

$$n_B = \frac{28}{79} n_{B-L} \sim 0.35 \epsilon_i n_i \quad (6.5)$$

によって得られる。従って、具体的なバリオン数を得るためには ϵ_i と n_i が定量的にどれほどになるかを知る必要がある。

ϵ_i の計算のために、結合定数を次のように定義しておく：

$$i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \text{ (SM)} \\ \searrow b \text{ (SM)} \end{array} = -i y_{iab} \quad , \quad i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \text{ (SM)} \\ \rightarrow b \text{ (SM)} \\ \searrow h_D \text{ or } h_D^\dagger \end{array} = -i \frac{\lambda_{iab}}{\Lambda}$$

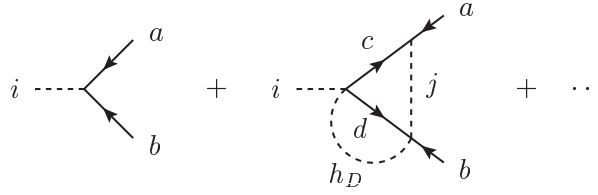
ただし今は $SU(3)$ や $SU(2)$ の脚は省略している。ここで y と λ はそれぞれ無次元量の結合定数で、 Λ は高次相互作用に付随する質量スケールである。図 6.3 に表される Feynman 図を計算することによって、 ϵ_i を

$$\epsilon_i = \frac{2}{(8\pi)^3} \frac{m_i^2}{\Lambda^2} \frac{m_i}{16\pi\Gamma_i} \sum_{j,a,\dots,d} c_{iab} c_{jcd} \text{Im}(y_{iab}^* y_{jbc} \lambda_{icd} \lambda_{jda}^*) \cdot f(m_j^2/m_i^2) \quad (6.6)$$

と求めることができる*2。ここで c_{iab} は始状態 i から終状態 $a+b$ への採り得る内部自由度の数で、 c_{jcd} はループを回る内部自由度の数を表す。 Γ_i は i の全崩壊幅で、ツリーの寄与までで

$$\Gamma_i = \frac{m_i}{16\pi} \sum_{a,b} c_{iab} |y_{iab}|^2 + \frac{m_i}{3(8\pi)^3} \frac{m_i^2}{\Lambda^2} \sum_{a,b} c_{iab} |\lambda_{iab}|^2 \quad (6.7)$$

*2 計算の詳細は付録 B を参照。

図 6.3 ϵ_i の計算のための Feynman 図。

と表される。初めの項は 2 体崩壊からの寄与で、その次の項が 3 体崩壊からの寄与である。(6.6) にある関数 f はループ積分に起因する次のような関数である：

$$f(\alpha) \equiv 1 + 2\alpha [1 - (1 + \alpha) \ln(1 + 1/\alpha)] \quad (6.8)$$

$$\sim \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(\alpha) & (\alpha \lesssim 1) \\ \frac{1}{3\alpha} + \mathcal{O}(1/\alpha^2) & (\alpha \gtrsim 1) \end{cases} \quad (6.9)$$

もしも $m_i \sim m_j$ であつ $m_i < m_j$ であると、関数 f はおよそ $\mathcal{O}(0.1)$ 程度となる。ここで (6.6) にある和の取り方の一例を示しておく。 $i = Q$ と採った場合、2 体崩壊へのラベル a, b としては $a = d_R^c, b = l$ しかないので、

$$\begin{aligned} & \sum_{j,a,\dots,d} c_{Qab} c_{jcdh} y_{Qab}^* y_{jbc} \lambda_{Qcd} \lambda_{jda}^* \\ &= c_{Qdl} y_{Qdl}^* (c_{Uldh} y_{Udd} \lambda_{Qdd} \lambda_{Uld}^* + c_{Uluh} y_{Udd} \lambda_{Qud} \lambda_{Ulu}^* + c_{Dldh} y_{Dud} \lambda_{Qdu} \lambda_{Dld}^*) \\ & \quad + (\text{第 2, 3 世代の粒子からの寄与}) \end{aligned}$$

という様に和がとられる。自由度については、 Q の状態が 1 つ決まればそれに対して $c_{Qdl} = 1$ である。また c_{Uldh} については、これは例えば Q の $SU(3)$ カラーを青に、 $SU(2)$ アイソスピンを上向きに採っておくと、中間状態としては h_D のアイソスピンは下向きに定まるが、カラーは Q から 2 つの d_R^c に分かれる際に赤の補色か緑の補色かのいずれかに分かれる。ここで 2 通りの選び方が存在するために、ループ全体として自由度 2 つ分が出てくる。従つて $c_{Uldh} = 2$ である^{*3}。 c_{Uluh}, c_{Dldh} についても全く同様の議論ができ、 $c_{Uluh} = c_{Dldh} = 2$ となる。このように i を決めれば、相互作用の取り方も自由度も決まる。しかし以下では、簡単化のためにこのような自由度による因子は無視して議論を進める。

ある 1 つの i 粒子の結合定数のみがほかのものより寄与が大きいと仮定しておく。このような結合定数をそれぞれ y_i, λ_i と書くことにする。また (6.6) の虚数部分でこれらの結合定数とともに効いてくる j の結合定数を y_j, λ_j と書くと、(6.6) と (6.7) は次のように書き直される：

$$\epsilon_i = \frac{2}{(8\pi)^3} \frac{m_i^2}{\Lambda^2} \frac{m_i}{16\pi\Gamma_i} \text{Im}(y_i^* y_j \lambda_i \lambda_j^*) \cdot f(m_j^2/m_i^2), \quad (6.10)$$

*3 内部自由度の足を取り入れた Feynman 則できちんと計算を評価しても同じ値が得られる。

$$\Gamma_i = \frac{m_i}{16\pi} |y_i|^2 + \frac{m_i}{3(8\pi)^3} \frac{m_i^2}{\Lambda^2} |\lambda_i|^2. \quad (6.11)$$

さらに, $y \equiv |y_i| \sim |y_j|, \lambda \equiv |\lambda_i| \sim |\lambda_j|$ であるとし, また 2 体崩壊の分岐比と 3 体崩壊の分岐比とが同じくらいである, すなわち $y \sim m_i \lambda / (4\sqrt{6}\pi\Lambda)$ であるとする, よりシンプルな平均正味 $B-L$ 数と全崩壊幅の表式

$$\epsilon_i \sim \frac{3}{16\pi} y^2 f \sin \delta \quad (6.12)$$

$$\Gamma_i \sim 2 \frac{m_i}{16\pi} y^2. \quad (6.13)$$

が得られる。ここで $\sin \delta \equiv \text{Im}(y_i^* y_j \lambda_i \lambda_j^*) / (y^2 \lambda^2)$ である。

6.2.2 熱的生成の場合: case A

次に i の崩壊によって最終的に生成され得るバリオン数 B を 2 つのケースで見積もる。1 つ目のケースは i が熱的に生成され, それから相対論的なまま freeze-out し, その後崩壊する場合 (case A) を考える。この場合, 粒子 i が相対論的なまま freeze-out するため, 粒子数が (A.71) で与えられているようにほぼ相対論的な粒子数 $Y_i \equiv n_i/s \sim 0.278 g_{\text{eff}}/g_*$ で残る。 s はエントロピー密度で, g_* は相対論的粒子の自由度を表す^{*4}。その粒子の崩壊ではエントロピーがあまり生成されない。また, 粒子 i が熱的に生成される場合を考えているので, ここではインフレーション後の再加熱温度が粒子 i の質量より大きくなることを仮定する。freeze-out 時に i が相対論的であるかどうかは後ほど 6.2.4 節で議論するが, そのためにここでは少し一般性を持たせるため, パラメータ $\Delta, 0 \leq \Delta \leq 1$ を用いて, 粒子 i の粒子数を相対論的な粒子数 Y_{hot} より少し減った状態として

$$Y_i = Y_{\text{hot}} \Delta = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_*} \Delta \quad (6.14)$$

で表しておく。

このとき生成され得るバリオン数は, (6.5), (6.12), (6.14) を用いて

$$B \equiv \frac{n_B}{s} = 0.35 \epsilon_i Y_i \sim 3.5 \times 10^{-5} y^2 \Delta \quad (6.15)$$

と得られる。また最後の計算には $f \sin \delta \sim 0.1, g_* \sim 100, g_{\text{eff}} = 6$ (これは i として最も多い自由度を持つ Q を選んでいる) を用いた。従って観測的に得られている $B = 8.7 \times 10^{-11}$ を得るためには

$$y \sim 1.6 \times 10^{-3} \Delta^{-1/2} \quad (6.16)$$

である必要がある。さらに $n_{B-L} \sim \epsilon_i n_i$ という見積もりが適切であるような付加的な条件

$$\Gamma_i > \langle \sigma_i v_i \rangle n_i \quad (6.17)$$

^{*4} ここで現れる g_* は, 正確には g_{*S} であるが (g_*, g_{*S} の定義については (A.40), (A.64) を参照), ここでは i 以外に相対論的な粒子の種類が多数存在することを仮定し, $g_* = g_{*S}$ としておく。

を課すことにする。ここで σ_i は i と \bar{i} との対消滅過程に対する断面積で、 v_i は i, \bar{i} の相対速度である*⁵。 $\langle \dots \rangle$ は熱平均化された量であることを表す。なおこの条件は、 i の粒子数の変化は、対消滅による過程よりも崩壊過程による変化が大きい、ということに対応する。もしも断面積が $\langle \sigma_i v_i \rangle \sim 0.01/m_i^2$ である場合、 i の崩壊温度

$$T_D = \sqrt{\frac{\Gamma_i M_{pl}}{1.66g_*^{1/2}}} \quad (6.19)$$

($M_{pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV はプランク質量。 T_D は (A.44) を用いて評価される、 i の寿命 $= 1/\Gamma_i$ だけ時間が経った時の宇宙の温度に対応する) における (6.17) の条件は大まかに

$$\left(\frac{m_i}{M_{pl}}\right)^{3/2} \gtrsim 7.8 \times 10^{-5} y \Delta \quad (6.20)$$

と書き直される。(6.16) から、(6.20) は

$$m_i \gtrsim 2.5 \times 10^{-5} M_{pl} \Delta^{1/3} = 3.0 \times 10^{14} \Delta^{1/3} \text{ GeV}. \quad (6.21)$$

という条件が得られる*⁶。この case A では i が熱的に生成されている状況を仮定しているので、宇宙の再加熱温度もこの i の質量 m_i より大きくなければならない。他のパラメータについては、例えば $m_i \sim 10^{14}(\sim 16)$ GeV の場合での崩壊幅 Γ_i 、崩壊温度 T_D 、高次元相互作用項の結合定数 λ/Λ はそれぞれ

$$\Gamma_i \sim 1.0 \times 10^{-7} m_i \Delta^{-1} \sim 1.0 \times 10^{7(\sim 9)} \Delta^{-1} \text{ GeV} \quad (6.24)$$

$$T_D \sim 2.7 \times 10^5 m_i^{1/2} \Delta^{-1/2} \sim 2.7 \times 10^{12(\sim 13)} \Delta^{-1/2} \text{ GeV} \quad (6.25)$$

$$\lambda/\Lambda \sim 4\sqrt{6}\pi y/m_i \sim 4.9 \times 10^{-16(\sim 18)} \Delta^{-1/2} \text{ GeV}^{-1} \quad (6.26)$$

が得られる。

もしも freeze-out による粒子数の減少が無視できない場合は、単純には Δ を小さくすればよい。しかしながらそのとき、(6.16) から湯川結合をより大きく採らなければならず、崩壊までの時間が短くなる。それによって freeze-out の時間スケールより短くなると、この論理は破綻する。従っていくらでも Δ は小さくできるわけではなく、下限が存在する。このことに関しても 6.2.4 節で議論することにする。

*⁵ ただし普通の意味の相対速度ではなく、4 元運動量 p_1, p_2 を用いて

$$v_{12} \equiv \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_1^0 p_2^0} \quad (6.18)$$

で定義された“相対”速度である。これは 3 次元運動量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ が平行であるとき、普通の意味での相対速度になる。

*⁶ 他にも非平衡条件が満たされるために、崩壊が宇宙膨張に比べゆっくりと進むべしという条件 [53]

$$\Gamma_i \lesssim H|_{T=m_i} \quad (6.22)$$

も必要であるが、この条件を (6.16) を用いて評価すると

$$m_i \gtrsim 6.0 \times 10^{-9} M_{pl} \Delta^{-1} = 7.3 \times 10^{10} \Delta^{-1} \text{ GeV} \quad (6.23)$$

となり、これは (6.21) の方が制限が強い。

6.2.3 エネルギー優勢になった場合：case B

2番目のケースとして、 i と \bar{i} の持つエネルギーが宇宙のエネルギーより優勢になる状況を考える (case B)。輻射のエネルギー密度が $\propto a^{-4}$ で減少するのに対し、重い物質的な粒子のエネルギーは $\propto a^{-3}$ で減少するので、一般的に長寿命の重い粒子は宇宙のエネルギーに対して優勢になる。この時、宇宙のエネルギー ρ は

$$\rho = \rho_i + \rho_{\bar{i}} = 2m_i n_i = \frac{\pi^2}{30} g_* T_R^4 \quad (6.27)$$

となる。ここで $\rho_i, \rho_{\bar{i}}$ は i, \bar{i} のエネルギー密度、 T_R は i と \bar{i} が崩壊した後の宇宙の温度である。この時の $B-L$ 数密度とエントロピー密度の比は

$$\frac{n_{B-L}}{s} = \frac{\epsilon_i n_i}{s} = \frac{3 T_R}{8 m_i} \epsilon_i \quad (6.28)$$

となる。従ってスファレロン過程後のバリオン数は

$$B = \frac{n_B}{s} = \frac{28}{79} \frac{n_{B-L}}{s} = \frac{21}{158} \frac{T_R}{m_i} \epsilon_i \quad (6.29)$$

によって評価される。また、 i, \bar{i} の崩壊により熱化される宇宙の温度 T_R は (6.19) と同じ表式によって得られるので、(6.19) に (6.13) を代入すると

$$T_R = 2.4 \times 10^{-3} y \sqrt{m_i M_{pl}} \quad (6.30)$$

を得る。ただし $g_* \sim 100$ とした。従ってバリオン数は上の T_R の表式と ϵ_i の表式 (6.12) を用いることで

$$B \sim 3.9 \times 10^{-4} y^3 \sqrt{\frac{M_{pl}}{m_i}} \sin \delta \sim 3.9 \times 10^{-5} y^3 \sqrt{\frac{M_{pl}}{m_i}} \quad (6.31)$$

を得る。ただし最後の等号では $f \sin \delta \sim 0.1$ を用いた。従って $B = 8.7 \times 10^{-11}$ を満たすためには

$$y^3 \sqrt{M_{pl}/m_i} \sim 2.2 \times 10^{-6} \quad (6.32)$$

であればよい。ここで case A の時と同様に付加的な条件 $\Gamma_i > \langle \sigma_i v_i \rangle n_i$ を課す。 $\langle \sigma_i v_i \rangle \sim 0.01/m_i^2$ と仮定し、さらに (6.27) を用いると、この条件は

$$\left(\frac{m_i}{M_{pl}} \right)^2 > 4.7 \times 10^{-5} y^2 \quad (6.33)$$

と書き直せる。従って (6.32) を用いると質量に対する制限

$$m_i > 1.4 \times 10^{-5} M_{pl} \sim 1.7 \times 10^{14} \text{ GeV} \quad (6.34)$$

を得る。質量が $m_i \sim 10^{14}(\sim 16)$ GeV の場合の湯川結合定数 y , 崩壊幅 Γ_i , 再加熱温度 T_R , 高次元相互作用項の結合定数 λ/Λ の値を記しておく, それぞれ

$$y \sim 8.6 \times 10^{-6} m_i^{1/6} \text{ GeV}^{-1/6} \quad (6.35)$$

$$\sim \begin{cases} 1.9 \times 10^{-3} & (m_i = 10^{14} \text{ GeV}) \\ 4.0 \times 10^{-3} & (m_i = 10^{16} \text{ GeV}) \end{cases} \quad (6.36)$$

$$\Gamma_i \sim 3.0 \times 10^{-12} m_i^{4/3} \text{ GeV}^{-1/3} \quad (6.37)$$

$$\sim \begin{cases} 1.4 \times 10^7 \text{ GeV} & (m_i = 10^{14} \text{ GeV}) \\ 6.4 \times 10^9 \text{ GeV} & (m_i = 10^{16} \text{ GeV}) \end{cases} \quad (6.38)$$

$$T_R \sim 1.5 \times 10^3 m_i^{2/3} \text{ GeV}^{1/3} \quad (6.39)$$

$$\sim \begin{cases} 3.2 \times 10^{12} \text{ GeV} & (m_i = 10^{14} \text{ GeV}) \\ 6.8 \times 10^{13} \text{ GeV} & (m_i = 10^{16} \text{ GeV}) \end{cases} \quad (6.40)$$

$$\lambda/\Lambda \sim 2.7 \times 10^{-4} m_i^{-5/6} \text{ GeV}^{-1/6} \quad (6.41)$$

$$\sim \begin{cases} 5.7 \times 10^{-16} \text{ GeV}^{-1} & (m_i = 10^{14} \text{ GeV}) \\ 1.2 \times 10^{-17} \text{ GeV}^{-1} & (m_i = 10^{16} \text{ GeV}) \end{cases} \quad (6.42)$$

となる。case A, case B どちらにおいても同じような制限となっている。

6.2.4 熱平衡からの離脱と残存量

6.2.2 節では重い粒子 i が十分に早く freeze-out することを仮定した。これによって, i の崩壊時での初期残存量が熱的残存量とあまり変わっていないことが期待できるためである。この節ではその妥当性について述べる。実際の i の粒子数の変化は Boltzmann 方程式

$$\dot{n}_i + 3Hn_i = -\Gamma_i \langle m_i/E \rangle (n_i - n_i^{eq}) - \langle \sigma_i v_i \rangle (n_i^2 - (n_i^{eq})^2) \quad (6.43)$$

によって定まる。 n_i^{eq} は平衡状態での i の粒子数である。ただし化学ポテンシャルを無視したことと, 弾性散乱近似^{*7}, そして Maxwell-Boltzmann 近似^{*8}を用いている。崩壊に関する熱平均については

$$\langle m_i/E \rangle = K_1(m_i/T)/K_2(m_i/T) \quad (6.45)$$

$$\sim \begin{cases} m_i/2T & (T \gtrsim m_i) \\ 1 & (T \lesssim m_i) \end{cases} \quad (6.46)$$

^{*7} 分布関数 $f(\mathbf{p})$ と粒子数密度 n に対して

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{n^{eq}} f^{eq}(\mathbf{p}). \quad (6.44)$$

この近似は運動量の分布の形は変えずに粒子数を変化させることに対応している。

^{*8} 平衡状態での分布関数 $f^{eq}(\mathbf{p})$ に対して $f^{eq}(\mathbf{p}) \sim e^{-E(\mathbf{p})/T}$ 。 $E(\mathbf{p})$ は i のエネルギー。

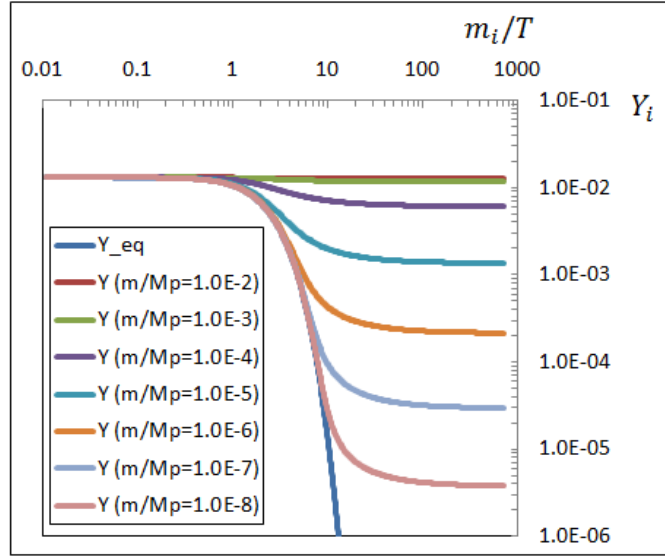


図 6.4 崩壊しない場合 ($y = 0$) での粒子数の発展。用いたパラメータは $g_* = 106.75$, $g_{\text{eff}} = 6$, $\alpha^2 = 0.01$ 。横軸は m_i/T , 縦軸は粒子数 $Y_i \equiv n_i/s$ 。グラフは i の質量ごとにそれぞれ求めている。上から順に $m_i/M_{pl} = 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-8}$ となっている。なお, $M_{pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV である。最終的な残存量 ($m_i/T \sim 1000$) の値を表 6.2 に示す。

と求められる。ただし K_1, K_2 は修正 Bessel 関数^{*9}である。この節ではパラメータを具体的に

$$g_* = 106.75, \quad g_{\text{eff}} = 6, \quad (6.47)$$

$$\langle \sigma_i v_i \rangle = \frac{\alpha^2}{m_i^2} \left(\frac{K_1(m_i/T)}{K_2(m_i/T)} \right)^2 \quad (6.48)$$

$$\sim \begin{cases} \alpha^2/4T^2 & (T \gtrsim m_i) \\ \alpha^2/m_i^2 & (T \lesssim m_i) \end{cases} \quad (6.49)$$

と採って実際に (6.43) に対する数値計算の結果を示す。散乱の項はゲージ相互作用であることを想定している。特にこの場合は $i + \bar{i} \rightarrow A + A$ といった, グルーオンなどのゲージ場 A との 2 体散乱に対応する。まず i が全く崩壊しない状況, すなわち $y = 0$ の場合を考える。これによって i の freeze-out によって粒子数がどれほど残るかが理解できる。 $10^{-8}M_{pl} \leq m_i \leq 10^{-2}M_{pl}$ の様々な i の質量に対する結果を図 6.4 に示す。この図から, 重い質量は明らかに Y_{hot} とほぼ同じ粒子数のまま freeze-out していることが読み取れる。最終的な relic abundance として残る具体的な値は表 6.2 に記してある。 $m_i \sim 10^{-3}M_{pl} \sim 10^{16}$ GeV までは初めの熱的生成量からほとんど減少せず, $m_i \sim 10^{-5}M_{pl} \sim 10^{14}$ GeV ほどで約 1 割程度に減少する。この比 Y_i/Y_{hot} は (6.14) で定義された Δ に対応する。以上の結果から, 重い粒子は早く freeze-out し, 熱的によ

*9 (A.16) を参照。

m_i/M_{pl}	Y_{hot}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$Y_i(\times 10^{-2})$	1.3	1.3	1.2	0.61	0.014	0.0022	0.00030	0.000038
Y_i/Y_{hot}	1	0.99	0.89	0.47	0.10	0.017	0.0023	0.00029

表 6.2 図 6.4 の $T \sim 1000m_i$ における質量別の Y_i の値と Y_{hot} との比。

て生成される量と十分に同じオーダーだけ残ることが結論付けられる。

次に、崩壊の効果を取り入れた場合を考える。パラメータとしては、質量の下限にある $m_i = 10^{-5}M_{pl} \sim 10^{14}$ GeV の場合と、下限の下にある $m_i = 10^{-6}M_{pl} \sim 10^{13}$ GeV, $m_i = 10^{-7}M_{pl} \sim 10^{12}$ GeV についてを考える。また湯川結合定数に関しては崩壊しない場合 $y = 0$ と、(6.16) で得られた湯川結合定数 $= 1.6 \times 10^{-3}\Delta^{-1/2}$ に、表 6.2 で得られた $Y_i/Y_{\text{hot}} = \Delta$ を代入した値

$$y \sim 1.6 \times 10^{-3} \times \Delta^{-1/2} \sim \begin{cases} 4.9 \times 10^{-3} & (m_i = 10^{-5}M_{pl}) \\ 1.2 \times 10^{-2} & (m_i = 10^{-6}M_{pl}) \\ 3.4 \times 10^{-2} & (m_i = 10^{-7}M_{pl}) \end{cases} \quad (6.50)$$

を用いて数値計算を実行した。結果を図 6.5 に示す。

前節での生成されるバリオン数の評価法は、 i の粒子数 Y_i が熱的な粒子数 Y_{hot} の値に近いことが前提であった。また、 Y_{hot} から少なくなっていたとしても、それはパラメータ Δ によって湯川結合を大きくすることである程度調節できることを主張した。そのことを見るために、まず (a) $m_i = 10^{-5}M_{pl}$ の場合のグラフに注目すると、パラメータ Δ による調節がうまくいっていると思われる。なぜならば、 i の崩壊が十分想定される hot relic の量で起こっており、また平衡状態の粒子数よりも十分多い状態からの崩壊にもなっているためである。そのことをよく表しているのが崩壊過程を含む場合の粒子数 Y_{decay} と平衡状態での粒子数 Y_{eq} との差 $Y_{\text{decay}} - Y_{\text{eq}}$ のグラフである。崩壊のない場合、この曲線は崩壊しない場合の Y_i の freeze-out したグラフに近づくはずである。しかしその途中で減少を始めるということは、この瞬間に崩壊による寄与が顕著になっていることを意味する。従って、この時に i の粒子数が平衡状態から外れていればよく、またこの時の $Y_{\text{decay}} - Y_{\text{eq}}$ だけの粒子数がバリオン数生成に効く i の粒子数と考えられる。想定した量の Y_i が存在でき、また十分平衡状態から外れたところからの崩壊であるので、従って $m_i = 10^{-5}M_{pl}$ の場合の生成されるバリオン数のための評価法 $n_{B-L} \sim \epsilon n_i$ は妥当であると考えられる。

一方 (b) $m_i = 10^{-6}M_{pl}$ と (c) $m_i = 10^{-7}M_{pl}$ の場合に目を向けると、(b) の場合は崩壊と freeze-out がほぼ同じときに起きていることが、 $Y_{\text{decay}} - Y_{\text{eq}}$ の曲線からわかる。(c) に対しては一目瞭然で、明らかに freeze-out する前に崩壊が起きている。どちらの場合も Y_i 自体は平衡状態のものよりわずかに多くはなっているものの、しかし熱平衡状態との量に比べるとわずかな量であり、この時に i の崩壊によって生成される $B - L$ 数は $n_{B-L} \sim \epsilon n_i$ で評価されるほど有効に生成されないことが理解できる。

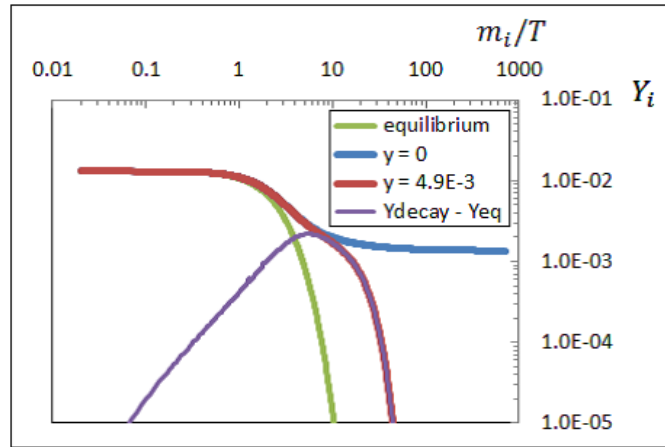
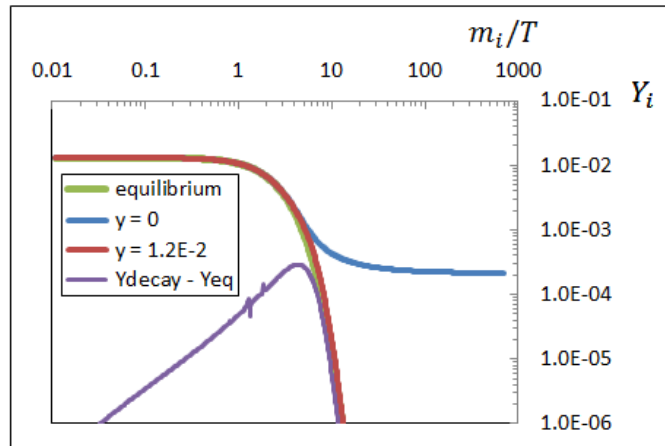
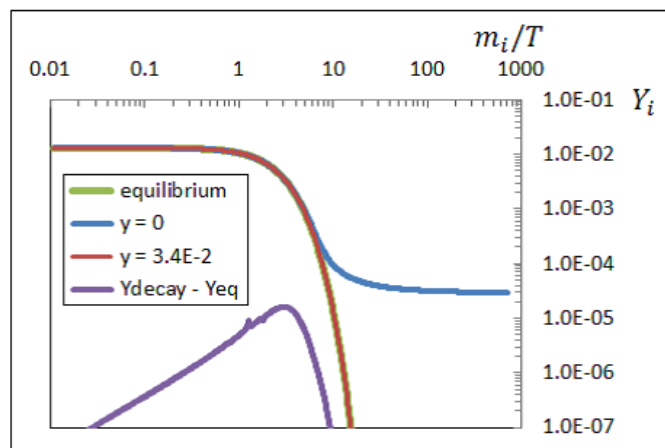
(a) $m = 10^{-5} M_{pl}$ (b) $m = 10^{-6} M_{pl}$ (c) $m = 10^{-7} M_{pl}$

図 6.5 上から順に質量が (a) $m_i = 10^{-5} M_{pl}$, (b) $m_i = 10^{-6} M_{pl}$, (c) $m_i = 10^{-7} M_{pl}$ の場合での粒子数の発展の様子。横軸は m_i/T , 縦軸は粒子数 $Y_i \equiv n_i/s$ 。用いたパラメータは $g_* = 106.75, g_{\text{eff}} = 6, \alpha^2 = 0.01$ 。平衡状態, 崩壊のない場合 ($y = 0$), 崩壊する場合 $y \neq 0$ の Y_i の値をプロットした。また, 紫色のグラフは崩壊の効果の入った場合での粒子数 Y_{decay} と平衡状態での粒子数 Y_{eq} との差 $Y_{\text{decay}} - Y_{\text{eq}}$ をプロットしている。

第 7 章

まとめと展望

本論文では、まず宇宙のバリオン数生成のためにどのような相互作用が必要かを論じ、少なくとも $B-L$ 数を破るという観点から、標準模型での質量次元 5 の相互作用項が 1 種類 (これはレプトジェネシスに関連する)、そして次元 6 の相互作用項にはそのようなものは存在せず、次に現れる 11 種類の次元 7 の相互作用項が $B-L$ 数を破ることを挙げた。次にそれらの相互作用項をさらに 2 つの部分に分解することで、どのような粒子が $B-L$ 数を破る役割を担っているかを調べ上げた。その中で特に、標準模型のフェルミオンと同じ電荷を持つ、 $SU(5)$ での 10 表現や $\bar{5}$ 表現に属するスカラー場に注目し、これらの粒子による宇宙のバリオン数生成のシナリオを考えた。これらの粒子は $B-L$ 数を破る相互作用を引き起こすことができるために、宇宙に $B-L$ 数を生成でき、後のスファレロン過程において $B-L$ 数を B 数に転換することができる。

この $B-L$ 数生成のシナリオとして、 $B-L$ 数を生成する粒子が熱的に生成され、早々に freeze-out し、hot relic となってから崩壊する場合 (case A) と、宇宙の全エネルギーに対して優位になった状態で崩壊する場合 (case B) の 2 つに分けて議論した。case A では初め hot relic であるとし、崩壊粒子の粒子数がその量であるとして生成され得る $B-L$ 数を評価したが、後の数値計算の結果からも、 10^{15} GeV 以上の重い粒子に対しては十分に hot relic の残存量のまま熱浴から離脱することが示された。また、質量が 10^{14} GeV ほどになると hot relic の 1 割程度まで粒子数が減るものの、その分湯川結合定数を少し大きくすることによって、そのまま残存量から $B-L$ 数を評価することが妥当であることが示された。質量が 10^{13} GeV 以下になると、そのような評価が妥当でなくなることも確認された。しかしながら、本論では議論しなかったが、重い粒子が熱浴から離脱して物質的振る舞いになると、宇宙膨張によるエネルギー密度の減衰の仕方が輻射のそれに比べてゆっくりであるため、寿命の長いそのような粒子は宇宙のエネルギーに対して優勢になりやすい： $\frac{\rho_i + \rho_{\bar{i}}}{\rho_R} = \frac{8}{3} g_{\text{eff}} \frac{m_i}{T_R} Y_i > 1$ 。このような状況になると、粒子 i の崩壊によってエントロピーが多量に生成されるために、その場合の $B-L$ 数の評価は case B での計算が好ましくなる。また、重い粒子が非熱的に生成され [54]、宇宙の密度に対して優勢になる場合もあり得る。この場合も case B での評価が好ましい。

case A に関しては、宇宙の再加熱温度が $B-L$ 数を生成する粒子の質量より大きい必

要があるものの、それを否定するものはないので、重い粒子の熱的残存量は宇宙のバリオン非対称性を説明できる可能性があるとして結論付けられる。恐らく重要な点の1つは、粒子が重いために Hubble 膨張率が十分に大きくなることであり、それによってゲージ相互作用による平衡状態からさえ離脱できる。これは普通のレプトジェネシスとは大きく異なる点である。

我々のシナリオで気を付けなければならないことは、低エネルギースケールに $B-L$ 数を破る相互作用が存在するときである。もしも右巻きニュートリノといった、 $B-L$ 数を破る粒子の質量が、その崩壊温度やスファレロン過程が平衡状態になり始める 10^{12} GeV より小さいと、 $B-L$ 数を破る相互作用が平衡状態に達することにより、それまでに生成された $B-L$ 数が washout される [55]。従って我々のシナリオでバリオン非対称性を説明できるためには、右巻きニュートリノの質量が 10^{12} GeV よりも重くなくてはならず、そうでない場合は右巻きニュートリノの質量が崩壊温度よりも大きくなければならない。

他の現象論からの制限としては、バリオン数を破る相互作用を起こすために通常は陽子崩壊の制限が関わる。しかしながら我々がバリオジェネシスのシナリオに用いた粒子と相互作用は、結合定数は $y\lambda/(m_i^2\Lambda)$ であるような、質量次元 7 の相互作用項から見出したものであり、陽子崩壊への寄与は非常に小さい。実際に上記の結合定数を用いて、重い粒子の質量を 10^{14} GeV として大まかに評価してみても $\tau_p \sim 10^{56}$ year となり、現在の制限 (3.15) には全く影響を受けない。

また、この論文では超対称性 (supersymmetry, SUSY) を導入しなかった。しかし超対称性への拡張はすぐにできる。いくつかの超対称大統一理論のモデル [56] においては、 $SU(5)$ の $10 + \bar{10}$, 24 , and $5 + \bar{5}$ といった重い粒子が存在する可能性がある。超対称化したことにより、宇宙論で深刻なグラビティーノ問題 [57] が考慮されなければならないが、このような重い粒子が宇宙のバリオン数の生成できるかもしれない。

謝辞

本論文の作成にあたって、まず指導教官である前川展祐先生に感謝の意を述べさせていただきます。前川先生にはこの研究を通して非常に多くの知見やアドバイスを頂き、これからの研究者として必要な能力を養って頂きました。心からお礼を申し上げます。また、上道寛大さん、村松祐さん、新居慶太さんには様々な議論に付き合ってくださいました。この場を借りてお礼を申し上げます。

付録 A

熱力学量と宇宙論

初期宇宙での粒子は宇宙の膨張に比べ十分に相互作用できているので、これらは熱浴に存在し、局所熱平衡状態を保つ。この章では宇宙論でよく用いられる諸熱力学量を議論し、導出しておく。

A.1 平衡系での熱力学量

質量 m ，運動量 \mathbf{p} ，化学ポテンシャル μ の粒子の温度 T での分布関数 $f(\mathbf{p})$ は次で与えられる：

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(E(\mathbf{p}) - \mu)/T] \mp 1} \quad (\text{A.1})$$

ここで $E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ である。± の符号は粒子の統計性の違いであり、− がボゾン，+ がフェルミオンの場合に対応する。

種々の熱力学変数はこの分布関数に重みをつけて運動量で積分することによって得られる^{*1}。粒子数密度を n ，エネルギー密度を ρ ，圧力を p とすると、それぞれ

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}) \quad (\text{A.2})$$

$$\rho = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) \quad (\text{A.3})$$

$$p = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}) \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E(\mathbf{p})} \quad (\text{A.4})$$

によって得られる。ここで g は粒子の内部自由度で、スピンやカラーの自由度がこれにあたる。

A.1.1 極限状態での定量的評価

(A.2) ~ (A.4) の積分を完全に実行することは難しいが、ある極限のもとでの振る舞いは知ることができる。

^{*1} 宇宙論的に興味のある熱力学量については [58] の Appendix C でまとめられている。

相対論的極限 ($T \gg m$) : この場合では粒子の質量が無視でき, $E(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$ としてよい。従ってこの時点でゼロ質量の粒子に対する状態方程式

$$\rho = \frac{p}{3} \quad (\text{A.5})$$

と言える。さらに $T \gg |\mu|$ の場合, (A.2) ~ (A.4) はゼータ関数の表式*2

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \quad (\text{A.7})$$

となり ($\Gamma(z)$ はガンマ関数), それぞれ

$$n = g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \times \begin{cases} 1 & (\text{ボソン}) \\ 3/4 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\rho = g \frac{\pi^2}{30} T^4 \times \begin{cases} 1 & (\text{ボソン}) \\ 7/8 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$p = g \frac{\pi^2}{90} T^4 \times \begin{cases} 1 & (\text{ボソン}) \\ 7/8 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

と求められる ($\zeta(3) = 1.2020569 \dots$)。

非相対論的極限 ($T \ll m$) : 非相対論的極限 ($T \ll m$) の場合, エネルギーの最低値が m になるので, 分布関数を

$$f(\mathbf{p}) \sim \exp\left(-\frac{E - \mu}{T}\right) \quad (\text{A.11})$$

と近似できる。これは Maxwell-Boltzmann 統計による分布関数で, この近似のもとではボソンとフェルミオンの間に違いが見られなくなる。さらにエネルギーについて非相対論的な近似 $E \sim m + |\mathbf{p}|^2/2m$ を施すと, 分布関数を

$$f(\mathbf{p}) \sim e^{-(m-\mu)/T} \cdot \exp\left[-\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}\right] \quad (\text{A.12})$$

と Gauss 型の関数で近似できる。これらの近似から, 熱力学量はそれぞれ

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m - \mu}{T}\right) \quad (\text{A.13})$$

$$\rho = mn + \frac{3}{2}nT \quad (\text{A.14})$$

$$p = nT \quad (\ll \rho) \quad (\text{A.15})$$

*2 フェルミオンに対しては

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{e^x + 1} = \left(1 - \frac{1}{2^{z-1}}\right) \Gamma(z)\zeta(z) \quad (\text{A.6})$$

の関係式を用いる。

と求めることができる。

Maxwell-Boltzmann 分布は，変数変換 $z = E/m$ を行うことによって修正 Bessel 関数 (modified Bessel function)

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty dz (z^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-xz} \quad (\text{A.16})$$

を用いて書き表すことができる。この修正 Bessel 関数を用いると諸熱力学量は

$$n = \frac{g}{2\pi^2} e^{\mu/T} m^2 T K_2(m/T) \quad (\text{A.17})$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} e^{\mu/T} m^3 T \left[K_3(m/T) - \frac{T}{m} K_2(m/T) \right] \quad (\text{A.18})$$

$$= mn \left[\frac{K_3(m/T)}{K_2(m/T)} - \frac{T}{m} \right] \quad (\text{A.19})$$

$$p = \frac{g}{2\pi^2} e^{\mu/T} m^2 T^2 K_2(m/T) \quad (\text{A.20})$$

$$= nT \quad (\text{A.21})$$

と書き表される。あとは $|x| \gg 1$, $|\arg x| < 3\pi/2$ での漸近展開

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2x)^n} \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{n! \cdot \Gamma(\nu - n + 1/2)} \quad (\text{A.22})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{1}{2x} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{8x^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\nu^2 - \frac{9}{4} \right) + \dots \right] \quad (\text{A.23})$$

を考えることにより高次の補正項が得られる。

縮退したフェルミオン ($T \ll \mu, m < \mu$): $\mu > 0$ の縮退したフェルミオンの場合，分布関数 (A.1) に $x = E/\mu$ と変数変換を施すことにより，分布関数が

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(x-1)\mu/T} + 1} \sim \theta(1-x) \quad (\text{A.24})$$

と階段関数的に振る舞うことがわかる。従ってこれを用いると， $m < \mu$ の縮退したフェルミオンに対して

$$n = \frac{g\mu^3}{6\pi^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2} \right)^{3/2} = \frac{g\mu^3}{6\pi^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{\mu^2} + \dots \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\rho = \frac{g\mu^4}{8\pi^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2} + \dots \right) \quad (\text{A.26})$$

$$p = \mu n - \rho = \frac{g\mu^4}{24\pi^2} \left(1 - 3 \frac{m^2}{\mu^2} + \dots \right) \quad (\text{A.27})$$

を得る。

A.1.2 正味数密度

ここでは粒子の数密度 n と反粒子の数密度 \bar{n} の差で定義される、正味数密度 (net number density) の表式を与えておく。なお、ここでは粒子に対する化学ポテンシャル μ と反粒子に対する化学ポテンシャル $\bar{\mu}$ には

$$\mu + \bar{\mu} = 0 \quad (\text{A.28})$$

の関係があることを仮定する*³。この時の正味数密度は、相対論的な粒子 ($T \gg m$) に対しては、 $x \equiv E/T$ と積分変数を置き換えることにより

$$\begin{aligned} n - \bar{n} &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dE E^2 \left[\frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \mp 1} - \frac{1}{e^{(E+\mu)/T} \mp 1} \right] \\ &= \frac{gT^3}{\pi^2} \sinh \frac{\mu}{T} \cdot \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^x}{e^{2x} \mp 2e^x \cosh(\mu/T) + 1} \end{aligned}$$

と書き表すことができるが、ここでさらに $|\mu| \ll T$ を仮定すると、

$$\begin{aligned} n - \bar{n} &\sim \frac{gT^3}{\pi^2} \frac{\mu}{T} \cdot \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^x}{(e^x \mp 1)^2} \\ &= \frac{gT^3}{3} \cdot \frac{\mu}{T} \times \begin{cases} 1 & (\text{ボソン}) \\ 1/2 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

と評価することができる。非相対論的な粒子 ($T \ll m$) に対しては (A.13) を粒子・反粒子の場合で考えて差し引けばよく、

$$n - \bar{n} = 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \sinh \frac{\mu}{T} \quad (\text{A.30})$$

と得られる。

A.1.3 熱的平均化

物理量 $\mathcal{O}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots)$ の熱的平均化を、分布関数 $f_1(\mathbf{p}_1), f_2(\mathbf{p}_2), \dots$ を用いて次で定義する：

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \frac{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \cdots \mathcal{O}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots) f_1(\mathbf{p}_1) f_2(\mathbf{p}_2) \cdots}{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \cdots f_1(\mathbf{p}_1) f_2(\mathbf{p}_2) \cdots} \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{1}{n_1 n_2 \cdots} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \cdots \mathcal{O}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots) f_1(\mathbf{p}_1) f_2(\mathbf{p}_2) \cdots \quad (\text{A.32})$$

*³ この条件は、例えば粒子・反粒子の対生成・対消滅 ($i + \bar{i} \longleftrightarrow \gamma + \gamma$) の平衡系では正当化される。

つまり，粒子の運動量分布を重みとして平均化されている。例えばエネルギーを熱的に平均化すると，相対論的極限 ($T \gg m$) の場合，

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{n} = \begin{cases} [\pi^4/30\zeta(3)] T \sim 2.701T & (\text{ボソン}) \\ [7\pi^4/180\zeta(3)] T \sim 3.151T & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

と，温度に比例する。また非相対論的極限 ($T \ll m$) の場合は

$$\langle E \rangle = m \left[\frac{K_3(m/T)}{K_2(m/T)} - \frac{T}{m} \right] \sim m + \frac{3}{2}T \quad (\text{A.34})$$

となり，質量がエネルギーの割合を多く占める。縮退したフェルミオン ($T \ll \mu$) では

$$\langle E \rangle \sim \frac{3}{4}\mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\mu^2} \right) \quad (\text{A.35})$$

で，leading の項は化学ポテンシャルに比例する。

一方，運動量の大きさの熱的平均化を考えると，相対論的な場合は $|\mathbf{p}| \sim E$ となるために (A.33) と同じ結果となる。それに対して非相対論的な場合は

$$\langle |\mathbf{p}| \rangle = 4\sqrt{\frac{mT}{2\pi}} \frac{K_{5/2}(m/T)}{K_2(m/T)} \sim 4\sqrt{\frac{mT}{2\pi}} \left(1 - 3\frac{T}{m} + \dots \right) \quad (\text{A.36})$$

と，leading の項は質量と温度の相乗平均に比例する。温度がそのまま運動量に対応しないことは注意すべき点である。これは分布関数が $\exp[-\mathbf{p}^2/2mT]$ と Gauss 型になっているためであり， \exp の肩が $\mathcal{O}(1)$ になるところがおよそ \sqrt{mT} であることから理解できる。縮退したフェルミオンに対しては

$$\langle |\mathbf{p}| \rangle = \frac{3}{4}\mu \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \sim \frac{3}{4}\mu \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\mu^2} \right) \quad (\text{A.37})$$

が得られる。これはエネルギーでの表式と似た形になる。

最後に m/E の熱的平均を与えておく。この量は速度 v での Lorentz 収縮の因子 $\sqrt{1-v^2}$ になっており，Boltzmann 方程式での，崩壊率や散乱断面積の熱的平均化の際に現れる。分布関数を Maxwell-Boltzmann 分布 $f(\mathbf{p}) = \exp[-E(\mathbf{p})/T]$ で近似すると，

$$\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle = \frac{K_1(m/T)}{K_2(m/T)} = \begin{cases} \frac{m}{2T} + \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{T^3}\right) & (T \gg m) \\ 1 - \frac{3}{2} \frac{T}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{T^2}{m^2}\right) & (T \ll m) \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

と得られる。実際に Boltzmann 方程式中に現れる崩壊率 Γ の熱平均化では $\langle \Gamma \rangle = \Gamma(T=0) \times \langle m/E \rangle$ の形で現れるが， $\langle m/E \rangle$ の因子が高温では崩壊までの寿命を延ばす働きをしていることが理解できる。

A.2 輻射優勢期の宇宙膨張

宇宙膨張のダイナミクスは Friedmann 方程式

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho \quad (\text{A.39})$$

によって決まる。ここで $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ は Hubble パラメータで、 $a(t)$ はスケール因子である。また $M_{pl} \equiv 1/\sqrt{G}$ で、 G は Newton 重力定数である。この方程式から、宇宙の全エネルギー密度の温度依存性がわかれば、Hubble パラメータを温度の関数で表すことができる。

系の全エネルギー密度はすべての粒子に対しての和を採ればよい。ここで相対論的な 1 自由度のボソン粒子のエネルギー密度 $\rho_{\text{rela.}} = \frac{\pi^2}{30} T^4$ で規格化された、以下の量を定義すると便利である：

$$g_* \equiv \sum_{i=\text{all species}} \frac{\rho_i}{\rho_{\text{rela.}}} = \sum_{i=\text{all species}} \frac{30}{\pi^2} \frac{\rho_i}{T^4} \quad (\text{A.40})$$

ただし T は規格化に用いる粒子の温度で、通常は光子の温度が採られる。この g_* を使えば系の全エネルギー密度 ρ_R はシンプルに

$$\rho_R = g_* \rho_{\text{rela.}} = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (\text{A.41})$$

と書ける。しかしながら非相対論的な粒子 i からの寄与は、(A.13), (A.14) から分かるように、 $m_i - \mu_i \gg T_i$ である限り指数関数的な抑制があるために実質ほとんどが相対論的な粒子の寄与 (A.9) のみでよい近似となる。従って (A.40) 中の和は相対論的な粒子のみでよく、

$$g_* \sim \sum_{\substack{i=\text{rela.} \\ \text{bosons}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i=\text{rela.} \\ \text{fermions}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \quad (\text{A.42})$$

となる。つまり g_* は相対論的な全粒子の有効的な自由度であることを意味している。

なお、 g_* が相対論的な粒子の寄与になっており、さらに $\rho_{\text{rela.}} = p_{\text{rela.}}/3$ であるので、全圧力も

$$p_R = \frac{\rho_R}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4 \quad (\text{A.43})$$

と g_* を用いてシンプルに書ける*4。

我々の宇宙の発展における具体的な g_* の値を記しておくとして、 $T \gtrsim 300$ GeV では標準模型粒子すべてが相対論的に振る舞うと思われるので、光子以外に 8 つのグルーオン、 W^\pm, Z , 3 世代分のクォークとレプトン、そして複素スカラーのヒッグス 2 重項の自由度を数え上げて $g_* = 106.75$ を得る。ここでは求めないが、もしも超対称性や大統一粒子な

*4 ただし準相対論的な粒子 ($m_i \sim T$) の寄与が効いてくるとこの表式から外れてくる。

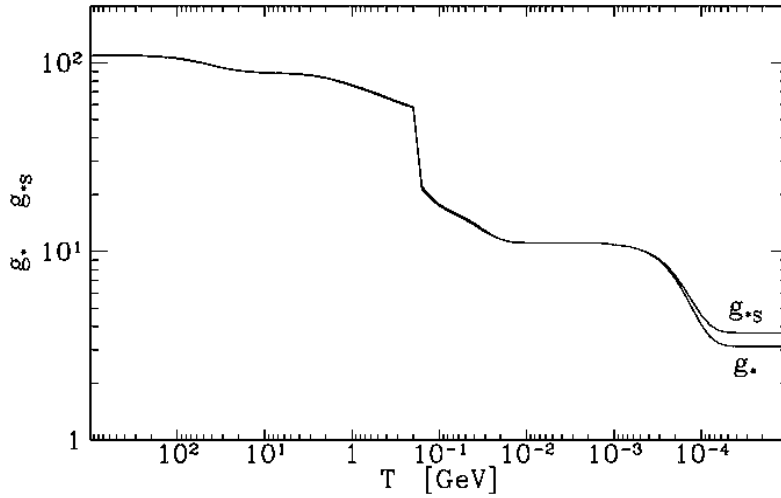


図 A.1 標準模型での g_* と g_{*S} の温度依存性

どがある場合はそれらの粒子の自由度もさらに必要である。ビッグバン元素核合成より少し前の時代 $100\text{MeV} \gtrsim T \gtrsim 1\text{MeV}$ では、光子の他に電子と陽電子、ニュートリノ 3 世代分が相対論的であり、 $g_* = 10.75$ を得る。この少し後の時代にニュートリノと他の粒子との相互作用が宇宙膨張の効果に負け、熱浴から離脱 (decouple) する。さらにその後の時代に電子が非相対論的になり、 $T \ll 1\text{MeV}$ では $g_* = 3.36$ となる。これが現在の値である*⁵。この時、後ほど A.3 節で議論するが、エントロピー保存によって電子のエントロピーが光子に移り、光子の温度 T とニュートリノの温度 T_ν がずれ、 $T_\nu = (4/11)^{1/3}T$ となる。標準模型における $g_* = g_*(T)$ のグラフを図 A.1 に与えておく。

宇宙の全エネルギーが $\rho = \rho_R$ であるような輻射優勢期の宇宙膨張は Friedmann 方程式 (A.39) によって決まるので、(A.39) に (A.41) を代入し、Hubble パラメータについて解くと

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_*} \frac{T^2}{M_{pl}} = 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_{pl}} \quad (\text{A.44})$$

を得る。さらに、輻射優勢時は $a(t) \propto t^{1/2}$ で振る舞うために、これを (A.44) に代入して t について解くと

$$t = \sqrt{\frac{45}{16\pi^3 g_*}} \frac{M_{pl}}{T^2} = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{M_{pl}}{T^2} \quad (\text{A.45})$$

*⁵ ただしこの現在の値を用いた全エネルギー密度が現在の宇宙の全エネルギー密度とはならない。(A.41) が有効であるのは平衡状態にある粒子に対してであり、平衡状態から離脱した粒子に対してのエネルギー密度は別に考えなくてはならない。事実、相互作用しなくなった粒子が非相対論的 (物質的) になっても、宇宙に存在する粒子の数が変わらなくなるためにエネルギー密度の減衰の仕方は単に膨張した体積に反比例 ($\propto a^{-3}(t)$) する。しかし輻射のエネルギー密度は、体積的に薄まることに加え波長も伸びることが起因し、さらに 1 次元付加的に減衰が早くなる ($\propto a^{-4}(t)$)。もちろん現在の観測では輻射よりも物質的なエネルギー密度が優勢であるし、さらにそれよりも真空のエネルギー密度が優勢である。

を得る。 $M_{pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV, $1 \text{ GeV}^{-1} = 6.58 \times 10^{-25}$ sec を用いれば, この式から

$$t = \frac{2.42}{\sqrt{g_*}} \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec} \quad (\text{A.46})$$

と, 1 MeV が宇宙誕生後およそ 1 秒に対応することが示される。

A.3 エントロピー

A.3.1 宇宙のエントロピー保存則

エネルギー・運動量テンソルが $T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$ で与えられる宇宙でのエネルギー保存則 $\nabla_{\mu} T^{\mu 0} = 0$ からは

$$0 = (\rho a^3)' + p(a^3)' \quad (\text{A.47})$$

が得られるが, 一様等方的な宇宙ではこれは

$$0 = d[\rho V] + p dV \quad (\text{A.48})$$

を意味している。ただし $V = a^3$ である。ここで熱力学第 2 法則

$$T dS = d[\rho V] + p dV \quad (\text{A.49})$$

(S はエントロピー) と併せて考えると $dS = 0$ となり, 平衡状態の宇宙ではエントロピーは保存することが示される*6。

これからエントロピーが他の熱力学量を用いてどのように表されるかを導く。今, エントロピーを $S = S(T, V)$ と温度と体積の関数で表すと, エネルギー密度が $\rho = \rho(T)$ と温度の関数であると考えれば,

$$dS = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} dT + \frac{\rho + p}{T} dV \quad (\text{A.52})$$

$$= \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (\text{A.53})$$

と書き表される。さらに S に可積分条件

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (\text{A.54})$$

*6 ただし今の場合は化学ポテンシャル μ がゼロの場合で, 化学ポテンシャルを含めて議論する場合は (A.49) を

$$T dS = d[\rho V] + p dV - \mu d[nV] \quad (\text{A.50})$$

で考えればよく, 従って (A.48) のもとでエントロピー則は

$$dS = -\frac{\mu}{T} d[nV] \quad (\text{A.51})$$

となる。宇宙の歴史の多くの場合で $|\mu| \ll T$ となっているために, 粒子数の変化があまり大きくない限りはエントロピー保存はよい近似で成り立つと思われる。

を課すと,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\rho + p}{T} \quad (\text{A.55})$$

を得る。ただし圧力も温度の関数 $p = p(T)$ であるとしている。(A.49) は

$$TdS = d[(\rho + p)V] - Vdp \quad (\text{A.56})$$

とも書き表すことができるので, これに (A.55) に代入すると

$$dS = \frac{1}{T} \left(d[(\rho + p)V] - \frac{(\rho + p)V}{T} dT \right) \quad (\text{A.57})$$

$$= d \left[\frac{(\rho + p)V}{T} \right] \quad (\text{A.58})$$

が得られる。従って共動体積中のエントロピーは $S = (\rho + p)a^3/T$ と表させれる^{*7}。

A.3.2 エントロピー密度

次にエントロピー密度 s を定義しておく:

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} \quad (\text{A.60})$$

従って, 相対論的な粒子のエネルギー密度や圧力が T^4 に比例したのに対し, エントロピー密度は T^3 に比例し,

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g T^3 \quad (\text{A.61})$$

となる。総エントロピー密度を求めるために, 相対論的な 1 自由度のボソンのエントロピー $s_{\text{rela.}} = \frac{2\pi^2}{45} T^3$ で規格化された次の量

$$g_{*S} \equiv \sum_{i=\text{all species}} \frac{s_i}{s_{\text{rela.}}} = \sum_{i=\text{all species}} \left(\frac{45}{2\pi^2} \frac{s_i}{T^3} \right) \quad (\text{A.62})$$

を定義しておく。この量を用いると総エントロピー密度は

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 \quad (\text{A.63})$$

と表すことができる。この表式とエントロピー密度 sa^3 が保存することにより, $T \propto g_{*S}^{-1/3} a^{-1}$ が言える。 g_{*S} に関して, 総エネルギー密度の表式を得た時と同様な議論によ

^{*7} 化学ポテンシャルが存在する場合は, $\mu = \mu(T)$ と考え, さらに上述しことと同様の議論を行うことにより

$$S = \frac{(\rho + p - \mu n)a^3}{T} \quad (\text{A.59})$$

の表式が得られる。

り，非相対論的な粒子の寄与は無視できるので，相対論的な粒子の寄与だけでよい近似となる。従って

$$g_{*S} \sim \sum_{\substack{i = \text{rela.} \\ \text{bosons}}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i = \text{rela.} \\ \text{fermions}}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (\text{A.64})$$

となる。注目すべきこととして， g_* では T^4 の寄与だったのに対し， g_{*S} は T^3 の寄与になっている。従ってそれぞれの粒子の温度が同じときは g_* と g_{*S} は一致するが，温度が異なってくると値がずれてくる。

実際に現在の光子の温度 T とニュートリノの温度 T_ν とは異なっていることを示しておく。宇宙の温度が $T \sim 1$ MeV 程の時代では，粒子としては光子 ($g = 2$) と電子・陽電子 ($g = 4$)，そしてニュートリノ・反ニュートリノ 3 世代分 ($g = 6$) が相対論的自由度を担っている。ニュートリノは $T \sim 1$ MeV ほどで宇宙膨張の効果が相互作用の効果よりも強くなり，熱浴から離脱する*⁸。このときはまだ $T = T_\nu$ である。その後，電子・陽電子が対消滅をし始め数が減る。この時，エントロピー保存により電子のエントロピーが光子に移る。このために光子の温度がニュートリノの温度に比べ上昇する。なお，ニュートリノは熱浴から離脱しているので影響を受けない。電子の対消滅時期の前と後の時刻をそれぞれ t_b, t_a とすると，エントロピーの表式 (A.59) から

$$\left(2 + \frac{7}{8} \times 4 \right) \times T^3(t_b) a^3(t_b) = 2 \times T^3(t_a) a^3(t_a) \quad (\text{A.66})$$

$$\therefore T(t_a) a(t_a) = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} T(t_b) a(t_b) \quad (\text{A.67})$$

を得る。また $T \propto a^{-1}$ であることから， $T_\nu(t) a(t)|_{\text{now}} = T_\nu(t_b) a(t_b) = T(t_b) a(t_b)$ ， $T(t) a(t)|_{\text{now}} = T(t_a) a(t_a) = (11/4)^{1/3} T(t_b) a(t_b)$ より

$$\frac{T_\nu}{T} \Big|_{\text{now}} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \quad (\text{A.68})$$

であることがわかる。現在の光子の温度は $T = 2.725$ K であるから，ニュートリノの温度は $T_\nu = 1.945$ K であることが期待される。またこの関係から，現在の g_{*S} の値は

$$g_{*S}|_{\text{now}} = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \frac{4}{11} = 3.91 \quad (\text{A.69})$$

*⁸ ニュートリノは熱浴から離脱してもその系自体は平衡状態を保つ。熱浴から離脱した時の時刻を t_D とすると，その後のニュートリノのエネルギーは波長が伸びていくことで a^{-1} で落ちていき， $E(t) = E(t_D) a(t_D) / a(t)$ となる。従ってこれを熱浴から離脱したときの分布関数に代入すると

$$f(E(t_D)) = \left[\exp \left(\frac{E(t) a(t)}{a(t_D) T(t_D)} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{A.65})$$

となる (ただし化学ポテンシャルは無視している)。従って分布関数は以後このように時間変化していくが，しかしながらこれは温度を $T(t) = T(t_D) a(t_D) / a(t)$ と採ることで再度平衡状態での分布関数を再現する。従って熱浴からの離脱後も (相対論的な) ニュートリノは $T \propto a^{-1}$ の関係にある。

と求められる。

なお，標準模型での $g_{*S} = g_{*S}(T)$ のグラフを以前の図 A.1 にて示しておいた。グラフからも分かるように電子・陽電子の対消滅前までは g_* と g_{*S} は同じ値で，高温宇宙 ($T \gtrsim 1\text{MeV}$) での両者の区別の必要はあまりない。

A.3.3 エントロピーと粒子数

エントロピー密度が a^3 に比例するために，宇宙の粒子数を評価する際には粒子数密度をエントロピー密度で割った次の量

$$Y \equiv \frac{n}{s} \quad (\text{A.70})$$

を用いるのが便利である。平衡状態での相対論的な粒子 ($T \gg m, \mu$) に対しては

$$Y = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*S}} = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*S}} \quad (\text{A.71})$$

と，定数になる。ただし g_{eff} はボソンに対しては $g_{\text{eff}} = g$ ，フェルミオンに対しては $g_{\text{eff}} = \frac{3}{4}g$ を採る。一方，非相対論的な粒子 ($(T \ll m)$) に対しては

$$Y = \frac{45}{4\sqrt{2}\pi^{7/2}} \frac{g}{g_{*S}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m-\mu}{T}\right] \quad (\text{A.72})$$

$$= 0.145 \frac{g}{g_{*S}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m-\mu}{T}\right] \quad (\text{A.73})$$

となるが，平衡状態から離脱し，相互作用しなくなった粒子に対しては，単に宇宙膨張の効果で a^3 に比例して数密度は減っていくために，崩壊など粒子数が変化することがなければ $Y = n/s$ はやはり保存する。

特に，観測量であるバリオン数/フォトン数比 η に対して，宇宙の発展での粒子の対消滅によってエントロピーの受け渡しが起こるため，バリオン数を光子で規格化するよりも，次のように宇宙の発展でのよい保存量になっているエントロピー密度で規格化しておくのが便利である：

$$\begin{aligned} B \equiv \frac{n_B}{s} &= \frac{n_\gamma}{s} \eta \Big|_{\text{now}} = \frac{45\zeta(3)}{\pi^4} \frac{\eta_{(\text{now})}}{g_{*S(\text{now})}} \\ &= \frac{45\zeta(3)}{\pi^4} \frac{6.19 \times 10^{-10}}{3.91} = 8.79 \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

この量は，バリオン数が変化しない，かつ急な粒子数変化によってエントロピーが生成されない限りは保存するので，多くの場合でバリオン数生成からの制限の議論に使える。

付録 B

平均正味 $B - L$ 数の計算

この章では 6.2 節で与えられた平均正味 $B - L$ 数

$$\epsilon_i = \sum_f x_{i \rightarrow f} (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \quad (\text{B.1})$$

の計算を行う。

まず (B.1) を簡単化する。終状態は異なるが生成される $B - L$ 数は同じであるグループを G とする。このとき、始状態 i から終状態 g への G 内での分岐比の和には次の関係がある：

$$\sum_{g \in G} r_{i \rightarrow g} = 1 - \sum_{f \notin G} r_{i \rightarrow f} \quad (\text{B.2})$$

従って (B.1) は (B.2) を用いると

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \sum_{g \in G} x_{i \rightarrow g} (r_{i \rightarrow g} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{g}}) + \sum_{f \notin G} x_{i \rightarrow f} (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \\ &= - \sum_{f \notin G} x_{i \rightarrow g} (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) + \sum_{f \notin G} x_{i \rightarrow f} (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \\ &= \sum_{f \notin G} (x_{i \rightarrow f} - x_{i \rightarrow g}) (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

と変形できる。それ故に、 ϵ_i の計算ではすべての分岐比を計算する必要はなく、あるグループ G を 1 つ選び、それ以外のグループの分岐比のみを計算すればよい。

我々の場合、 G のグループとしては 2 体崩壊と 3 体崩壊 (以後、数式内ではそれぞれ $2bd.$, $3bd.$ として表す) の 2 つのグループがあるが、これらはそれぞれ次元 4 と 5 の相互作用によって引き起こされている。ここでは G として 3 体崩壊を選ぶことにする*¹。表 6.1 で表されているように、すべての粒子の種類 i に対して $x_{i \rightarrow 2bd.} - x_{i \rightarrow 3bd.} = 2$ であ

*¹ G として 2 体崩壊を選んでも同じ結果が得られる。その場合、終状態が 3 体崩壊になる代わりに、平均正味 $B - L$ 数の評価が 1 ループ計算になる。

るので、この場合に ϵ_i は (B.3) から

$$\epsilon_i = 2 \sum_{f \in 2bd.} (r_{i \rightarrow f} - r_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) \quad (\text{B.4})$$

$$= 2 \sum_{f \in 2bd.} (\Gamma_{i \rightarrow f} - \Gamma_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}) / \Gamma_i \quad (\text{B.5})$$

と表される。ここで $\Gamma_{i \rightarrow f}$ は部分崩壊幅、また Γ_i は粒子 i の全崩壊幅を表し、

$$\Gamma_i \equiv \sum_f \Gamma_{i \rightarrow f} = \sum_f \Gamma_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}} \quad (\text{B.6})$$

で定義される。

次に部分崩壊幅の差 $\Gamma_{i \rightarrow f} - \Gamma_{\bar{i} \rightarrow \bar{f}}$ を求める。2 体崩壊で、さらに終状態の粒子の質量が 0 である場合の部分崩壊幅は

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{16\pi m_i} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \quad (\text{B.7})$$

で与えられる。ただし m_i は粒子 i の質量で、 \mathcal{M} は不変散乱振幅である。ここで次の Feynman 則

$$i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \text{ (SM)} \\ \searrow b \text{ (SM)} \end{array} = -iy_{iab} \quad , \quad i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \text{ (SM)} \\ \rightarrow b \text{ (SM)} \\ \searrow h_D \text{ or } h_D^\dagger \end{array} = -i \frac{\lambda_{iab}}{\Lambda}$$

を使うと (ただし $SU(3)$ や $SU(2)$ の脚は省略している)、不変散乱振幅は次のように計算できる：

$$|\mathcal{M}_{i \rightarrow ab}|^2 = \left| i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} + i \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow a \\ \rightarrow c \\ \searrow d \\ \text{--- } h_D \end{array} + \dots \right|^2 \quad (\text{B.8})$$

$$= 2(p_a \cdot p_b) \left| y_{iab} + \sum_{j,c,d} y_{jac} \frac{\lambda_{icd}}{\Lambda} \frac{\lambda_{jdb}^*}{\Lambda} c_{jcd} \mathcal{F}(m_i, m_j) + \dots \right|^2 \quad (\text{B.9})$$

$$= m_i^2 \left[|y_{iab}|^2 + 2\text{Re} \sum_{j,c,d} y_{iba}^* y_{jac} \frac{\lambda_{icd}}{\Lambda} \frac{\lambda_{jdb}^*}{\Lambda} c_{jcd} \mathcal{F}(m_i, m_j) + \dots \right] \quad (\text{B.10})$$

ここで c_{jcd} はループを回り得る粒子の内部自由度の数で、一般にはループの種類ごとに異なる。また $\mathcal{F}(m_i, m_j)$ はループ積分を含んだ、重い粒子の質量に関するある関数である。加えて、標準模型フェルミオンに対する添字が対称であることを用いて、初めの湯川結合の添え字は転置させている。一方で、粒子 i に対する反粒子 \bar{i} の崩壊に対する不変

散乱振幅は，粒子 i での散乱振幅での結合定数を複素共役化させたものになる：

$$|\mathcal{M}_{\bar{i} \rightarrow \bar{a}\bar{b}}|^2 = m_i^2 \left[|y_{iab}|^2 + 2\text{Re} \sum_{j,c,d} y_{iba} y_{jac}^* \frac{\lambda_{icd}^*}{\Lambda} \frac{\lambda_{jdb}}{\Lambda} c_{jcd} \mathcal{F}(m_i, m_j) + \dots \right] \quad (\text{B.11})$$

(B.7), (B.10) そして (B.11) を用いると，部分崩壊幅の差は

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i \rightarrow ab} - \Gamma_{\bar{i} \rightarrow \bar{a}\bar{b}} \\ &= \frac{1}{16\pi m_i} \left(|\mathcal{M}_{i \rightarrow ab}|^2 - |\mathcal{M}_{\bar{i} \rightarrow \bar{a}\bar{b}}|^2 \right) \\ &= -\frac{m_i}{4\pi} \sum_{j,c,d} c_{jcd} \text{Im} \left(y_{iba}^* y_{jac} \frac{\lambda_{icd}}{\Lambda} \frac{\lambda_{jdb}^*}{\Lambda} \right) \text{Im} \mathcal{F}(m_i, m_j) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

と求められる。ここで $\text{Im} \mathcal{F}$ は

$$\text{Im} \mathcal{F} = -\frac{m_i^2}{2(8\pi)^3} f(m_j^2/m_i^2), \quad (\text{B.13})$$

で与えられる関数で， f は (6.9) で定義された関数である。ここで特に，関数 \mathcal{F} 自体はループ積分によって発散しているのだが， $\text{Im} \mathcal{F}$ は有限になっている点に注目すべきである。なぜならば，この計算結果は 2 ループ部分の虚数部分に比例しており，このダイアグラムに Cutkosky 則を用いればツリーダイアグラムの計算に帰着することがわかり，発散がないことが理解できる。

最終的に，(B.3), (B.12) そして (B.13) を用いることにより，平均正味 $B-L$ 数が

$$\epsilon_i = \frac{2}{(8\pi)^3} \frac{m_i^2}{\Lambda^2} \frac{m_i}{16\pi\Gamma_i} \sum_{j,a,\dots,d} c_{iab} c_{jcd} \text{Im} (y_{iab}^* y_{jbc} \lambda_{icd} \lambda_{jda}^*) \cdot f(m_j^2/m_i^2) \quad (\text{B.14})$$

と求められる。ここで現れた c_{iab} は $i \rightarrow a+b$ の終状態の和によって生じる， $a+b$ の採り得る自由度の数を表す。

参考文献

- [1] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
- [2] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [3] A. D. Sakharov, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5**, 32 (1967) [*JETP Lett.* **5**, 24 (1967 SOPUA,34,392-393.1991 UFNAA,161,61-64.1991)].
- [4] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, *Phys. Lett. B* **199**, 251 (1987).
- [5] H. Davoudiasl, R. Kitano, G. D. Kribs, H. Murayama and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 201301 (2004) [hep-ph/0403019].
- [6] M. Yoshimura, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 281(1978) [Erratum-ibid. **42**, 746 (1979)]; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 850(1979); M. Yoshimura, *Phys. Lett. B* **88**, 294 (1979); D. V. Nanopoulos and S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **20**, 2484 (1979).
- [7] S. Dimopoulos, L. Susskind, *Phys. Rev. D* **18**, 4500(1978). D. Toussaint, S. B. Treiman, F. Wilczek, A. Zee; *Phys. Rev. D* **19**, 1036(1979).
- [8] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
- [9] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, arXiv:0812.1594 [hep-ph].
- [10] J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. B* **260**, 131 (1991); P. Langacker and M. -x. Luo, *Phys. Rev. D* **44**, 817 (1991); U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, *Phys. Lett. B* **260**, 447 (1991).
- [11] P. Langacker, *Phys. Rept.* **72**, 185 (1981); P. Langacker, "Grand unification and the standard model," In *Gatlinburg 1994, Proceedings, Radiative corrections* 415-437, and Pennsylvania U. Philadelphia - UPR-0639T (94/11,rec.Nov.) 24 p. (501143) [hep-ph/9411247].
- [12] H. Nishino *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], *Phys. Rev. D* **85**, 112001 (2012) [arXiv:1203.4030 [hep-ex]].
- [13] J. A. Harvey, E. W. Kolb, D. B. Reiss and S. Wolfram, *Nucl. Phys. B* **201**, 16 (1982).
- [14] V.A. Kuzmin, V.A. Rubakov, M.A. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155**, 36 (1985).
- [15] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984).

- [16] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [17] N. S. Manton, Phys. Rev. D **28**, 2019 (1983).
- [18] P. B. Arnold and L. D. McLerran, Phys. Rev. D **36**, 581 (1987).
- [19] L. Carson and L. D. McLerran, Phys. Rev. D **41**, 647 (1990).
- [20] L. Carson, X. Li, L. D. McLerran and R. -T. Wang, Phys. Rev. D **42**, 2127 (1990).
- [21] J. Ambjorn, M. L. Laursen and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **316**, 483 (1989). J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **244**, 479 (1990).
- [22] P. B. Arnold, D. Son and L. G. Yaffe, Phys. Rev. D **55**, 6264 (1997) [hep-ph/9609481].
- [23] D. Bodeker, G. D. Moore and K. Rummukainen, Phys. Rev. D **61**, 056003 (2000) [hep-ph/9907545].
- [24] J. A. Harvey and M. S. Turner, Phys. Rev. D **42**, 3344 (1990).
- [25] S. Weinberg, "COSMOLOGY", Oxford University, (2008).
- [26] A. G. Cohen, D. B. Kaplan and A. E. Nelson, Phys. Lett. B **245**, 561 (1990); A. G. Cohen, D. B. Kaplan and A. E. Nelson, Nucl. Phys. B **349**, 727 (1991).
- [27] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Usp. Fiz. Nauk **166**, 493 (1996) [Phys. Usp. **39**, 461 (1996)] [arXiv:hep-ph/9603208].
- [28] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716**, 1 (2012) [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [29] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **716**, 30 (2012) [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].
- [30] R. Barate *et al.* [LEP Working Group for Higgs boson searches and ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL Collaborations], Phys. Lett. B **565**, 61 (2003) [hep-ex/0306033].
- [31] I. Affleck, M. Dine, Nucl. Phys. B **249**, 361 (1985).
- [32] M. Dine, L. Randall and S. D. Thomas, Nucl. Phys. B **458**, 291 (1996) [hep-ph/9507453].
- [33] A. D. Dolgov, Phys. Rept. **222**, 309 (1992).
- [34] M. Fukugita, T. Yanagida, Phys. Lett. B **174**, 45(1986).
- [35] W. Buchmuller, R. D. Peccei and T. Yanagida, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **55**, 311 (2005) [hep-ph/0502169].
- [36] S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir, Phys. Rept. **466**, 105 (2008) [arXiv:0802.2962 [hep-ph]].
- [37] P. Minkowski, Phys. Lett. B **67**, 421 (1977).
- [38] T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **64**, 1103 (1980).
- [39] S. L. Glashow, in quarks and leptons. *Cargèse Lectures, Plenum, NY*, page 687

(1980).

- [40] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Phys. Rev. D* **23**, 165 (1981).
- [41] M. Magg and C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **94**, 61 (1980).
- [42] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Phys. Rev. D* **22**, 2227 (1980).
- [43] C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* **187**, 343 (1981).
- [44] G. Lazarides, Q. Shafi and C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* **181**, 287 (1981).
- [45] R. Foot, H. Lew, X. G. He and G. C. Joshi, *Z. Phys. C* **44**, 441 (1989).
- [46] E. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1171 (1998) [hep-ph/9805219].
- [47] E. Ma and D. P. Roy, *Nucl. Phys. B* **644**, 290 (2002) [hep-ph/0206150].
- [48] J. A. Casas and A. Ibarra, *Nucl. Phys. B* **618**, 171 (2001) [hep-ph/0103065].
- [49] S. Davidson and A. Ibarra, *Phys. Lett. B* **535**, 25 (2002) [hep-ph/0202239].
- [50] S. Enomoto and N. Maekawa, *Phys. Rev. D* **84**, 096007 (2011) [arXiv:1107.3713 [hep-ph]].
- [51] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1566 (1979); *Phys. Rev. D* **22**, 1694 (1980); F. Wilczek, A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **43** 1571 (1979).
- [52] N. Sakai, T. Yanagida, *Nucl. Phys. B* **197**, 533(1982); S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **26**, 287(1982).
- [53] E. W. Kolb and M. S. Turner, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **33**, 645 (1983); E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe”, Westview Press, (1990).
- [54] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3195 (1994); L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. D* **56**, 3258 (1997)
- [55] M. Fukugita, T. Yanagida, *Phys. Rev. D* **42**, 1285 (1990); B.A. Campbell, S. Davidson, J. Ellis, K.A. Olive, *Phys. Lett. B* **256**, 457 (1991); *Astroparticle Phys.* **1**, 77(1992).
- [56] N. Maekawa, *Prog. Theor. Phys.* **106**, 401-418 (2001); **107**, 597-619 (2002); N. Maekawa and T. Yamashita, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 1201-1233 (2002).
- [57] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1303 (1982); I. V. Falomkin, G. B. Pontecorvo, M. G. Sapozhnikov, M. Y. Khlopov, F. Balestra and G. Piragino, *Nuovo Cim. A* **79** (1984) 193 [*Yad. Fiz.* **39** (1984) 990]; M. Y. Khlopov and A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **138** (1984) 265; J. R. Ellis, J. E. Kim and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. B* **145**, 181 (1984).
- [58] E. W. Kolb and S. Wolfram, *Nucl. Phys. B* **172**, 224 (1980) [Erratum-ibid. *B* **195**, 542 (1982)].