

物質の密度揺らぎに対する暗黒エネルギーの影響

名古屋大学大学院理学研究科
素粒子宇宙物理学専攻 QG 研究室
学生番号: 461001209
松本 路朗

2013 年 2 月 5 日

概要

1990年代における Ia 型超新星の観測により、一様等方な宇宙を仮定するならば現在の宇宙は加速膨張をしているという事実が明らかとなった。しかし、通常のアインシュタイン方程式ではその加速膨張を説明することは出来ない。そのため、その加速膨張を説明するための方法として、重力理論の修正や暗黒エネルギーの導入が提案されている。その中で最も有名なものが Λ CDM 模型である。 Λ CDM 模型とはアインシュタイン方程式に宇宙項 (Λ) を加え、非相対論的な暗黒物質 (CDM) を導入したものであるが、その宇宙項の値を適当に決めると種々の観測結果と一致することが知られている。しかしながら、その宇宙項の値を量子場の零点エネルギーとして解釈すると、そこには数十桁もの差が生まれてしまう。それは微調整問題と呼ばれ、他の模型を考える動機となっている。一方、スカラー場を用いた暗黒エネルギーの模型や、修正重力理論によっても同じような宇宙の進化を記述できることが知られている。これらの模型におけるパラメーターの微調整は Λ CDM 模型程あるわけではないが、現在の観測的制限を満たすために模型に入っているパラメーターの数は多くなっている。そのため、どのような宇宙の進化でも記述できるような模型も作ることもできる場合もある。それはある意味魅力的ではあるが、どの模型が正しいのかという検証を出来る可能性を失わせている。

そこで、宇宙の背景時空の発展だけでなく摂動の一次まで考慮した検証が必要となる。そのため本論文では物質の密度揺らぎの発展を、 Λ CDM 模型、 k エッセンス模型、 $F(R)$ 修正重力理論、それぞれについて調べた。その結果、背景時空の発展が同じであっても物質の密度揺らぎの発展が変わりうるということが明らかとなった。

目次

1	導入	2
2	宇宙の背景時空の発展	5
2.1	運動項のみの k エッセンス模型	5
2.2	一般的な k エッセンス模型	9
2.3	リコンストラクション	9
2.4	物質を含まないときの安定性	10
2.5	物質を含むときの安定性	12
2.6	第二節のまとめ	17
3	物質の密度揺らぎの発展	18
3.1	宇宙論的摂動論への導入	18
3.2	Λ CDM 模型における宇宙論的摂動論	19
3.3	サブホライズン近似と厳密な方程式	20
3.4	Λ CDM 模型での物質の密度揺らぎのまとめ	23
3.5	k エッセンス模型における宇宙論的摂動論	24
3.6	近似を用いない線型方程式	28
3.7	振動	37
3.8	k エッセンス模型における物質の密度揺らぎの性質のまとめ	38
3.9	F(R) 重力理論における宇宙論的摂動論	39
3.10	近似を用いた解析とその応用	40
3.11	4 次の微分方程式からの解析	44
3.12	F(R) 重力理論における物質の密度揺らぎのまとめ	49
4	結論	50
付録 A	四次の微分方程式の導出	51

1 導入

アインシュタインが一般相対性理論を発表したのは、1915年の事であった。そのころ、宇宙は定常であるのか、膨張しているのかそれとも収縮しているのか、それすらはっきりとはしていなかったが、宇宙が一様等方であるときのアインシュタイン方程式は膨張、もしくは収縮することを示していた。そこで、宇宙は定常であると信じていたアインシュタインは、宇宙項 (Λ) を導入することになる。しかし 1929 年ごろ、ハッブルらによって宇宙が膨張していることを示されたのである [1]。それはスペクトル分光によって、銀河の後退速度を測った結果であり、遠方の銀河ほど、遠ざかる速度が速いという比例則を示していた。その比例定数がハッブル比 $H = \dot{a}/a$ である。このことから、宇宙項 (Λ) の必要は無くなり、忘れ去られることとなる。

1998 年になると観測精度が向上し、Ia 型超新星の観測から、ハッブル比が精密に測られるようになった。その結果、ハッブル比 H は定数ではなく時間変化しているということが導かれた [2] [3]。特に、その時間変化の仕方は宇宙が単なる膨張ではなく、現在加速膨張していることを示しており、普通のアインシュタイン方程式では、“加速”膨張は記述できないことから、何らかの修正が必要になることを示唆していた。

その修正の方法は大きく分けて二通りである。一つは、アインシュタイン方程式の左辺の時空の幾何を表す部分を変えること。二つ目は、アインシュタイン方程式の右辺のエネルギーを表す部分を変えることである。前者は修正重力理論などと呼ばれており、 $F(R)$ 重力理論 [4, 5, 6, 7, 8] やスカラー-テンソール理論 [9, 10, 11]、ガウス-ボンネ重力など [12] の例がある。後者はダークエネルギーと呼ばれており、 Λ CDM 模型、クインテッセンス模型 [13, 14, 15, 16]、 k エッセンス模型 [17, 18, 19] などがこれに当たり、現在の標準理論と呼ばれているものはこの Λ CDM 模型と呼ばれるものである。 Λ CDM 模型とは、以前にアインシュタインが行ったように、宇宙項 (Λ) を方程式に加え、私達が知っている物質以外に、非相対論的な暗黒物質 (CDM) を導入したものである。この Λ CDM 模型はその Λ の値を適当に ($\rho_\Lambda \sim 10^{-3}\text{GeV}^4$) 決めることによって、種々の観測事実と一致することが知られている。例えば宇宙マイクロ波背景放射 [20][21]、銀河分布 [22]、Ia 型超新星 [23]、クエーサーの重力レンズ効果の観測 [24] などがある。ただし、この Λ の値は理論的解釈とは一致しない。それは、この宇宙項を量子場の零点エネルギーと解釈すると数十桁もの不一致が生じるためである。これは、微調整問題と呼ばれ、宇宙論における大きな問題の一つである。

一方で今までに述べた、修正重力理論やダークエネルギーの模型は、パラメータの値

の微調整はあるものの通常はそのような何十桁もの微調整は含んではない。ただし、 Λ CDM 模型がパラメーターの数が一つであるのに対して、これらの模型ではいくつものパラメータがあるために、そのような微調整の緩和が出来るのも当然といえるかもしれない。また、パラメータがたくさんあるために、任意の宇宙の時間発展を実現することのできる模型もある。この任意の宇宙の時間発展を記述できるように模型をつくる手法をリコンストラクション [25, 26] というが、本論文の第二節で紹介するのは、 k エッセンス模型を例としたリコンストラクション [37] である。

k エッセンス模型は元々は、インフレーションを説明する模型として提案されていた。この模型の利点としては、スローロールインフレーション模型と同じような、インフレーションが再現できること、弦理論からその作用が導出されることが期待されるということ、などであった。 k エッセンス模型の前身である k インフレーション模型 [27, 28] の特徴としては、その作用に運動項 (*kinetic term*) は含むがポテンシャル項を含まないことにあった。しかし現在、一般化された模型である、 k エッセンス模型では運動項もポテンシャル項も含む形、 $p(\phi, X)$ 、 $X \equiv \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ などと表記され、クインテッセンス模型やタキオン模型 [29, 30, 31, 32]、ゴースト凝縮模型 [33, 34] を含むような、単一スカラー場として統一的な模型として扱われることが多い。この k エッセンス模型の特徴は、 X の高次の項が作用に現れてくることである。

しかし、リコンストラクションができるということは、宇宙の膨張史だけからではどの模型が正しいのかを見分けることができないことを意味している。そこで、第三節ではアインシュタイン方程式の一次摂動の式を考えることによって、それぞれの模型に違いが見えてくるかどうかを調べている。このアインシュタイン方程式の一次摂動を考えるということは、宇宙の観測という視点から見ると、物質の密度揺らぎ、つまり銀河団の粗密の構造がどのように時間発展するか、を調べることに対応している。この宇宙の大規模構造の時間発展から暗黒エネルギーの模型に制限をつけようという試みは、L. Guzzo ら [38] などによって行われているが、現在までのところ、まだ誤差が多いために模型を棄却するまでには至っていない。ただし、今後計画されている SuMIRe HSC/PFS、DES、LSST、Euclid、PFS、WFIRST などの観測によって物質の密度揺らぎの時間発展が明確になり、模型が制限されていくことが期待される。また、比較的最近では、The WiggleZ Dark Energy Survey により、比較的近傍における物質の密度揺らぎの振る舞いが明らかとなっている [39]。

本研究では、物質の密度揺らぎの発展を理論的に再考察することによって、模型の間の差異を明らかにして行くことを目的としている。まず三節の最初には、現在の宇宙論の標準模型である Λ CDM 模型に関して物質の密度揺らぎの発展を調べ [40]、第二節でも触れ

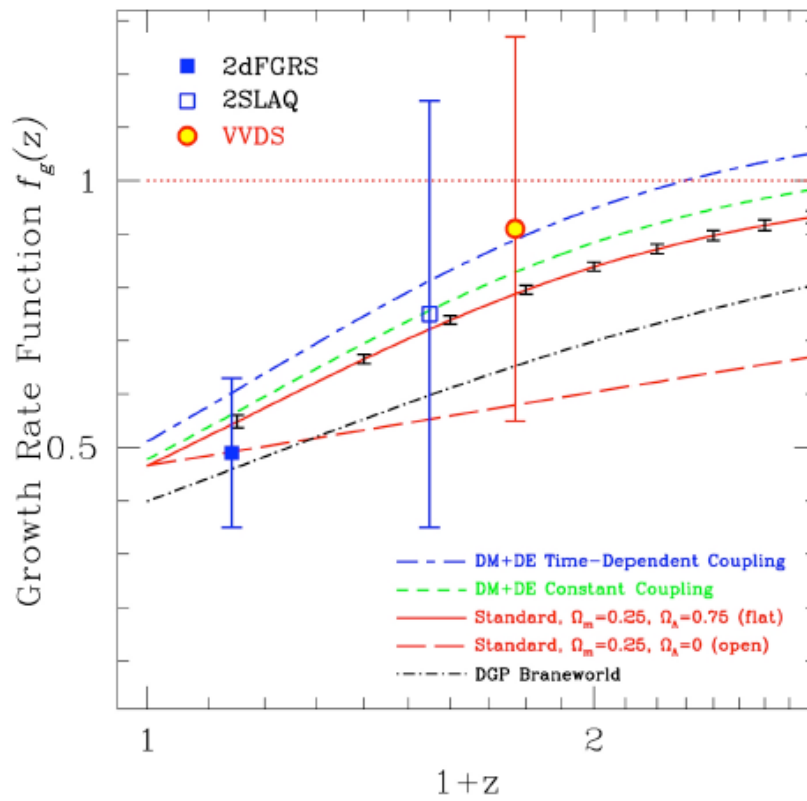


図1 様々な模型における物質の密度揺らぎの成長因子 (f) の赤方偏移 (z) 依存性と観測結果 [38]

た k エッセンス模型 [41]、修正重力の模型としてよく知られる $F(R)$ 重力理論について考察する。

2 宇宙の背景時空の発展

2.1 運動項のみの k エッセンス模型

2.1.1 リコンストラクションの方法

まず、以下の作用から始める。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - K(q(\phi) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) \right) \quad (2.1)$$

ここで K と q は適当な関数である。背景時空が平坦なロバートソン-ウォーカー計量を用いて、

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1,2,3} (dx^i)^2 \quad (2.2)$$

と表わされるとき、スカラー場 ϕ は時間 t のみに依る関数として考えることができる。更に、 ϕ の再定義は $q(\phi)$ の任意性を用いて $q(\phi)$ の再定義に吸収できるので、 ϕ を時間座標 t に同一視することができる。このとき、フリードマン-ルメートル (以下 FL) 方程式、

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2 = K(-q(t)) + 2K'(-q(t))q(t) \quad (2.3)$$

と ϕ の運動方程式:

$$0 = 2K''(-q(t))q(t)q'(t) - (6Hq(t) + q'(t))K'(-q(t)) \quad (2.4)$$

を得る。ここで H は $H = \dot{a}(t)/a(t)$ で定義されるハッブル比である。このとき式 (2.4) は

$$a^6(t) = \frac{1}{q(t)} \left(\frac{K_0}{K'(-q(t))} \right)^2 \quad (2.5)$$

と積分することができる。式 (2.3) を t について微分し、式 (2.5) を用いると、

$$\frac{6}{\kappa^2} H \dot{H} = -6HK_0 a(t)^{-3} \sqrt{q(t)} \quad (2.6)$$

を得る。この式を $q(t)$ について解けば、

$$q(t) = \frac{a(t)^6 (H'(t))^2}{\kappa^4 K_0^2} \quad (2.7)$$

となり、 $q(t)$ の形を陽に与える。また、式 (2.7) を t について解けば、ある関数 f を用いて、

$$t = f(q) \quad (2.8)$$

と表すことができる。このとき式 (2.5) を用いると、 $K'(-q)$ の形も下記のように陽に表すことができる。

$$K'(-q) = \frac{K_0}{\sqrt{q}} a(f(q))^{-3} \quad (2.9)$$

このとき $a = a(t)$ で与えられる、 a または H の任意の時間発展に対して、式 (2.7) と式 (2.9) が関数 K と q の形を与える。しかしながら式 (2.6) を見ればわかるように、 \dot{H} の符号を変えることができないことに注意しなければならない。つまりファントムで無い状態 ($\dot{H} < 0$) からファントム相 ($\dot{H} > 0$) への転移は起こらないのである。

2.1.2 リコンストラクションの適用

例として、状態方程式 (EoS) パラメーター w が定数であるような一種類の完全流体のみで満たされている宇宙を考える。このとき、スケールファクター a とハッブル比 H は定数 a_0 を用いて、

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad H = \frac{2}{t} \quad (2.10)$$

のように表される。式 (2.7) に代入すると、

$$q(t) = q_0 t^{\frac{4w}{1+w}}, \quad q_0 \equiv \frac{a_0^6}{\kappa^4 K_0^2} \left(\frac{2}{3(1+w)} \right)^2 \quad (2.11)$$

となり、式 (2.9) に代入すると、

$$K'(-q) = K_0 q_0^{-\frac{1}{2w}} a_0^{-3} q^{\frac{1}{2w} - \frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

を得る。式 (2.12) を積分すると、

$$K(-q) = K_1 - \frac{2w}{w+1} K_0 q_0^{-\frac{1}{2w}} a_0^{-3} q^{\frac{1+w}{2w}} \quad (2.13)$$

を得る。ここで K_1 は積分定数である。式 (2.11) を使うと、

$$K(-q) = K_1 - \frac{4w}{3(1+w)^2 \kappa^2 t^2}, \quad 2K'(-q)q = \frac{4}{3(1+w)\kappa^2 t^2} \quad (2.14)$$

となることから、式 (2.3) を満たすためには $K_1 = 0$ であればよいことが分かる。つまり、一種類の完全流体のみで満たされているような宇宙は、関数 $q(t)$ と $K(-q)$ を式 (2.11) と式 (2.13) および $K_1 = 0$ によって決めると、式 (2.1) の作用から導出されるのである。

式 (2.1) の作用を、状態方程式パラメーター w_i が定数であるような物質を含むように拡張しよう。このとき FL 方程式 (2.3) は、

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2 = K(-q(t)) + 2K'(-q(t))q(t) + \sum_i \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)} \quad (2.15)$$

と変更される。一方、 ϕ の運動方程式 (2.4) は変わらないので、式 (2.5) を再び得ることになる。また、式 (2.6) は、

$$\frac{6}{\kappa^2} H \dot{H} = -6HK_0 a(t)^{-3} \sqrt{q(t)} - \sum_i 3(1+w_i) \rho_{0i} H a^{-3(1+w_i)} \quad (2.16)$$

のように変更を受けるので、 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{a(t)^6 (H'(t) + \frac{\kappa^2}{2} \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)})^2}{\kappa^4 K_0^2} \quad (2.17)$$

のように与えられる。式 (2.17) は式 (2.7) と同様に $q(t)$ の形を陽に与える。また、式 (2.17) も前のときと同様にある関数 f を使って、時間 t について解くことができるので、式 (2.5) より $K'(-q)$ の形を、式 (2.9) で再び表すことができるのである。

2.1.3 Λ CDM 近似のスケールファクター

Λ CDM 模型から決まるスケールファクター、

$$a(t) = A \sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t] \quad (2.18)$$

を式 (2.17) と (2.12) に代入することで、リコンストラクションを行うと、関数 q と K が定数である、という結論を得る。これはアインシュタイン方程式に定数 Λ を加えることと等価であり、自明な結論である。しかし後で見るように、この作用 (2.1) の特別な場合として得られる、 Λ CDM 模型は、その解の振る舞いが不安定であるために現実的ではないことがわかる。次に非自明なリコンストラクションをするために、 Λ CDM 模型から少しだけずれたふるまいをするスケールファクターを考える。それは下記のようなものである。

$$a(t) = A \exp[\ln(\sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t]) + \epsilon f(t)] \quad (2.19)$$

ここで、 $A = (\frac{\rho_{0m}}{\Lambda})^{\frac{1}{3}}$ 、 $\alpha = \frac{\kappa}{2} \sqrt{3\Lambda}$ であり、それぞれ Λ CDM 模型の宇宙の時間発展を記述するような正の定数である。また、 f は t に依存する任意の関数、 ϵ は小さな定数であり、 $|\epsilon f| \ll 1$ を満たす。このとき、式 (2.17) より、

$$q(t) \sim \frac{\epsilon^2}{\kappa^4 K_0^2} \left(\frac{9}{4} \kappa^4 \rho_{0m}^2 f^2 - 3\kappa^2 \frac{\rho_{0m}^2}{\Lambda} \sinh^2[\alpha t] f f'' + \frac{\rho_{0m}^2}{\Lambda^2} \sinh^4[\alpha t] (f'')^2 \right) \quad (2.20)$$

を得る。ただし、 ϵ の高次の項は無視している。次に K の関数形を決めるためには、上の式を t について解く必要がある。しかしながら、 f の具体的な形がわからなければ、そ

の逆関数を求めることはできない。そこで簡単のために関数 f の形について次のようなものを考えてみることにする。

$$f(t) = \ln \left(\sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t] \right) \quad s.t. \quad a(t) = A(\sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t])^{1+\epsilon}, \quad (2.21)$$

$$f(t) = \beta t \quad s.t. \quad a(t) = A \exp[\epsilon \beta t] \sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t], \quad (2.22)$$

$$f(t) = \ln \left(\frac{t_1 - t}{t_0} \right)^\gamma \quad s.t. \quad a(t) = A \left(\frac{t_1 - t}{t_0} \right)^{\epsilon \gamma} \sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t], \quad (2.23)$$

$$f(t) = \ln \left(\sum_n a_n t^n \right) \quad s.t. \quad a(t) = A \left(\sum_n a_n t^n \right)^\epsilon \sinh^{\frac{2}{3}}[\alpha t] \quad (2.24)$$

ここで、 β 、 γ 、 t_0 、 t_1 、 a_n は任意定数である。例として、式 (2.21) の時には以下のようにリコンストラクションが行われる。まず、式 (2.20) を t について解くと、

$$t \sim \frac{1}{\alpha} \sinh^{-1} \left[\exp \left[-\frac{1}{2} + \frac{K_0}{\rho_{0m} \epsilon} \sqrt{q} \right] \right] \quad (2.25)$$

を得るので、式 (2.5) に代入して、

$$K(-q) \sim K_0 \frac{\Lambda}{\rho_{0m}} \int^q dq' q'^{-\frac{1}{2}} \left(\exp \left[-\frac{1}{2} + \frac{K_0}{\rho_{0m} \epsilon} \sqrt{q'} \right] \right)^{-2(1+\epsilon)} \quad (2.26)$$

積分すると、

$$K(-q) = K_1 - \frac{2w}{w+1} K_0 q_0^{-\frac{1}{2w}} a_0^{-3} q^{\frac{1+w}{2w}} \quad (2.27)$$

となる。ここで、 K_1 は積分定数である。これで、 Λ CDM に近い時間発展をするようなスケールファクターを与える、非自明な作用が構成できることが示された。

2.2 一般的な k エッセンス模型

一般的な k エッセンス模型の作用は下記のものである。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - K(\phi, X) + L_{\text{matter}} \right), \quad X \equiv \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (2.28)$$

この節では、この模型に対してリコンストラクションの手法を開発し、その安定性を見て行く。

2.3 リコンストラクション

作用が (2.28) のときの FL 方程式は、

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2 = 2X \frac{\partial K(\phi, X)}{\partial X} - K(\phi, X) + \rho_{\text{matter}}, \quad -\frac{1}{\kappa^2} (2\dot{H} + 3H^2) = K(\phi, X) + p_{\text{matter}}(t), \quad (2.29)$$

と与えられる。エネルギー密度 ρ_{matter} と p_{matter} は定数の状態方程式 (EoS) パラメーター w_i を用いて以下のように表される。

$$\rho_{\text{matter}} = \sum_i \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)}, \quad p_{\text{matter}} = \sum_i w_i \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)} \quad (2.30)$$

関数の任意性を用いて $\phi = t$ と選ぶと、式 (2.29) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} K(t, -1) &= -\frac{1}{\kappa^2} (2\dot{H} + 3H^2) - \sum_i w_i \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)}, \\ \left. \frac{\partial K(\phi, X)}{\partial X} \right|_{X=-1} &= \frac{1}{\kappa^2} \dot{H} + \frac{1}{2} \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a^{-3(1+w_i)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

現実的に、場が完全に一様等方でなく空間依存性を若干持つことを想定すると、 ϕ は t から少しずれ、 X は -1 の近くにある。このとき、 $K(\phi, X)$ を $X = -1$ のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned} K(\phi, X) &= -\frac{1}{\kappa^2} (2g''(\phi) + 3g'(\phi)^2) - \sum_i w_i \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} \\ &+ (X+1) \left\{ \frac{1}{\kappa^2} g''(\phi) + \frac{1}{2} \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} \right\} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (X+1)^n K^{(n)}(\phi) \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。ここで $g(\phi)$ は適当な関数であり、 $\phi = t$ のとき下記の条件を満たすものとする。

$$H = g'(t) \quad (a = a_0 e^{g(t)}) \quad (2.33)$$

これによって、 $\phi = t$ のときに、ハッブル比の任意の時間発展を記述できるようになりコンストラクションが完成した。ここで $n = 2, 3, \dots$ のときの $K^{(n)}(\phi)$ はリコンストラクションによっては決まらず、任意に取ることが出来る。つまり、 $n = 2$ 以上の項はハッブル比への寄与は無いのである。 $n = 2, 3, \dots$ の $K^{(n)}(\phi)$ が 0 であるときには [35, 36] に述べられており、安定性も調査されている。

2.4 物質を含まないときの安定性

まず、物質を含まないときの解の安定性を考える。FL 方程式から g'' を含まない式、

$$3 \frac{1-y^2}{1+X} X = -\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa^2}{H^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)X - n - 1 \right) X (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \quad (2.34)$$

を導くことが出来る。ここで $y = g'/H$ である。 y はその定義より、 $\phi = t$ のときに 1 となるものである。この式を使うと、 dy/dN を g や g の微分を含まない形で表すことが出来る。その結果は下の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dN} = & 3X \frac{1-y^2}{1+X} \left(\frac{\dot{\phi}}{X} + y \right) \\ & - \frac{\kappa^2}{H^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(\dot{\phi} + yX) \left((n-1)X - n - 1 \right) + \dot{\phi} n (X+1) \right] (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで、 $N = \ln a$ であり、 d/dN は d/Hdt と表すこともできる。この式から、 y の固定点は 1 であることがわかる。すなわち $\phi = 1$ の点である。安定性を見るために、この固定点周りの振る舞いを調べる。そのため、 $\phi = 1 + \delta\phi$ とおくと次式を得る。

$$\frac{d\delta\dot{\phi}}{dN} = \left[-3 - \frac{g''}{g'^2} - \frac{d}{dN} \left\{ \frac{\kappa^2}{6g'^2} (8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2} g'') \right\} \right] \delta\dot{\phi} \quad (2.36)$$

ここで、右辺の $[\]$ の中が負であるならば、この固定点は安定である。特筆すべきことは、任意のハッブル比およびスケールファクターの時間発展を $g(\phi)$ のとり方によって与えても、 $K^{(2)}$ の任意性により、いつでも右辺の $[\]$ の中を負にすることができるということである。つまり、 $K^{(2)}$ の定義によっていつでも安定にすることができる。逆の言い方をすれば、この式 (2.36) によって、解の安定性のための条件として、 $K^{(2)}$ に制限をつけるこ

とができるのである。

一方で、FL 方程式 (2.29) は下の式を与える。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3H^2}{\kappa^2} \frac{1-y^2}{1+X} + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)(2n-1)X + n+1 \right) (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \right] \frac{dX}{dN} = \\ & \left[-\frac{18H^2}{\kappa^2} (X + \dot{\phi}y) \frac{1-y^2}{1+X} - \frac{g'''}{\kappa^2 H} \dot{\phi}(1+X) \right. \\ & \quad + 6(X + \dot{\phi}y) \sum_{n=2}^{\infty} \left((2n-1)X - 1 \right) (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \\ & \quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left(6nXK^{(n)}(\phi) + ((2n-1)X - 1) \frac{K'^{(n)}}{H} \dot{\phi} \right) (X+1)^{n-1} \right] \quad (2.37) \end{aligned}$$

これは場の方程式と等価なもので、ここに摂動を加えると、

$$\frac{d\delta\dot{\phi}}{dN} = \left[-3 - \frac{g''}{g'^2} - \frac{d}{dN} \left\{ \frac{\kappa^2}{6g'^2} (8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2} g'') \right\} \right] \delta\dot{\phi} \quad (2.38)$$

を得る。これは式 (2.36) と一致する。つまり、実は y の摂動と X の摂動というのは独立な自由度ではなく、 $\delta\dot{\phi}$ で表されるものだったのである。なぜこのような結果が得られたか、ということを見て行く。ここでは固定点のまわり、 $\phi = t + \delta\phi$ を考えているということに注意する。まず、 X の摂動が、

$$\begin{aligned} X &= \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \partial^\mu (t + \delta\phi) \partial_\mu (t + \delta\phi) \\ &= -1 - 2\delta\dot{\phi} - (\delta\dot{\phi})^2 + \partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi \end{aligned} \quad (2.39)$$

と与えられるので、ハッブル比 H の摂動は式 (2.29) の第一式より、

$$H(t, -1) + \delta H = g'(t) + \frac{\kappa^2}{6g'(t)} \left[\left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} + \frac{6g'(t)g''(t)}{\kappa^2} \delta\phi \right] \quad (2.40)$$

と導かれる。ここで、 δH は $H(\phi, X)$ の $H(t, -1) = g'(t)$ からのずれを表す。ただし δH に含むのは、 $\delta\phi$ およびその微分からなる、一次以下の項のみとしている。この H の摂動の式を使うと、 y の摂動を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{g'(\phi)}{H(\phi)} = \frac{g'(t) + g''(t)\delta\phi + O((\delta\phi)^2)}{H(t) + \delta H + O((\delta\phi)^2)} \\ &\sim 1 + \left(\frac{g''(t)}{g'(t)} - \frac{g'(t)g''(t)}{g'^2(t)} \right) \delta\phi - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \\ &\sim 1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、 \sim は $\delta\phi$ およびその微分からなる、二次以上の寄与を無視していることを表す。これで、 y と X の摂動の一次が $\delta\dot{\phi}$ のみで表されることが示された。ただし式 (2.36)、(2.38) を導く際には、固定点で不定形になるような項の値を求めなければならない、という問題に直面することになる。しかし、実はこの y と X の摂動を用いると簡単に調べることができるのである。以下にその結果を示す。

$$\begin{aligned} \frac{1-y^2}{1+X} &\sim \frac{1}{-2\delta\dot{\phi}} \left(1 + \frac{\delta\dot{\phi}}{2} - \frac{\partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi}{2\delta\dot{\phi}} \right)^{-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \right)^2 \right] \\ &\sim -\frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\dot{\phi}}{X} + y}{1+X} &\sim \frac{1}{-2\delta\dot{\phi}} \left(1 + \frac{\delta\dot{\phi}}{2} - \frac{\partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi}{2\delta\dot{\phi}} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{1 + \delta\dot{\phi}}{-1 - 2\delta\dot{\phi} - (\delta\dot{\phi})^2 + \partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi} + 1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \right) \\ &\sim -\frac{1}{2\delta\dot{\phi}} \left(-1 + \delta\dot{\phi} + 1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \right) \\ &\sim \frac{\kappa^2}{12g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) - \frac{6}{\kappa^2} g'^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{X + \dot{\phi}y}{1+X} &\sim \frac{1}{-2\delta\dot{\phi}} \left(1 + \frac{\delta\dot{\phi}}{2} - \frac{\partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi}{2\delta\dot{\phi}} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left[-1 - 2\delta\dot{\phi} - (\delta\dot{\phi})^2 + \partial^i \delta\phi \partial_i \delta\phi + (1 + \delta\dot{\phi}) \left(1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) \right\} \delta\dot{\phi} \right) \right] \\ &\sim \frac{\kappa^2}{12g'^2(t)} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) + \frac{6}{\kappa^2} g'^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここでも、 \sim は $\delta\phi$ の二次以上の項を落とすことを表している。

2.5 物質を含むときの安定性

今までは物質を含まない場合、つまり $\rho_{0i} = 0$ となる場合について考えてきたが、これからは一般的な ρ_{0i} の場合を見て行く。このとき、式 (2.34) に対応する式は次のように

なる。

$$\begin{aligned}
3 \frac{1-y^2}{1+X} X &= -\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa^2}{H^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)X - n - 1 \right) X (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \\
&+ \frac{\kappa^2}{H^2} \frac{X-1}{2(X+1)} \rho_{\text{matter}} - \frac{\kappa^2}{2H^2} p_{\text{matter}} - \frac{\kappa^2}{H^2} \frac{X}{X+1} \sum_i \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

同様にして、 y の時間変化 dy/dN は、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dN} &= 3X \frac{1-y^2}{1+X} \left(\frac{\dot{\phi}}{X} + y \right) \\
&- \frac{\kappa^2}{H^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(\dot{\phi} + yX) \left((n-1)X - n - 1 \right) + \dot{\phi} n (X+1) \right] (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \\
&+ \frac{\kappa^2}{2H^2 X} \left(-\frac{X-1}{X+1} (\dot{\phi} + yX) - \dot{\phi} \right) \rho_{\text{matter}} + \frac{\kappa^2}{2H^2} y p_{\text{matter}} \\
&+ \frac{\kappa^2}{2H^2} \sum_i \left((\dot{\phi} + yX) \frac{2}{X+1} - \dot{\phi} (1+w_i) \right) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

となる。ここで、摂動 $\phi = t + \delta\phi$ をとったときの式も同様に導かれるものと思うかもしれないが、実際にはそう簡単には行かない。それは、 a という新しいパラメータが入ったためである。そのため、ハッブル比 H の摂動は以下のような変化を受ける。

$$\begin{aligned}
H(\phi, X) &\sim g'(t) + \frac{\kappa^2}{6g'(t)} \left[\left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) - \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} \right\} \delta\dot{\phi} \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{6g'(t)g''(t)}{\kappa^2} + 3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} g'(t) \right\} \delta\phi \right] \\
&+ \frac{\kappa^2}{6g'(t)} \left\{ -3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} \frac{\delta a}{a} a(t)^{-3(1+w_i)} \right\}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

ここで δa は、 $a(\phi, X) = a(t, -1) + \delta a + O((\delta\phi)^2)$ として定義される。つまり、 a の摂動の一次の項である。また、 $a(t) = a(t, -1)$ である。この表記を用いると、 $H(\phi, X)$ は次のように書き下される。

$$\begin{aligned}
H(\phi, X) &= \frac{\dot{a}(\phi, X)}{a(\phi, X)} \sim \frac{\dot{a}(t, -1) + \delta\dot{a}}{a(t, -1) + \delta a} \\
&\sim \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\delta\dot{a}}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \left(-\frac{\delta a}{a(t)} \right) \\
&\sim g'(t) + \frac{\delta\dot{a}}{a(t)} - \frac{\dot{a}(t)\delta a}{a^2(t)}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

式 (2.47) と (2.48) を使うと、 δa と $\delta\phi$ に関する微分方程式が得られる。この微分方程式を δa について解くと、

$$\begin{aligned} \delta a = & \left(\int^t dt' \exp \left[3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} \int^{t'} dt'' \frac{\kappa^2}{6g'} a^{-3(1+w_i)} \right] \right. \\ & \times \frac{\kappa^2}{6g'(t)} \left[\left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) - \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} \right\} \delta\dot{\phi} \right. \\ & \left. \left. + \left\{ \frac{6g'(t)g''(t)}{\kappa^2} + 3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} g'(t) \right\} \delta\phi \right] \right) \\ & \times \exp \left[-3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} \int^t dt''' \frac{\kappa^2}{6g'} a^{-3(1+w_i)} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

となる。これを使うと $y(\phi, X)$ の $\phi = t + \delta\phi$ での振舞いは、

$$\begin{aligned} y(\phi, X) = & \frac{g'(t + \delta\phi)}{H(\phi, X)} \sim 1 + \frac{g''(t)}{g'(t)} \delta\phi - \frac{1}{g'(t)} \left(\frac{\delta\dot{a}}{a(t)} - \frac{\dot{a}(t)\delta a}{a^2(t)} \right) \\ & \sim 1 - \frac{\kappa^2}{6g'^2} \left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) - \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} \right\} \delta\dot{\phi} + \delta\lambda, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\delta\lambda \equiv 3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \frac{\kappa^2}{6g'^2} \left(\frac{\delta a}{a} - g' \delta\phi \right) \quad (2.51)$$

となる。ここで、 $\delta\lambda$ は $\delta\dot{\phi}$ 以外の項ということで、便宜上定義した。しかしこの定義の仕方は実際には本質的であって、(2.49) を部分積分するとわかるように、余分な項がちょうど相殺して、下のように $\delta\dot{\phi}$ のみを用いて表記することができる。

$$\begin{aligned} \delta\lambda = & 3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \frac{\kappa^2}{6g'^2} \left(\int^t dt' \exp \left[3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} \int^{t'} dt'' \frac{\kappa^2}{6g'} a^{-3(1+w_i)} \right] \right. \\ & \times \frac{\kappa^2}{6g'(t)} \left[\left\{ 8K^{(2)}(t) - \frac{6g'^2}{\kappa^2} - \frac{2}{\kappa^2} g''(t) - \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(t)} \right\} \delta\dot{\phi} \right] \\ & \left. \times \exp \left[-3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} \int^t dt''' \frac{\kappa^2}{6g'} a^{-3(1+w_i)} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

これを $N = \ln a$ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\lambda}{dN} = & 3 \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \\ & \times \left(\frac{\kappa^2}{6g'^2} \right)^2 \left\{ 8K^{(2)} - \frac{6g'^2}{\kappa^2} - \frac{2}{\kappa^2} g'' - \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} \delta\dot{\phi} \\ & + \left[\frac{d}{dN} \ln \left\{ \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} - \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i) \rho_{0i} a(t)^{-3(1+w_i)} \right] \delta\lambda \end{aligned} \quad (2.53)$$

を得る。ここで、 $a(t) \equiv a_0 e^{g(t)}$ である。これで式 (2.46) を扱う準備ができたわけだが、ここから目的の式 ($\delta\dot{\phi}$ に関する微分方程式) を得るには少々手間がかかる。それは、式 (2.46) だけで目的の式を得ることはできず、式 (2.53) の助けを借りなければならないためである。よって、物質の入っていなかった場合と同様に、場の方程式と等価な式から始める：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3H^2}{\kappa^2} \frac{1-y^2}{1+X} + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)(2n-1)X+n+1 \right) (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{1+X} \sum_i \rho_{0i} \left(a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} - a^{-3(1+w_i)} \right) \right] \frac{dX}{dN} = \\ & \left[-\frac{18H^2}{\kappa^2} (X+\dot{\phi}y) \frac{1-y^2}{1+X} - \frac{g'''}{\kappa^2 H} \dot{\phi} (1+X) \right. \\ & \quad + 6(X+\dot{\phi}y) \sum_{n=2}^{\infty} \left((2n-1)X-1 \right) (X+1)^{n-2} K^{(n)}(\phi) \\ & \quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left(6nXK^{(n)}(\phi) + \left((2n-1)X-1 \right) \frac{K'^{(n)}}{H} \dot{\phi} \right) (X+1)^{n-1} + 6 \frac{\dot{\phi}y+X}{X+1} \rho_{\text{matter}} \\ & \quad + \sum_i \left(-6 \frac{\dot{\phi}y+X}{X+1} + \frac{3}{2} (X+1) \dot{\phi} (1+w_i)^2 y \right) \rho_{0i} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} \\ & \quad \left. - \frac{1}{H} \left(\dot{\rho}_{\text{matter}} + 3H(\rho_{\text{matter}} + p_{\text{matter}}) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

ここで、最後の行はエネルギー保存則を表しており、 ρ_{matter} と p_{matter} 定義より 0 となる。式 (2.54) の摂動をとると、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\dot{\phi}}{dN} = & \left[-3 + \frac{g''}{g'^2} + \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \right. \\ & \left. - \frac{d}{dN} \ln \left\{ 8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2}g'' - \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} \right] \delta\dot{\phi} \\ & + \left[3 - \frac{24K^{(2)}}{8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2}g'' - \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)}} \right] \delta\lambda \end{aligned} \quad (2.55)$$

を得る。これで、物質を入れたことによって増えた自由度として、 $\delta\lambda$ の微分方程式を加えて、二つの摂動に関する微分方程式を導くことができた。もちろん、どちらの揺らぎも収束しなければ、この解は安定ではない。よって、式 (2.53) と式 (2.55) を組み合わせ、次のような連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\lambda \end{pmatrix} \Big|_{\phi=t, H=g'(t)} = & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\lambda \end{pmatrix} \quad (2.56) \\ A \equiv & -3 + \frac{g''}{g'^2} + \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \\ & - \frac{d}{dN} \ln \left\{ 8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2}g'' - \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} \\ B \equiv & 3 - \frac{24K^{(2)}}{8K^{(2)} - \frac{2}{\kappa^2}g'' - \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)}} \\ C \equiv & 3 \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \left(\frac{\kappa^2}{6g'^2} \right)^2 \left\{ 8K^{(2)} - \frac{6g'^2}{\kappa^2} - \frac{2}{\kappa^2}g'' - \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} \\ D \equiv & \frac{d}{dN} \ln \left\{ \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)} \right\} - \frac{\kappa^2}{2g'^2} \sum_i (1+w_i)\rho_{0i}a(t)^{-3(1+w_i)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

式 (2.56) の右辺にある行列の要素 A、B、C、D がそれぞれ定数であるとき、固有値の実部が二つとも負であれば、 $\delta\dot{\phi}$ と $\delta\lambda$ は収束していくことになる。即ち、安定である。一般に、 2×2 行列 M の二つの固有値は $\frac{1}{2}\{\text{tr } M \pm \sqrt{(\text{tr } M)^2 - 4(\det M)}\}$ で与えられるので、安定のための条件は $\text{tr } M < 0$ かつ $\det M > 0$ であることがわかる。つまり、固定点 $\phi = t, H = g'(t)$ の安定性を調べるためには、式 (2.56) の右辺の行列のトレースと行列式だけでもとめればよいのである。

一般に、行列要素 A 、 B 、 C 、 D が定数でないときにはそれほど簡単に解析することはできない。しかしながら、二変数一階の微分方程式であるので、個々の場合については解ける可能性もある。その際、この行列の中に $K^{(2)}(\phi)$ という因子が入っていることが重要である。なぜならば、この因子は背景時空の成長とは無関係であるために、私たちは自由にこの関数形を決めることが出来るので、安定解となるように選ぶことも可能ではないかと考えられるためである。

2.6 第二節のまとめ

この節では特別な場合としてクインテッセンス模型やタキオン模型、ゴースト凝縮模型を含むような模型である、 k エッセンス模型について任意のスケールファクターの時間発展に対するリコンストラクションの手法を開発し、その安定性を判断するための条件式を得た。まず、運動項のみを含むような k エッセンス模型では、リコンストラクションの手法を開発することに成功し、 Λ CDM 模型の表す時間発展に、非常に近い模型を作ることができた。

一般の k エッセンス模型の場合には X を -1 の周りで展開することで、リコンストラクションの手法が完成するに至った。それは、 $X + 1$ の n 次の展開係数 $K^{(n)}(\phi)$ の $n = 0, 1$ のときを決めることで成され、 $n = 2$ 以上は宇宙の成長には寄与しない。しかしながら、安定性の条件によると、安定性は $K^{(2)}(\phi)$ に依存して決まることがわかった。 $n = 3$ 以上の $K^{(n)}(\phi)$ は安定性にも寄与は無い。その安定性の条件を、ある宇宙の時間発展を再現する解に対して使うと、 $(X + 1)$ の二次の展開係数 $K^{(2)}(\phi)$ に制限がつくことになる。

3 物質の密度揺らぎの発展

以下では、宇宙の摂動的な部分の発展として物質の密度揺らぎの発展を考える。宇宙論では、まず第零近似として銀河も何も無い均された宇宙を考え、その時間発展を求め、これは FL 方程式を解くことに対応している。しかし、現実の宇宙には銀河団、ポイド、星団など種々の構造がある。そのためにアインシュタイン方程式の摂動を考え、これらの構造からの寄与を考えていく必要があるのである。

3.1 宇宙論的摂動論への導入

宇宙論的摂動論は、暗黒エネルギーの特徴づけをするのによい方法である [38, 42]。なぜなら摂動論は宇宙の背景時空の発展とは異なる情報を持っているために、たとえ全く同じ宇宙の発展を引き起こす、二つの暗黒エネルギーの模型があったとしても、それらを見分けられる可能性があるのである。そのため、前節でリコンストラクションの手法によって k エッセンス模型では任意の宇宙の発展を再現できることが示されたが、他の、例えば Λ CDM 模型との違いを見出せる可能性がある。

宇宙論的摂動論では度々サブホライズン近似と呼ばれる近似法が用いられる。この近似法は形式的には $a/k \ll 1/H$ 、 $1/dt \sim H$ と書かれる。ここで、 a はスケールファクター、 k は波数、 H はハッブル率を表しており、これは考える対象の大きさが宇宙の地平線よりも小さいこと、摂動パラメータの時間発展がハッブル率程度であり光速よりも十分小さいことを意味するため、この近似を用いるとニュートン重力と一致することが期待される。しかしながらこれは単なる近似であるため、この近似の正当性を主張するためには厳密解からのずれを評価することが必要である。具体的には、サブホライズン近似を用いた結果はニュートン重力での結果と一致するので、一般相対論的な補正がどの程度効いてくるのかを見ることになる。最近では P. Zhang がこの一般相対論的な補正を調べたが、その結果大きな領域 (k の小さな領域) ではその補正が無視できないという結論を数値的に導いた [43]。以下の小節では、この一般相対論的な補正を解析的に調べるとともに、単なる補正ではなく全く異なる時間発展をする解があるということを見てゆく。

単位系として、 $k_B = c = \hbar = 1$ となるものを取り、重力定数 $8\pi G$ を以下では κ^2 としてあらわす。

3.2 Λ CDM 模型における宇宙論的摂動論

この小節ではニュートニアンゲージをもちいて Λ CDM 模型における宇宙論的摂動論を考える。ただし、物質の要素としては単一の順圧流体しか想定しない。故に、以下の議論は輻射優勢期もしくは物質優勢期以降でのみ有効である。また、以下の小節でもニュートニアンゲージを用いて議論を進めるが、このニュートニアンゲージでは完全にゲージが固定されているために、このゲージにおける摂動変数はゲージ不変量 [45, 46] であるとみなすことができることに注意しておく。

まず、宇宙項を含んだアインシュタイン方程式から始める:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda + \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) 方程式は、空間的に平坦な FLRW 計量、 $ds^2 = -dt^2 + \delta_{ij}a(t)^2 dx^i dx^j$ を式 (3.1) に代入することで得られる。

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \kappa^2 \rho + \Lambda, \\ -a^2 \delta_{ij} (2\dot{H} + 3H^2) &= \kappa^2 a^2 \delta_{ij} p - a^2 \delta_{ij} \Lambda, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、完全流体のエネルギー運動量テンソル、 $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu$, $u_i = 0$, $u_0 = -1$ を用いた。 u_μ は $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$ を満たす 4 次元ベクトルであり、 ρ はエネルギー密度、 p は圧力を表している。ニュートニアンゲージの摂動を加えた FLRW 計量:

$$ds^2 = (-1 + 2\Phi)dt^2 + \delta_{ij}a(t)^2(1 + 2\Psi)dx^i dx^j, \quad (3.3)$$

を、摂動を加えたアインシュタイン方程式、

$$\delta R^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu \frac{1}{2}\delta R = \kappa^2 \delta T^\nu{}_\mu, \quad (3.4)$$

に代入すると、下の摂動の一次の方程式を得ることができる。

$$-6H^2\Phi - 2\frac{k^2}{a^2}\Psi - 6H\partial_0\Psi = -\kappa^2\delta\rho, \quad (3.5)$$

$$2\partial_i(H\Phi + \partial_0\Psi) = \kappa^2(\rho + p)\delta u_i, \quad (3.6)$$

$$a^{-2}\partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) = 0, \quad (i \neq j), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\partial_i\partial_i}{a^2} - 2H\partial_0 - 4\dot{H} - 6H^2\right)\Phi - \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\partial_i\partial_i}{a^2} + 2\partial_0\partial_0 + 6H\partial_0\right)\Psi \\ = \kappa^2\delta p, \quad (i \text{ について和はとらない}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

式 (3.5)、(3.6)、(3.7)、(3.8) はそれぞれアインシュタイン方程式の (00) 成分、(0*i*) 成分、 $i \neq j$ のときの (*ij*) 成分、 $i = j$ のときの (*ij*) 成分を表している。式 (3.5)、(3.8) における k は波数を表しており、空間微分のフーリエ変換 ($k^2 = -\partial_j \partial_j$) として現れている。また、エネルギー運動量テンソルについては完全流体のものとして扱っていたので、その摂動は、

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho, \quad (3.9)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p)\delta u_i, \quad (3.10)$$

$$\delta T_0^i = -a^{-2}(\rho + p)\delta u_i, \quad (3.11)$$

$$\delta T_j^i = \delta_{ij}\delta p, \quad (3.12)$$

として表される。上の式を導く際に、4 元ベクトルの条件、 $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$ より $\delta u_0 = \delta g_{00}/2$ が導かれることを用いた。以下では摂動のスカラー部分に注目して議論して行くので、 δu_i を $\partial_i \delta u + \delta u_i^V$ として分解し、条件式 $\partial^i \delta u_i^V = 0$ を満たすベクトル部分については、 $\delta u_i^V = 0$ と置き、スカラー部分 δu だけを残しておく。このとき、 δu_i は $\delta u_i \equiv \partial_i \delta u$ と表される。

物質の揺らぎの方程式は、連続の式 $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ の摂動をとることによって得られる。

$$\delta\dot{\rho} + 3H(\delta\rho + \delta p) + a^{-2}\partial_i\{(\rho + p)\delta u_i\} + 3\dot{\Psi}(\rho + p) = 0, \quad (3.13)$$

$$a^{-3}\partial_0\{a^3(\rho + p)\delta u_i\} + \partial_i\delta p - (\rho + p)\partial_i\Phi = 0. \quad (3.14)$$

基本的には、物質の密度揺らぎ $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ の時間発展は上の二つの式から得られる。しかしながら未知変数 δu_i と Ψ があるので、式 (3.5) や (3.6) などのほかの方程式を使う必要がある。

3.3 サブホライズン近似と厳密な方程式

微分方程式の導出 以下では、式 (3.7) より、 $\Psi = \Phi$ を想定する。これは、無限遠においては全てのポテンシャルは零になるであろうということを考察した結果でもある。式 (3.5) にサブホライズン近似 $H^2\Psi$ 、 $H\partial_0\Psi$ 、 $\partial_0^2\Psi \ll k^2\Psi/a^2$ を用いると、

$$2\frac{k^2}{a^2}\Psi \simeq \kappa^2\delta\rho. \quad (3.15)$$

を得る。この式の Ψ と k^2/a^2 、 $\delta\rho$ をそれぞれ $-\phi$ と $-\nabla^2$ 、 ρ と置き換えると、ニュートンポテンシャルの満たすべき運動方程式が得られる。このような近似は、音速が小さく、また宇宙の膨張が無視できるような小さな領域を考えているときには正しい。しかしなが

ら、私たちは何も仮定、想定が無いときに計算誤差を評価すべきである。ゆえに、これから物質の密度揺らぎの微分方程式に対する一般相対論的な補正の大きさを調べる。まず、サブホライズン近似を用いたときの物質の密度揺らぎの微分方程式は、 $w = p = \delta p = 0$ のとき、以下のように得られる。

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}\Omega_m H^2 \delta \simeq 0, \quad (3.16)$$

この方程式は、式 (3.7)、(3.13)、(3.14)、(3.15) を用いることによって得られる。ただし、ここで $\dot{\delta} \equiv \partial_0 \delta$ 、 $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ および $\Omega_m \equiv \kappa^2 \rho/3H^2$ として定義している。式 (3.16) はニュートン重力とオイラー方程式を使って導いた式と同一である [44]。式 (3.16) を無次元変数 $N \equiv \ln a$ を用いて書き換えると、

$$\frac{d^2 \delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2} \Omega_m \delta \simeq 0, \quad (3.17)$$

を得る。ここで式 (3.2) より、有効状態方程式パラメータを $w_{\text{eff}} \equiv -1 - 2\dot{H}/(3H^2)$ として定義した。一方で、厳密な物質の密度揺らぎの方程式は式 (3.5)、(3.6)、(3.7)、(3.13) を用いることで得られる。まず、式 (3.5) と (3.7) から $\dot{\Psi}$ に関する一次の微分方程式を得ることが出来る:

$$\dot{\Psi} = \frac{\kappa^2}{6H} \delta\rho - \left(H + \frac{k^2}{3aH} \right) \Psi. \quad (3.18)$$

次に、この式 (3.18) と式 (3.13)、(3.6)、(3.7) を組み合わせることで、 $\delta\rho$ に関する一次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho} = & \left\{ -3H(1 + c_s^2) - (1 + w) \frac{\kappa^2 \rho}{2H} + \frac{k^2}{3a^2 H} \right\} \delta\rho \\ & + \left\{ 3(1 + w)H\rho + (1 + w) \frac{\rho k^2}{a^2 H} - \frac{2k^4}{3a^4 H \kappa^2} \right\} \Psi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、 $\delta p = c_s^2 \delta\rho$ として定義される音速 c_s^2 を導入した。式 (3.19) を N で微分し、 $\dot{\Psi}$ および Ψ に比例する項を式 (3.18) と (3.19) を用いて消去すると、変数 $\delta\rho$ だけで表された微分方程式を得ることができる。無次元量 δ 、 $N = \ln a$ を用いるとその微分方程式は

以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left\{ 1 + \frac{3}{2}(1+w)\Omega_m + 3(c_s^2 - w) \right. \\
\left. - \frac{d}{dN} \ln \left| -\frac{2k^4}{3a^4H^2\kappa^2\rho} + 3(1+w) \left(1 + \frac{k^2}{3a^2H^2} \right) \right| \right\} \frac{d\delta}{dN} \\
- \left\{ \frac{k^2}{3a^2H^2} (2 + 3w - 3c_s^2 + 3w_{\text{eff}}) + 3(w - c_s^2) - \frac{9}{2}(1+w)(w_{\text{eff}} - w)\Omega_m \right. \\
\left. - \left(\frac{k^2}{3a^2H^2} + 3(w - c_s^2) - \frac{3}{2}(1+w)\Omega_m \right) \frac{d}{dN} \ln \left| -\frac{2k^4}{3a^4H^2\kappa^2\rho} \right. \right. \\
\left. \left. + 3(1+w) \left(1 + \frac{k^2}{3a^2H^2} \right) \right| \right\} \delta = 0. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

これがニュートニアンゲージを用いたときの物質の密度揺らぎの厳密な微分方程式である。

式 (3.20) を式 (3.17) と比べるために、小スケール近似 $H^2 \ll k^2/a^2$ だけを式 (3.20) に適用すると下の式を導く。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\delta}{dN^2} - \left\{ 1 + 3w_{\text{eff}} + 3w - \frac{3}{2}(1+w)\Omega_m + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \frac{d\delta}{dN} \\
+ \left\{ \frac{wk^2}{a^2H^2} - \frac{3}{2}(1+w)(1+3w)\Omega_m + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \delta = 0. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ここで、簡単のため $c_s^2 = w$ と置いた。ただし、式 (3.21) を導く際に下の展開を用いた。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dN} \ln \left| -\frac{2k^4}{3a^4H^2\kappa^2\rho} + 3(1+w) \left(1 + \frac{k^2}{3a^2H^2} \right) \right| \\
= 2 + 3w_{\text{eff}} + 3w + (1+w)(1+3w) \frac{3a^2\kappa^2\rho}{2k^2} + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-2}\right). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

式 (3.17) は物質優勢期以降でしか有効ではないので、厳密な方程式と比べるためには、さらに $w = 0$ ととる必要がある。 $w = 0$ のとき、式 (3.22) は以下ようになる。

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}w_{\text{eff}} + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \frac{d\delta}{dN} + \left\{ -\frac{3}{2}\Omega_m + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \delta = 0, \tag{3.23}$$

ここで、式 (3.2) から得られる、 $(1+w)\Omega_m = 1 + w_{\text{eff}}$ の関係を用いた。この式 (3.23) は式 (3.17) と $O(\{k^2/(a^2H^2)\}^0)$ の項を除けば同一である。ゆえに、式 (3.17) の小スケール $H^2 \ll k^2/a^2$ における正当性が示された。

一方、輻射優勢期においては、私たちの興味のあるスケールがいつも地平線よりもずっと内側にあるわけではない。そのため、そのような場合には式 (3.20) にある一般相対論的な補正をきちんと考えなければならない。また、地平線のずっと内側であっても輻射優勢期には一般相対論的な補正が無視できないということを式 (3.21) を見ると読み取ることができる。式 (3.21) を N ではなく時間微分を使って表すと、

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + \left\{ 2 - 3w + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2 H^2}\right)^{-1}\right) \right\} H \dot{\delta} \\ + \left\{ \frac{c_s^2 k^2}{a^2 H^2} - \frac{3}{2}(1+w)(1+3w)\Omega_m + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2 H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \delta = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

という結果が得られる。この式は、導き方は異なるものの、Bardeen、Liddle、Lyth が得た結果 [45, 47] と等しい。

3.3.1 一貫性の確認

δ に関する微分方程式を求めたように、 Ψ に関する微分方程式を式 (3.18) と (3.19) から得ることができる。

$$\frac{d^2 \Psi}{dN^2} + \left\{ 1 + 3(c_s^2 - w_{\text{eff}}) + \frac{3}{2}(1+w)\Omega_m \right\} \frac{d\Psi}{dN} + \left\{ \frac{c_s^2 k^2}{a^2 H^2} + 3(c_s^2 - w_{\text{eff}}) \right\} \Psi = 0. \quad (3.25)$$

しかしながら、 Ψ に関する微分方程式を得る方法はこれだけではない。式 (3.5)、(3.7)、(3.8) から、 δ と Φ に比例する項を消去するように式変形をすると、下の式を得ることが出来る。

$$\frac{d^2 \Psi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} + 3c_s^2 - \frac{3}{2}w_{\text{eff}} \right) \frac{d\Psi}{dN} + \left\{ \frac{c_s^2 k^2}{a^2 H^2} + 3(c_s^2 - w_{\text{eff}}) \right\} \Psi = 0. \quad (3.26)$$

この式 (3.26) は一見、式 (3.25) と異なるように見えるが、関係式 $(1+w)\Omega_m = 1 + w_{\text{eff}}$ を用いると、確かに式 (3.26) と式 (3.25) は等しいということが分かる。この結論は自明だと考えられるかもしれないが、たとえば、厳密にニュートニアンゲージの計量ではなく、計量の非対角成分が残っていた場合にはこれらの式は異なる結果を導く。

3.4 Λ CDM 模型での物質の密度揺らぎのまとめ

Λ CDM 模型において、ニュートニアンゲージでの物質密度の揺らぎに関する厳密な微分方程式を求めた。この方程式 (3.20) は小スケール近似 $H^2 \ll k^2/a^2$ を用いることで、物質優勢期以降での標準的な、物質の密度揺らぎの方程式 $\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 3\Omega_m H^2 \delta/2 \simeq 0$ を導

く。一方で、輻射優勢期でのホライズンよりもずっと小さな領域での方程式は、Bardeen、Liddle、Lyth[45, 47] が導いた結果と一致している。

ゆえに、式 (3.20) はこれらの方程式の一般化と見なすこともできる。特に式 (3.20) は、小スケール近似がうまく働かない、輻射優勢期においては有用な式である。

3.5 k エッセンス模型における宇宙論的摂動論

前小節で見たように、正しく物質の密度揺らぎの発展を評価するためには、アインシュタイン方程式の摂動をなるべく近似を使わずに整理していく必要がある。しかしながら、 k エッセンス模型では、場 ϕ や ϕ の微分など、 Λ CDM 模型に比べて自由度が多いためにそれは困難である。そのため、今までサブホライズン近似を用いた結果や数値計算による研究などしか得られていなかった。この小節では、まずサブホライズン近似を用いたときの物質の密度揺らぎの式を導き、その後、サブホライズン近似のうちの一つの近似を外す事で、サブホライズン近似を用いたときには現れなかった別の解があることを示す。

3.5.1 線形摂動の方程式

まず、 k エッセンス模型の作用から始める。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2\kappa^2} - K(\phi, X) + L_{\text{matter}} \right\}, \quad X \equiv -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi. \quad (3.27)$$

ここで ϕ はスカラー場であり、 L_{matter} は物質のラグランジアン密度を表す。変分原理に従い、計量 $g^{\mu\nu}(x)$ に関する汎関数微分を行うと、下のアインシュタイン方程式を得ることができる。

$$\frac{1}{\kappa^2} G_{\mu\nu} = -K(\phi, X) g_{\mu\nu} - K_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (3.28)$$

ここで、 $K_{,X}$ は $K(\phi, X)$ を X で変分したものである。また、 $T_{\mu\nu}^{(m)}$ は物質のエネルギー-運動量テンソルである。一方で、 k エッセンス模型には Λ CDM 模型と違い、場 ϕ の自由度があるので、この場について汎関数微分を行うことで、もう一つの運動方程式が得られる:

$$K_{,\phi} + \nabla_\mu (K_{,X} \partial^\mu \phi) = 0. \quad (3.29)$$

空間的に平坦な Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) 時空を考えると、計量 $ds^2 = -dt^2 + \sum_{i,j=1,2,3} \delta_{ij} a^2(t) dx^i dx^j$ を式 (3.28)、(3.29) に代入することで、 k

エッセンス模型のときのいわゆるフリードマン方程式とスカラー場の運動方程式は以下のように表される。

$$\frac{3H^2}{\kappa^2} = K - \dot{\phi}^2 K_{,X} + \rho_{\text{matter}}, \quad (3.30)$$

$$-\frac{2\dot{H}}{\kappa^2} = -\dot{\phi}^2 K_{,X} + (1+w)\rho_{\text{matter}}, \quad (3.31)$$

$$0 = 3H\dot{\phi}K_{,X} + \ddot{\phi}(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}) - K_{,\phi} + \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}, \quad (3.32)$$

ここで $w \equiv p_{\text{matter}}/\rho_{\text{matter}}$ は状態方程式 (EoS) パラメーターであり、ハッブル率 $H(t)$ は $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ として定義される。エネルギー運動量テンソルは完全流体のものとして取り扱う。このとき、物質の連続の方程式は、

$$\dot{\rho}_{\text{matter}} + 3(1+w)H\rho_{\text{matter}} = 0. \quad (3.33)$$

と表される。以下では、添え字 “matter” を省略して表す。たとえば、エネルギー密度 ρ_{matter} を ρ として表すが、この ρ にはスカラー場の寄与は入っていないことに注意してほしい。次に物質の密度揺らぎの時間発展を調べるために、背景周りの摂動を加えたスカラー場、 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ 、 $X \rightarrow X + \delta X$ および計量 $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ を考える。これらを式 (3.28) と式 (3.29) に代入すると、以下の線形摂動の方程式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^2} \delta R_{\mu}^{\nu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2} \delta R - K_{,\phi} \delta\phi - K_{,X} \delta X \right) \delta_{\mu}^{\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta K_{,X} \partial_{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi - \frac{1}{2} K_{,X} (\partial_{\mu} \delta\phi \partial^{\nu} \phi + \partial_{\mu} \phi \partial^{\nu} \delta\phi) + \delta T_{\mu}^{(m)\nu}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} 0 &= K_{,\phi\phi} \delta\phi + K_{,\phi X} \delta X + \nabla_{\mu} (\delta K_{,X} \partial^{\mu} \phi + K_{,X} \partial_{\alpha} \phi \delta g^{\alpha\mu} + K_{,X} \partial^{\mu} \delta\phi) \\ &\quad + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} K_{,X} \partial^{\lambda} \phi. \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで、計量の摂動 $\delta g_{\mu\nu}$ としてニュートニアンゲージをとったもの、

$$ds^2 = (-1 + 2\Phi)dt^2 + \sum_{i,j=1,2,3} \delta_{ij} a^2(t) (1 + 2\Psi) dx^i dx^j. \quad (3.36)$$

を仮定した。このとき、式 (3.34) は、

$$-6H^2\Phi - 2\frac{k^2}{a^2}\Psi - 6H\dot{\Psi} = \kappa^2 \left\{ (-K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(\dot{\phi}^2\Phi + \dot{\phi}\delta\dot{\phi}) - (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi} - 2\dot{\phi}K_{,X}\partial_0)\delta\phi + 2\Phi\dot{\phi}^2 K_{,X} - \delta\rho \right\}, \quad (3.37)$$

$$2\partial_i(H\Phi + \dot{\Psi}) = \kappa^2 \left\{ \dot{\phi}K_{,X}\partial_i\delta\phi + (\rho + p)\delta u_i \right\}, \quad (3.38)$$

$$a^{-2}\partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) = 0, \quad (i \neq j), \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\partial_i\partial_i}{a^2} - 2H\partial_0 - 4\dot{H} - 6H^2 \right) \Phi - \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\partial_i\partial_i}{a^2} + 2\partial_0\partial_0 + 6H\partial_0 \right) \Psi \\ = \kappa^2 \left\{ -K_{,X}(\dot{\phi}^2\Phi + \dot{\phi}\delta\dot{\phi}) - K_{,\phi}\delta\phi + \delta p \right\}, \\ (i \text{ についての和はとらない}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。ここで、式 (3.37)–(3.40) はそれぞれアインシュタイン方程式の $(0, 0)$ 成分、 $(0, i)$ 成分、 $i \neq j$ のときの (i, j) 成分、 $i = j$ のときの (i, j) 成分を表している。式 (3.5) と (3.8) とで現れている k は、空間微分のフーリエ変換 ($k^2 = -\partial_j\partial_j$) から生じている。

エネルギー運動量テンソルは完全流体として扱っていたので、 $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu$ であり、ここで u_μ は $u_i = 0$ 、 $u_0 = -1$ を満たす。故に、エネルギー運動量テンソルの摂動は、

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho, \quad (3.41)$$

$$\delta T^0_i = (\rho + p)\delta u_i, \quad (3.42)$$

$$\delta T^i_0 = -a^{-2}(\rho + p)\delta u_i, \quad (3.43)$$

$$\delta T^i_j = \delta^i_j \delta p, \quad (3.44)$$

と表される。ここから、 Λ CDM のときと同様に、 δu_i を $\partial_i\delta u + \delta u_i^V$ と分解し、スカラー部分 δu だけを考えていくことにする。一方で、スカラー場の線形化された運動方程式 (3.35) は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\dot{\phi}^2 K_{,XX} + K_{,X})\delta\ddot{\phi} = & -3\dot{\phi}K_{,X}\dot{\Psi} + (-\dot{\phi}K_{,X}\partial_0 - \dot{\phi}^3 K_{,XX}\partial_0 - 6H\dot{\phi}K_{,X} - 2\ddot{\phi}K_{,X} \\ & - 2\dot{\phi}\dot{K}_{,X} - 3H\dot{\phi}^3 K_{,XX} - 3\dot{\phi}^2\ddot{\phi}K_{,XX} - \dot{\phi}^3\dot{K}_{,XX} + \dot{\phi}^2 K_{,\phi X})\Phi \\ & - (3HK_{,X} + \dot{K}_{,X} + 3H\dot{\phi}^2 K_{,XX} + 2\dot{\phi}\ddot{\phi}K_{,XX} + \dot{\phi}^2\dot{K}_{,XX})\delta\dot{\phi} \\ & + \left(-K_{,X}\frac{k^2}{a^2} - 3H\dot{\phi}K_{,X\phi} - \dot{\phi}\dot{K}_{,X\phi} - \ddot{\phi}K_{,X\phi} + K_{,\phi\phi} \right) \delta\phi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

この式は一見、複雑すぎて何の情報も得られないような気もするが、後に重要な役割を果たすことを見る。物質に関する摂動方程式は、連続の方程式 $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ を線形化することによって得られる:

$$\delta\dot{\rho} + 3H(\delta\rho + \delta p) + a^{-2}\partial_i\{(\rho + p)\delta u_i\} + 3\dot{\Psi}(\rho + p) = 0, \quad (3.46)$$

$$a^{-3}\partial_0\{a^3(\rho + p)\delta u_i\} + \partial_i\delta p - (\rho + p)\partial_i\Phi = 0. \quad (3.47)$$

以下では、輻射優勢期もしくは物質優勢期以降のみを想定するので、状態方程式パラメータは $w = \text{constant}$ として扱う。さらに、物質の音速 $c_s^2 \equiv \delta p/\delta\rho$ についても定数であるとして扱うことにする。

3.5.2 サブホライズン近似

式 (3.39) より、以下では $\Psi = \Phi$ の関係を用いる。サブホライズン近似とは、形式的には $H^2, H\partial_0, \partial_0^2 \ll k^2/a^2$ と表される近似である。このサブホライズン近似を $p = 0, c_s^2 = \delta p/\delta\rho = 0$ つまり、 $\delta p = 0$ の場合に用いると、式 (3.45) より、

$$|\Psi| \gg |\delta\phi/\phi|. \quad (3.48)$$

を得る。この関係は式 (3.37) で、 $\delta\phi$ に比例する項を無視できることを意味している。そのため式 (3.5) より、近似式、

$$2\frac{k^2}{\kappa^2 a^2}\Psi \simeq \delta\rho. \quad (3.49)$$

が得られる。この式 (3.49) はニュートン重力の方程式と等価である。このとき、物質の密度揺らぎの方程式は、式 (3.48)、(3.49)、(3.46)、(3.47) より導くことができる。式 (3.46) を $N \equiv \ln a$ で微分し、式 (3.47) を代入すると、

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}w_{\text{eff}}\right)\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\Omega_m\delta \simeq 0, \quad (3.50)$$

となる。ここで、 $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ であり、 Ω_m は物質のエネルギー密度比であり、 $\kappa^2\rho/(3H^2)$ として定義される。 w_{eff} は有効状態方程式パラメータであり、定義は $w_{\text{eff}} \equiv -1 - 2H'/3H$ である。この方程式 (3.50) を見ると、スカラー場 ϕ を陽には含んでいないことがわかる。そして、式 (3.50) は ΛCDM 模型のときに得られる式と変わっていない。そのため、スカラー場が重力と最小結合しかしていないような理論では、物質の密度揺らぎに対してスカラー場は陽には効いてこないと考えられるかもしれない。しかしながら、この結論は正しくない。なぜなら、サブホライズン近似が使えるという仮定が、正しい答えを得るために

は強すぎる条件であるからである。サブホライズン近似は、二つの近似に分けることができる。一つは、小スケール近似 $k^2/a^2 \gg H^2$ であり、もう一つは、重力ポテンシャルやスカラー場の摂動などの時間変化の大きさがおよそハッブル率程度である、という想定である。形式的には、 $\partial_0 \simeq H$ と表される。この後者の近似は、いつでも使えるというわけではない。摂動パラメータの波の伝播速度が光速と比べて無視できるときにのみ使えるのである。次の小節では、この伝播速度が無視できないような場合を含めた一般的な議論を行う。

3.6 近似を用いない線型方程式

これから、物質の密度揺らぎ δ の微分方程式をニュートニアンゲージや完全流体といった近似しか用いずに導く。つまり、ここではサブホライズン近似などは用いない。

3.6.1 線形微分方程式の導出

最初に、それぞれの摂動変数に対して一次の微分方程式の形になるように式変形をしてゆく。その後に、それらを組み合わせて $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ だけで表された高次の微分方程式を作るということを考える。以下でも式 (3.39) より、 $\Psi = \Phi$ ととることにする。このとき、まず始めに式 (3.37) より、 Ψ に関する微分方程式を得ることが出来る：

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} - P_0\delta\rho - P_1\Psi - P_2\delta X - P_3\delta\phi &= 0, \\ P_0 &\equiv \frac{\kappa^2}{6H}, \quad P_1 \equiv -H - \frac{k^2}{3a^2H}, \quad P_2 \equiv -\frac{\kappa^2}{6H} \left(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX} \right), \\ P_3 &\equiv \frac{\kappa^2}{6H} \left(K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

ここで、この式 (3.51) と式 (3.45) を使うことで、 δX に関する微分方程式、

$$\begin{aligned}
\delta \dot{X} - E_0 \delta \rho - E_1 \Psi - E_2 \delta X - E_3 \delta \phi &= 0, \\
E_0 &\equiv -\frac{\kappa^2}{2H} \dot{\phi}^2 \frac{K_{,X}}{K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}}, \\
E_1 &\equiv \dot{\phi} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})^{-1} \left\{ 3 \left(H + \frac{k^2}{3a^2 H} \right) \dot{\phi} K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,\phi X} - K_{,\phi} \right\}, \\
E_2 &\equiv \frac{\kappa^2}{2H} \dot{\phi}^2 K_{,X} - \frac{d}{dt} \ln \left| \frac{a^3}{\dot{\phi}} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}) \right|, \\
E_3 &\equiv -\dot{\phi} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})^{-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\kappa^2}{2H} \dot{\phi} K_{,X} (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}) + \frac{d}{a^3 dt} (a^3 \dot{\phi} K_{,X\phi}) + \frac{k^2}{a^2} K_{,X} - K_{,\phi\phi} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

が得られる。一方、式 (3.38)、(3.46)、(3.51) を組み合わせると、 ρ に関して一次の微分方程式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\rho} - R_0 \delta \rho - R_1 \Psi - R_2 \delta X - R_3 \delta \phi &= 0, \\
R_0 &\equiv -3H(1 + c_s^2) + \frac{\kappa^2}{6H} \left\{ \frac{2k^2}{a^2 \kappa^2} - 3(1 + w)\rho \right\}, \\
R_1 &\equiv -\frac{2k^4}{3a^4 H \kappa^2} + 3(1 + w)\rho \left(H + \frac{k^2}{3a^2 H} \right), \\
R_2 &\equiv -\frac{\kappa^2}{6H} \left\{ \frac{2k^2}{\kappa^2 a^2} - 3(1 + w)\rho \right\} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}), \\
R_3 &\equiv -\frac{k^2}{a^2} \dot{\phi} K_{,X} + \frac{\kappa^2}{6H} \left\{ \frac{2k^2}{a^2 \kappa^2} - 3(1 + w)\rho \right\} (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

ここで、 $\delta p = c_s^2 \delta \rho$ を用いた。故に、式 (3.51)–(3.53) をまとめると、以下の連立線形微分方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \Psi \\ \delta X \\ \delta \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ 0 & -\dot{\phi} & 1/\dot{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \Psi \\ \delta X \\ \delta \phi \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

無次元形に上の式を書き換えると、

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta \rho / \rho \\ \Psi \\ \delta X / X \\ \delta \phi / \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho / \rho \\ \Psi \\ \delta X / X \\ \delta \phi / \phi \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

となる。ここで、行列要素 A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
A_{11} &\equiv 3(w - c_s^2) + \frac{\kappa^2}{6H^2} \left\{ \frac{2k^2}{a^2\kappa^2} - 3(1+w)\rho \right\}, \\
A_{12} &\equiv -\frac{2k^4}{3a^4H^2\kappa^2\rho} + 3(1+w) \left(1 + \frac{k^2}{3a^2H^2} \right), \\
A_{13} &\equiv -\frac{\kappa^2}{12H^2} \left\{ \frac{2k^2}{\kappa^2a^2\rho} - 3(1+w) \right\} \dot{\phi}^2 (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}), \\
A_{14} &\equiv \frac{k^2}{3a^2H^2} \frac{1}{\rho} \phi \ddot{\phi} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}) - (1+w) \frac{\kappa^2}{2H^2} \phi (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}), \\
A_{21} &\equiv \frac{\kappa^2\rho}{6H^2}, \quad A_{22} \equiv -1 - \frac{k^2}{3a^2H^2}, \\
A_{23} &\equiv -\frac{\kappa^2}{12H^2} \dot{\phi}^2 (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}), \quad A_{24} \equiv \frac{\kappa^2}{6H^2} \phi (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}), \\
A_{31} &\equiv -\frac{\kappa^2\rho K_{,X}}{H^2(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})}, \\
A_{32} &\equiv \frac{2k^2}{a^2H^2} \frac{K_{,X}}{K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} - \frac{2\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \\
A_{33} &\equiv -2 \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} + \frac{\kappa^2}{2H^2} \dot{\phi}^2 K_{,X} - \frac{d}{dN} \ln \left| \frac{a^3}{\dot{\phi}} (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}) \right|, \\
A_{34} &\equiv -2 \frac{\phi}{\dot{\phi}(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \left\{ \frac{\kappa^2}{2H^2} \dot{\phi} K_{,X} (K_{,\phi} - \dot{\phi}^2 K_{,X\phi}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^3} \frac{d}{dN} (a^3 \dot{\phi} K_{,X\phi}) + \frac{k^2}{a^2H} K_{,X} - \frac{1}{H} K_{,\phi\phi} \right\}, \\
A_{41} &\equiv 0, \quad A_{42} \equiv -\frac{\dot{\phi}}{H\phi}, \quad A_{43} \equiv \frac{\dot{\phi}}{2H\phi}, \quad A_{44} \equiv -\frac{\dot{\phi}}{H\phi}.
\end{aligned}$$

3.6.2 物質の密度揺らぎの成長

前小々節では、摂動パラメータに対する連立微分方程式を導いたが、これから、この方程式を分解し、物質の密度揺らぎに対する一本の微分方程式に書き換えるという作業をする。その第一段階として、まずスカラー場の無い場合を考える。このとき、式 (3.55) の一行目と二行目から以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2\delta}{dN^2} - \left(A_{11} + A_{22} + \frac{d}{dN} \ln |A_{12}| \right) \frac{d\delta}{dN} \\
&\quad + \left(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - \frac{dA_{11}}{dN} + A_{11} \frac{d}{dN} \ln |A_{12}| \right) \delta. \tag{3.56}
\end{aligned}$$

この式は、式 (3.55) の一行目を N で微分した後に、 Ψ の微分および Ψ に比例する項を式 (3.55) の一行目および二行目をういて消去することで得られる。これは Λ CDM model における物質の密度揺らぎの微分方程式 (3.20) と等価なものである。この式 (3.56) に対して、音速 c_s を考慮したサブホライズン近似、すなわち $\partial_0\delta \simeq H\delta$ を使わずに、 $H^2\delta \ll k^2\delta/a^2$ のみを使うと、

$$0 = \frac{d^2\delta}{dN^2} + \left\{ \frac{1}{2} - 6w + 3c_s^2 - \frac{3}{2}w_{\text{eff}} + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \frac{d\delta}{dN} + \left\{ \frac{c_s^2k^2}{a^2H^2} + 3(w - c_s^2)(1 + 3w + 3w_{\text{eff}}) - \frac{3}{2}(1 + 3w)(1 + w_{\text{eff}}) + O\left(\left(\frac{k^2}{a^2H^2}\right)^{-1}\right) \right\} \delta. \quad (3.57)$$

と書き換えることができる。ここで、 $w_{\text{eff}} \equiv -2\dot{H}/3H^2 - 1$ と $(1 + w)\kappa^2\rho/(3H^2) = 1 + w_{\text{eff}}$ を用いた。次に、 k エッセンスの場合 ϕ をきちんと考慮した場合を考える。式 (3.55) の全ての行を用いると、以下のような四次の微分方程式を得ることが出来る。

$$\frac{d^4\delta}{dN^4} + M_3\frac{d^3\delta}{dN^3} + M_2\frac{d^2\delta}{dN^2} + M_1\frac{d\delta}{dN} + M_0\delta = 0, \quad (3.58)$$

ここで係数 M_3 、 M_2 、 M_1 、 M_0 の定義とその導出法については付録 A に掲載した。式 (3.58) の係数は非常に複雑であるので、この微分方程式を全く近似なしで解析することは難しい。そこで、小スケール近似 $k^2/a^2 \gg H^2$ のみを使って係数 M_3 、 M_2 、 M_1 、 M_0 を

展開する。そのリーディングオーダーまでを以下に示す。

$$\begin{aligned}
M_3 = & \left[7 + 3c_s^2 - 6w - \frac{2\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - 3(1+w)\frac{\kappa^2\rho}{H^2} + \frac{3\kappa^2\dot{\phi}^2 K_{,X}}{H^2} - \frac{6K_{,X}}{4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} \left(3 + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right) \right. \\
& - \frac{\dot{\phi}(10K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(\ddot{\phi}K_{,XX} + K_{,\phi X})}{HK_{,X}(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} + \frac{3\dot{\phi}K_{,X}}{H\ddot{\phi}(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \\
& \times \left. \left\{ 3(1+w)\kappa^2\rho K_{,X} - 3\kappa^2\dot{\phi}^2 K_{,X}^2 + 2K_{,\phi\phi} - 2\ddot{\phi}K_{,\phi X} - 6H\dot{\phi}K_{,\phi X} - 2\dot{\phi}^2 K_{,\phi\phi X} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\dot{\phi}^2 \ddot{\phi}K_{,\phi XX} \right\} \right] + O\left(\frac{a^2 H^2}{k^2}\right), \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{k^2}{a^2 H^2} \left(c_s^2 + \frac{K_{,X}}{K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} \right) + O(1), \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
M_1 = & \frac{k^2}{a^2 H^2} \left[c_s^2 \left\{ -\frac{(1+w)\kappa^2\rho}{2H^2} + \frac{\kappa^2\dot{\phi}^2 K_{,X}}{2H^2} - \frac{2\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right\} \right. \\
& + \frac{K_{,X}}{K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} \left\{ 2 - 6w - \frac{(1+w)\kappa^2\rho}{2H^2} + \frac{\kappa^2\dot{\phi}^2 K_{,X}}{2H^2} \right\} \\
& + c_s^2 \frac{-2K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX} - 6\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} K_{,X}}{4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} - c_s^2 \frac{\dot{\phi}(10K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(\ddot{\phi}K_{,XX} + K_{,\phi X})}{HK_{,X}(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \\
& + c_s^2 \frac{3K_{,X}}{H\ddot{\phi}(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \left\{ -3H\dot{\phi}^2(\ddot{\phi}K_{,XX} + 2K_{,\phi X}) \right. \\
& + 3(1+w)\kappa^2\rho\dot{\phi}K_{,X} - 3\kappa^2\dot{\phi}^3 K_{,X}^2 - 2\ddot{\phi}\dot{\phi}K_{,\phi X} + 2\dot{\phi}K_{,\phi\phi} \\
& \left. \left. - 2\dot{\phi}^3 \ddot{\phi}K_{,\phi XX} - 2\dot{\phi}^3 K_{,\phi\phi X} \right\} \right] + O(1), \quad (3.61)
\end{aligned}$$

$$M_0 = \frac{k^4}{a^4 H^4} \left(\frac{c_s^2 K_{,X}}{K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}} \right) + O\left(\frac{k^2}{a^2 H^2}\right). \quad (3.62)$$

これらの式を導く際に、 \dot{H} や $\dot{\rho}$ およびこれらの高次微分の項については、式 (3.31) と式 (3.33) を用いて消去した。さらに、場の方程式 (3.32) を $K_{,\phi}$ を消去するために使い、場の方程式の高次微分を $K_{,XXX}$ と $K_{,XXXX}$ 、 $K_{,XXXXX}$ を消去するために使用した。故に、これらの係数 (3.59)–(3.62) は背景時空の方程式 (3.30)–(3.33) およびその微分を使うことで、異なる表現に書き換えることも可能である。

これらの係数は一見複雑であるが、近似 $k^2/a^2 \gg H^2$ の下で WKB 近似を用いると、

式 (3.58) の解を以下のように表すことができる。

$$\delta(N) = \sum_{i=1}^4 C_i(N) \exp \left[\int^N dN' \frac{\lambda_i k}{aH} \right]. \quad (3.63)$$

ここで、 λ_i は式 (3.58) で、 $(k/aH)^4$ に比例する項に注目することで、 $\lambda_1 = -ic_s$ 、 $\lambda_2 = ic_s$ 、 $\lambda_3 = -ic_\phi$ 、 $\lambda_4 = ic_\phi$ と表される。一方、このとき、 $C_i(N)$ は式 (3.58) で、 $k^3/(aH)^3$ に比例する項に注目することによってその関数形を決めることができる。すなわち、式 (3.59)–(3.61) のうちのリーディングタームのみで決めることができる。 k エッセンス模型の音速 $c_\phi^2 \equiv (p_\phi)_{,X}/(\rho_\phi)_{,X}$ [28] は、今の場合 $K_{,X}/(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})$ として与えられる。ここで、 ρ_ϕ と p_ϕ はそれぞれ k エッセンスのスカラー場のエネルギー密度と圧力である。ここで、 c_s が実数であり、 $c_\phi(\phi, X)$ が実関数であるならば、 λ_i は純虚数であることが分かっているので、解 (3.63) は小スケール $k/a \gg H$ で速い振動するということになる。この振動については後で詳しく調べる。解 (3.63) が実関数であることを要請するなら、解を次の形に書き直すべきである。

$$\begin{aligned} \delta(N) = & C_1(N) \cos \left[\int^N dN' \frac{c_s k}{aH} \right] + C_2(N) \sin \left[\int^N dN' \frac{c_s k}{aH} \right] \\ & + C_3(N) \cos \left[\int^N dN' \frac{c_\phi k}{aH} \right] + C_4(N) \sin \left[\int^N dN' \frac{c_\phi k}{aH} \right], \end{aligned} \quad (3.64)$$

ここで、 $C_1(N)$ 、 $C_2(N)$ 、 $C_3(N)$ 、 $C_4(N)$ は N に関する実関数である。 $C_1(N)$ と $C_2(N)$ は、式 (3.58) の $k/(aH)$ に関して三次の項に注目することで、下のように表される。

$$\frac{d}{dN} \ln |C_1(N)| = \frac{d}{dN} \ln |C_2(N)| = \frac{1}{2}(-1 + 6w - 3c_s^2). \quad (3.65)$$

ここから、 $d \ln |C_1(N)|/dN = d \ln |C_2(N)|/dN \leq 0$ となることがわかるので、物質の密度揺らぎの成長解は存在しない。これらの解の振る舞い $C_1(N) \cos \left[\int^N dN' c_s k/(aH) \right]$ と $C_2(N) \sin \left[\int^N dN' c_s k/(aH) \right]$ は完全に、音速が c_s が零でないときの式 (3.57) の解の振る舞いと同じである。以下では、物質優勢期以降に注目して行くので、物質の状態方程式パラメータや音速をそれぞれ $w = 0$ 、 $c_s = 0$ と置く。このとき、式 (3.62) で $k^4/(a^4 H^4)$ に比例する項のうち、もっとも寄与の大きいものが零となる。そのため、もっと低いオーダーまで評価する必要がある。 $c_s^2 = w = 0$ のとき、 M_0 は、

$$M'_0 = -c_\phi^2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \frac{3}{2} \Omega_m \delta + O(1). \quad (3.66)$$

と書き換えられる。この M'_0 に対して、 $C_1(N) \cos \left[\int^N dN' c_s k / (aH) \right]$ と $C_2(N) \sin \left[\int^N dN' c_s k / (aH) \right]$ はもはや式 (3.58) の解ではない。これからの小々節では、クインテッセンス模型の場合と一般的な k エッセンス模型の場合に分けて、式 (3.58) の四つの解の性質について調べる。

3.6.3 クインテッセンス模型

k エッセンス模型の作用をクインテッセンス模型の作用 ($K(\phi, X) = -X + V(\phi)$) に限定するとき、 $C_3(N)$ および $C_4(N)$ の関数形は以下のように表される。

$$\frac{d}{dN} \ln |C_3(N)| = \frac{d}{dN} \ln |C_4(N)| = -\frac{3}{2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\ddot{\phi}}{2H\ddot{\phi}} - \frac{\dot{\phi}}{2H\ddot{\phi}} (3\dot{H} + V_{,\phi\phi}). \quad (3.67)$$

クインテッセンス模型における場の方程式 $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0$ を使うと、上式 (3.67) をより簡単に表すことが出来る。

$$\frac{d}{dN} \ln |C_3(N)| = \frac{d}{dN} \ln |C_4(N)| = \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (3.68)$$

故に、 $C_3(N), C_4(N) \propto \dot{\phi}(N)$ である。ここで、解 (3.64) の指数因子は純虚数であるので、成長因子 $d \ln \delta(N) / dN$ の有効的な成長は、 $f_{\text{eff}} \equiv d \ln |C_3(N)| / dN = d \ln |C_4(N)| / dN = \ddot{\phi} / (H\dot{\phi})$ で与えられる。たとえば、 $V(\phi) = B^2 e^{-\sqrt{3/2} \kappa \phi}$ のようなポテンシャルをもつクインテッセンス模型を考えるなら、厳密解が下のように求まっている [48]。

$$a^3(t) = (u_1 t + u_2) \left(\frac{1}{4} u_1 \kappa^2 B^2 t^3 + \frac{3}{4} u_2 \kappa^2 B^2 t^2 + v_1 t + v_2 \right), \quad (3.69)$$

$$\phi(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\kappa} \ln \frac{u_1 t + u_2}{\frac{1}{4} u_1 \kappa^2 B^2 t^3 + \frac{3}{4} u_2 \kappa^2 B^2 t^2 + v_1 t + v_2}, \quad (3.70)$$

ここで、 u_1, u_2, v_1, v_2 は積分の任意定数である。ただし、 $u_2 = v_2 = 0$ を条件 $a(0) = 0$ と $\Omega_\phi(0) = 0$ を満たすために課しておく。このとき、有効成長因子 $f_{\text{eff}} = \ddot{\phi} / (H\dot{\phi})$ は、

$$f_{\text{eff}}(t) = -\frac{3}{4} + \frac{9}{2} \frac{v_1}{u_1 \kappa^2 B^2 t^2 + 2v_1}. \quad (3.71)$$

と与えられる。ここで、定数 u_1 と v_1 は、式 (3.30) より、 $a_0 = 1$ のとき、 $\rho_0 = 4u_1 v_1 / 3\kappa^2$ という条件を満たさねばならない。故に、 $u_1 v_1 > 0$ である。これは、 $f_{\text{eff}}(t)$ が単調減少関数であるということを表しており、 $\lim_{t \rightarrow 0} f_{\text{eff}} = 3/2$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\text{eff}} = -3/4$ であることから、 f_{eff} の値は $-3/4 \leq f_{\text{eff}} \leq 3/2$ の範囲に限定される。現在の f_{eff} の値は $t_s^2 \equiv 4v_1 / \kappa^2 B^2 u_1$ として定義される t_s の値を $t_s = 15.8 \times 10^9$ 年ととることによって知

ることができる。この t_s の値は、 $\Omega_{m0} = 0.3$ と $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ という二つの条件から導出することができる [48]。現在の宇宙年齢、 $t_0 = 13 \times 10^9$ 年を代入することで、現在の有効成長因子の値が $f_{\text{eff}}(t_0) \approx 0.21$ となることがわかる。これは、現在の銀河団の観測から来る制限に矛盾はしていない [38]。

一方で、四つの線形独立な解のうち残りの二つの性質については以下のようにして決まる。クインテッセンスモデルでは、係数 M'_0 は、

$$M'_0 = -\frac{k^2}{a^2 H^2} \frac{3}{2} \Omega_m \delta + O(1). \quad (3.72)$$

と表される。式 (3.58) の項のうち、 $k/(aH)$ の二次の項に注目すると、以下のような方程式を得る。

$$\frac{d^2 \delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2} \Omega_m \delta = 0, \quad (3.73)$$

これは準静的な解を生じる方程式である。この方程式 (3.73) は式 (3.50) と同一である。つまり、この方程式から得られる成長解の成長因子は、物質優勢期のときに 1 となり、それ以降減少するという振る舞いをするようになる。一方で、振動解のほうの有効成長因子は物質優勢期のときに $3/2$ であったので、ここで考えた指数的なポテンシャルを持つクインテッセンスモデルの場合には振動解が優勢という結論となる。

3.6.4 一般的な k エッセンスモデル

一般的な k エッセンスモデルの場合には、式 (3.73) に対応するものは、次のように書き表される。

$$c_\phi \left\{ \frac{d^2 \delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2} \Omega_m \delta \right\} = 0. \quad (3.74)$$

この式 (3.74) は $c_\phi \neq 0$ のとき、すなわち $K_{,X} \neq 0$ のときに式 (3.50) と一致する。

一方で、振動解の係数 $C(N)$ は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN} \ln |C_3(N)| &= \frac{d}{dN} \ln |C_4(N)| \\ &= \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{5\dot{\phi}K_{,\phi X} + \dot{\phi}\ddot{\phi}K_{,XX}}{HK_{,X}} + \frac{\dot{\phi}(10K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(\ddot{\phi}K_{,XX} + K_{,\phi X})}{2HK_{,X}(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \\ &\quad + \left\{ \frac{5}{4H(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} - \frac{3K_{,X}}{H(K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})(4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})} \right\} \\ &\quad \times \left(\dot{\phi}K_{,\phi X} + 3\dot{\phi}\ddot{\phi}K_{,XX} + \dot{\phi}^3 K_{,\phi XX} + \dot{\phi}^3 \ddot{\phi}K_{,XXX} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

と決まる。ここで、場の方程式 (3.32) の微分を式を簡単にするために用いた。ここから、有効成長因子 $f_{\text{eff}} = d \ln |C_3(N)|/dN = d \ln |C_4(N)|/dN$ のリコンストラクションが出来るかどうかについて調べる。その前に、背景時空のリコンストラクションについて簡単に振り返る。ここで言うリコンストラクションというのは、ある量、たとえば $a(t)$ や $H(t)$ 、 $f(N) \equiv d \ln \delta(N)/dN$ などについて、先にその時間発展の仕方を与えてから、そのような解を導く作用を構成するという方法である。これは、通常行う、作用を変分して解を得るという方法と逆の操作であることからリコンストラクションと呼ばれる。 k エッセンス模型において、 $\phi(t)$ の再定義は、関数 $K(\phi, X)$ の再定義によって吸収できるので、私たちはいつでも、ある全単射 $g(t)$ を使うことで、 $\phi(t) = g(t)$ と書くことができる。この関数 $g(t)$ を $\phi = t$ と選んだとき、 k エッセンス模型の作用は任意の背景時空の成長に対して、再構築できることを第二節で見た。その作用は以下の通りである。

$$\begin{aligned} K(\phi, X) &= K^{(n)}(\phi) \left(X - \frac{1}{2} \right)^n, \\ K^{(0)}(\phi) &\equiv \left(w\rho + \frac{3H^2}{\kappa^2} + \frac{2\dot{H}}{\kappa^2} \right) \Big|_{t=\phi}, \\ K^{(1)}(\phi) &\equiv \left\{ \frac{2\dot{H}}{\kappa^2} + (1+w)\rho \right\} \Big|_{t=\phi}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

$(X - 1/2)$ の二次以上に比例する項は背景時空の成長には寄与してこない。故に、その係数 $K^{(n)}(\phi)$, ($n > 1$) を ϕ の任意の関数として選ぶことができる。

ここで、この関数 $K^{(2)}(\phi)$ の任意性を用いて、任意の時間発展をする、物質の密度揺らぎの有効成長因子を導くような作用をリコンストラクションできるかどうかということを考える。まず、式 (3.75) が下記のように書き直せることに注目する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN} \ln |C(N)| &= \frac{d}{dN} \ln |\dot{\phi}| - \frac{3}{4} \frac{d}{dN} \ln |K_{,X}| \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{d}{dN} \ln |K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}| + \frac{d}{dN} \ln |4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}|, \end{aligned} \quad (3.77)$$

ここで式 (3.75) より、 $C(N) \propto C_3(N) \propto C_4(N)$ という表記を用いた。このとき、式 (3.77) の上の式より、下記の関係が成り立つことがすぐに分かる。

$$C(N)^4 K_{,X}^3 = \text{const.} \times \dot{\phi}^4 (K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX}) (4K_{,X} + \dot{\phi}^2 K_{,XX})^4. \quad (3.78)$$

有効成長因子 f_{eff} の積分を用いて $C(N)$ は表されるので、 f_{eff} に対するリコンストラクションは、 f_{eff} が積分可能であり、かつ式 (3.78) が $K_{,XX}$ に対して代数的に解ける

ときに可能である。しかしながら、式 (3.78) は $K_{,XX}$ に関して五次の方程式であるので一般には解くことが出来ない。そのため、リコンストラクションをすることはできない。しかし、近似的にはリコンストラクションをすることは可能である。 α 、 $y(N)$ を、 $\alpha(N) \equiv \dot{\phi}^2 K_{,XX}/K_{,X}$ と $y(N) \equiv C^4(N)/(\text{const.} \times \dot{\phi}^4 K_{,X}^2)$ として定義すると、式 (3.78) を

$$y(N) = (1 + \alpha(N))(4 + \alpha(N))^4. \quad (3.79)$$

と書き換えることができる。つまり、任意の y に対して、一つ以上の実解 α が存在する。具体的に言うと、 $y < -2^8 3^5 / 5^5$ もしくは $0 < y$ のときには式 (3.79) に対して、一つの実解がある。また、 $y = -2^8 3^5 / 5^5, 0$ のときには二つの実解があり、 $-2^8 3^5 / 5^5 < y < 0$ のときには三つの実解がある。そのため、任意の $y(N)$ の振る舞いに対して、 $\alpha(N)$ を定義することが可能である。しかしながら、連続関数 $y(N)$ が領域、 $[-2^8 3^5 / 5^5, 0]$ を横切るとき、関数 $\alpha(N)$ は複値関数もしくは不連続関数とならなければならないことに注意しておく必要がある。

3.7 振動

式 (3.75) より、 $C_3(N)$ と $C_4(N)$ は定数倍の違いしかないので、振動解は一般に下の形にかけることがわかる。

$$\delta_o(N) = C(N) \sin \left[\int^N dN' \frac{c_\phi k}{aH} + \omega \right], \quad (3.80)$$

ここで、 ω は任意の実定数である。式 (3.80) の振動数は、 $H_0 = h \times (9.777752 \text{ Gyr})^{-1}$ 、 $k = 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ という値を用いると、 $ck/(a_0 H_0) \approx 300$ と書くことができる。これは、クインテッセンスモデルで現在近くの振動数を評価していることに対応する。なぜなら、クインテッセンスモデルでは常に $c_\phi = c$ を満たすからである。これから、どのくらいの頻度で物質の密度揺らぎが零になるのかを評価する。まず、正弦関数は引数が π 変化するごとに零点をとるので、 $ck/(a_0 H_0) \approx 300$ であったことを使うと、 $300\Delta z \approx \pi$ より、 $\Delta z \approx \pi/300$ という結果を得ることができる。つまり、現在近くでは赤方偏移 0.01 ごとに物質の密度揺らぎが零になることを表している。一般的に、解 (3.80) の振動数は赤方偏移 $z = z'$ 付近では、 $ck(1 + z')/(a_0 H(z = z'))$ と与えられる。一方で、 N の差分、 $\Delta N(z') \equiv N(z' - \Delta z) - N(z')$ は、 N の定義から、 $\ln(1 + z')/(1 + z' - \Delta z)$ と表すことができるので、 $|1 + z'| \gg |\Delta z|$ の時には、 $\Delta N \approx \Delta z/(1 + z')$ という近似が正当化される。赤方偏移 z の変化に対応する振動数は、このとき $ck/(a_0 H(z = z'))$ と表される。

赤方偏移が零のときと z' のときの、振動数の違いは $H(z)$ だけである。もし、 Λ CDM 模型でのスケールファクター、 $a(t) = (\rho_{m0}/\rho_\Lambda)^{1/3} \sinh^{2/3}[\sqrt{3\kappa^2\rho_\Lambda/4} t]$ を仮定すると、比 $H(z = z')/H(z = 0)$ が求まるので、具体的な振動数の値を知ることができる。赤方偏移 $z = 1$ で波数 $k = 0.01h \text{ Mpc}^{-1}$ のゆらぎを考えると、赤方偏移の変化に対応する振動数は、比 $H(z = 1)/H(z = 0)$ がおよそ 1.7 であるので、 $z = 0$ 、 $k = 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ のときに比べて大体 17 分の 1 となる。ここで、 $\Omega_\Lambda = 0.74$ 、 $\Omega_{m0} = 0.26$ 、 $h = 0.72$ を用いた。故に、物質の密度揺らぎが零になる点の間隔は $z = 0$ 、 $k = 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ のときに比べて大きくなり、赤方偏移が約 0.18 大きくなる毎に零点が現れるという結論が得られる。

次に、赤方偏移を固定して波数 k を動かすことを考えてみる。 k の変化に対する振動数は、このとき $\int^N dN' c_\phi / (aH)$ と表される。これは、 $dN = H(t)dt$ を使うと、 $\int^t dt c_\phi / a(t)$ と書き直すこともできる。ここで、積分範囲の下端を輻射と物質のエネルギー密度が同じとなった時間 t_{eq} にとることにする。ここでもまた、 $c_\phi = c$ で、 $a(t) = (\rho_{m0}/\rho_\Lambda)^{1/3} \sinh^{2/3}[\sqrt{3\kappa^2\rho_\Lambda/4} t]$ の場合を考えると、現在の振動数の値は、 $c \int_{t_{\text{eq}}}^{t_0} dt / a(t) \approx 1.45 \times 10^4 \text{ Mpc}$ と与えられる。ここで、 $t_0 = 13.7 \times 10^9$ 年、 $t_{\text{eq}} = 4000$ 年、恒星年 = 31558149.8 s を用いた。故に、位相を π 変えるために必要な k の変化量は、 $\Delta k \approx 2.17 \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ と与えられる。この値はあまりに小さいので、観測的に確かめることは難しいだろう。また、この Δk を $z = 1$ で考えると、積分範囲の上端はおよそ $t = 6.0 \times 10^9$ 年となるので $z = 0$ の場合と比べて約 1.3 倍になる。しかしながら小さいことに変わりはない。

3.8 k エッセンス模型における物質の密度揺らぎの性質のまとめ

サブホライズン近似を用いずに小スケール近似 $k/(aH) \gg 1$ のみを用いて、物質の密度揺らぎの発展を調べた。その結果として、 k エッセンス模型における音速によって引き起こされる振動解があるということや、その有効成長因子が $K_{,X}$ 、 $K_{,XX}$ 、 $\dot{\phi}$ に依存するという特徴的な物質の密度揺らぎの振る舞いを知ることができた。暗黒エネルギーのモデルの検証という立場からすると、この有効成長因子については近似的なりコンストラクションが可能であることが示されたために、それほど重要ではない。しかし、 k エッセンス模型での音速によって引き起こされる振動というものは Λ CDM 模型では決して説明することのできない、特徴的なものであり、その点に明らかな違いを見出すことができる。そして、最後の小節で見たように、この振動は $k = 0.01h \text{ Mpc}^{-1}$ 、 $z = 1$ 付近で、赤方偏移 z の変化に対して観測することができると期待される。

一方で、準静的な解を与えるような二次の物質の密度揺らぎに関する微分方程式も導く

ことができた。この微分方程式は、 $c_\phi \neq 0$ のときには、サブホライズン近似を用いて導出された方程式と一致する。そのため、振動解の中には成長解が無く、準静的な解の中には成長解があり、振動を観測することが不可能であるという場合も存在する。しかしながら、そのような状況を実現するためにはいくつかの条件を作用に課さなければならない。また、クインテッセンスの場合に見たように、振動解が準静的な解よりも優勢な成長解となる場合もあるので、この振動解はそれぞれの模型で詳しく調べる必要がある。

もしこのような振動が発見されなければ k エッセンス模型は厳しく制限されるであろう。また逆に、このような振動が観測されれば、スカラー場による暗黒エネルギーの模型もしくは暗黒物質の模型の一つの証拠となるかもしれない。

3.9 F(R) 重力理論における宇宙論的摂動論

現在、有力と見られている F(R) 重力の模型は、地球近傍の重力実験を満たすためにそのパラメータが強く制限されており、背景時空の成長からでは Λ CDM 模型と見分けがつかなくなってしまっている。そこで、ここではどのような場合に差異が見られるかということに注目し、物質の密度揺らぎの準定常な解だけではなく、振動解についても詳しく調べる。数値計算の結果、この振動的な性質が見られた例としては、L. Pogosian and A. Silvestri[49], S. Carloni, E. Elizalde, S. Odintsov[50] などがある。この節の前半では、近似を用いた手法で物質の密度揺らぎの解の振る舞いを明らかにして行き、またその応用として発散のある系における密度揺らぎの振る舞いを考察する。そして後半では、近似を用いない密度揺らぎの微分方程式 [51] から出発し、場合わけをしつつ、物質の密度揺らぎがどのような時間発展をするかを調べている。また、現在有力と見られている具体的な F(R) 重力の模型についても考察する。

3.9.1 背景時空、および摂動の一次の方程式

まず、下のような作用を持つ F(R) 重力理論の模型を考える。

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(R)] + S_{\text{matter}}. \quad (3.81)$$

ここで、 f は曲率 R の任意の関数であり、 $f(R)$ は通常のアインシュタイン重力からのずれを表している。空間曲率が零の FLRW 計量 $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 dx^i dx^i)$ を用いるとき、アインシュタイン方程式は、

$$\frac{3\mathcal{H}'}{a^2}(1 + f_R) - \frac{1}{2}(R + f) - \frac{3\mathcal{H}}{a^2} f'_R = -\kappa^2 \rho \quad (3.82)$$

と

$$\frac{1}{a^2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(1 + f_R) - \frac{1}{2}(R + f) - \frac{1}{a^2}(\mathcal{H}f'_R + f''_R) = \kappa^2 w \rho \quad (3.83)$$

として書くことができる。ここで、 $R = 6a^{-2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)$ 、 $f_R \equiv df(R)/dR$ であり、プライムは共形時間 η に関する微分を表している。また、 \mathcal{H} は $\mathcal{H} \equiv a'/a$ として定義されており、 w は状態方程式 (EoS) パラメータであり $w = p/\rho$ として定義される。連続の式は下記のように表される。

$$\rho' + 3(1 + w)\mathcal{H}\rho = 0. \quad (3.84)$$

上記の式、(3.82)–(3.84) は宇宙の背景時空の方程式である。一方で、ニュートニアンゲージの計量 $ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 + 2\Psi)\sum_{i=1}^3 dx^i dx^i]$ を用いた線形化されたアインシュタイン方程式の、(00) 成分、(ii) 成分、(0i) = (i0) 成分、(ij), $i \neq j$ 成分はフーリエ空間で以下のように表される：

$$(1 + f_R)\{-k^2(\Phi + \Psi) - 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + (3\mathcal{H}' - 6\mathcal{H}^2)\Phi - 3\mathcal{H}'\Psi\} + f'_R(-9\mathcal{H}\Phi + 3\mathcal{H}\Psi - 3\Psi') = \kappa^2 \rho a^2 \delta, \quad (3.85)$$

$$(1 + f_R)\{\Phi'' + \Psi'' + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 3\mathcal{H}'\Phi + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Psi\} + f'_R(3\mathcal{H}\Phi - \mathcal{H}\Psi + 3\Psi') + f''_R(3\Phi - \Psi) = c_s^2 \kappa^2 \rho a^2 \delta, \quad (3.86)$$

$$(1 + f_R)\{\Phi' + \Psi' + \mathcal{H}(\Phi + \Psi)\} + f'_R(2\Phi - \Psi) = -\kappa^2 \rho a^2 (1 + w)v, \quad (3.87)$$

$$\Phi - \Psi - \frac{2f_{RR}}{a^2(1 + f_R)}\{3\Psi'' + 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - k^2(\Phi - 2\Psi)\} = 0. \quad (3.88)$$

ここで、 $c_s^2 \equiv \delta p/\delta \rho$ 、 $\delta \equiv \delta \rho/\rho$ を用いた。最後に、連続の方程式 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ の摂動から、

$$3\Psi'(1 + w) - \delta' + 3\mathcal{H}(w - c_s^2)\delta + k^2(1 + w)v = 0, \quad (3.89)$$

$$\Phi + \frac{c_s^2}{1 + w}\delta + v' + \mathcal{H}v(1 - 3w) = 0. \quad (3.90)$$

が得られる。以下では、物質優勢期以降に焦点を当て、状態方程式パラメータと音速を $w = c_s = 0$ ととる。

3.10 近似を用いた解析とその応用

3.10.1 サブホライズン近似

これから、物質の密度揺らぎの微分方程式をサブホライズン近似によって導く。しかしながら、振動解は k エッセンス模型の場合に見たように、そのような方法では導くこと

はできない。そのため振動解を導く方法については後で述べる。形式的には、サブホライズン近似は $\partial/\partial\eta \sim \mathcal{H} \ll k$ として与えられるが、この近似には二つの近似、すなわち小スケール近似 $\mathcal{H} \ll k$ と準静的近似 $\partial/\partial\eta \sim \mathcal{H}$ を含んでいる。これから式 (3.85)–(3.88) に対してサブホライズン近似を適用し、物質の密度揺らぎの式を導出して行くが、計算の順序に気をつける必要がある。なぜなら、近似を用いない厳密な計算をするときとは違って、物質の密度揺らぎの式を求める方法が一通りではないからである。たとえば、 $|f_{\text{RR}}|k^2/a^2 \ll 1$ のときには δ の方程式を導出する方法は、少なくとも二通りある。

一つ目の方法は下記の通りである。

1. 式 (3.89) と (3.90) を組み合わせることで v を消去する。
2. 式 (3.88) から $\Phi \approx \Psi$ の関係を読み取る。
3. サブホライズン近似を (3.85) に適用することで、
 $-2k^2(1 + f_R)\Phi \approx \kappa^2 \rho a^2 \delta$ の関係を得る。
4. 上の手順で得られた式をあわせて、 δ だけで表された式を作る。

もう一つの方法は以下のように与えられる。

1. 式 (3.87) と (3.89) を組み合わせて変数 v を消去する。
2. 式 (3.88) から $\Phi \approx \Psi$ の関係を読み取る。
3. サブホライズン近似を (3.85) に適用することで、
 $-2k^2(1 + f_R)\Phi \approx \kappa^2 \rho a^2 \delta$ の関係を得る。
4. 上の手順で得られた式をあわせて、 δ だけで表された式を作る。

二つの手順で異なる点は、一番目の行程だけである。しかしながら、その結果得られた式は全く異なっている。そのため、どちらが本当に正しい式なのかを確認しなければならないが、答えは実は簡単である。これまで考えてきた近似計算は、リーディングオーダーしか信用することはできない。しかしながら、二番目の方法ではリーディングオーダーが相殺するということが起こってしまう。そのため、正しい式は一番目の手順で得られたものであり、

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3a^2\Omega_m}{2(1 + f_R)}\delta = 0. \quad (3.91)$$

と与えられる。同様の手順で、 $|f_{\text{RR}}|k^2/a^2 \gg 1$ のときにもサブホライズン近似を用いて

以下の式を導くことができる。

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{2a^2\Omega_m}{(1+f_R)}\delta = 0, \quad (3.92)$$

なぜなら、 $\Phi \approx 2\Psi$ という関係を式 (3.88) から読み取ることができるためである。

3.10.2 超相対論的な近似

先の小々節で述べたように、振動解はサブホライズン近似を用いたときには導くことはできない。そのため、ここでは超相対論的な近似 $\partial/\partial\eta \sim k$ と小スケール近似 $\mathcal{H} \ll k$ をサブホライズン近似の代わりに用いる。 δ に関する式を得るために、まず式 (3.86) より $\Phi \approx -\Psi$ の関係が成り立つことを仮定する。このとき、式 (3.88) より、

$$\Psi + \frac{3f_{RR}}{a^2(1+f_R)}(\Psi'' + k^2\Psi) \approx 0. \quad (3.93)$$

の関係が得られる。もし $|f_{RR}|k^2/a^2 \ll 1$ なら、自明な解しか存在しない。つまり、条件 $|f_{RR}|k^2/a^2 \ll 1$ を満たすような $F(R)$ 重力のモデルは、 $e^{ik\eta}$ という形の Φ や δ の振動解を持たないのである。一方で、 $|f_{RR}|k^2/a^2 \gg 1$ の時には、 Ψ は方程式、 $\Psi'' + k^2\Psi \approx 0$ を満たさなければならない。この方程式の解は、

$$\Psi = C_1 e^{-ik\eta} + C_2 e^{ik\eta}, \quad (3.94)$$

と与えられる。ここで、 C_1 と C_2 は積分定数である。このとき、式 (3.89) と (3.90) を組み合わせることで、 δ と Ψ の間の関係式 $\delta'' \approx 2\Psi''$ を得ることができる。つまり、 δ の解は、

$$\delta = 2C_1 e^{-ik\eta} + 2C_2 e^{ik\eta} + C_3 \eta + C_4, \quad (3.95)$$

と表すことができる。ここで C_3 と C_4 は積分定数である。しかしながら、振動解の振る舞いはリーディングオーダーだけで決まるわけではないので、振動解についてきちんと調べるためには、近似を用いない計算が必要となる。

3.10.3 特異点近くの振る舞い

将来的に物理量が発散するような、いくつかの宇宙のシナリオが知られている [52]。

- I 型 (“ビッグリップ”) : 有限の時間 $t \rightarrow t_s$ に対して $a \rightarrow \infty$ 、 $\rho_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ 、 $|p_{\text{eff}}| \rightarrow \infty$ となるもの。この型は、 $t = t_s$ で、 ρ_{eff} と p_{eff} が有限となるものも含む。

- II 型 (“突然型”) : 有限の時間 $t \rightarrow t_s$ に対して $a \rightarrow a_s$ 、 $\rho_{\text{eff}} \rightarrow \rho_s$ 、 $|p_{\text{eff}}| \rightarrow \infty$ となるもの。
- III 型 : 有限の時間 $t \rightarrow t_s$ に対して $a \rightarrow a_s$ 、 $\rho_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ 、 $|p_{\text{eff}}| \rightarrow \infty$ となるもの。
- IV 型 : 有限の時間 $t \rightarrow t_s$ に対して $a \rightarrow a_s$ 、 $\rho_{\text{eff}} \rightarrow 0$ 、 $|p_{\text{eff}}| \rightarrow 0$ であるが、 H の高次微分が発散するもの。この型には、 H の高次微分が発散しても、 p_{eff} (ρ_{eff}) が有限であるもの。もしくは、 p_{eff} と ρ_{eff} 両方が有限であるものも含まれている。

更に、最近ではリトルリップ [53] と呼ばれるシナリオについても議論がされている。これは有限時間での発散ではないが、束縛系の破壊を引き起こすシナリオである。ここから、これらの特異点の近くでの物質の密度揺らぎの振る舞いを考えるが、I 型、III 型およびリトルリップのシナリオでは、スーパーホライズン近似をすることと等価となるためにここでは考えない。以下では、II 型、IV 型特異点のまわりでの物質の密度揺らぎの準定常解の振る舞いを考える。

II 型

II 型特異点の場合、ハッブル率 H は有限であるが、ハッブル率の微分 \dot{H} は発散している。そのため、以下では k^2 、 $\mathcal{H}^2 \ll \mathcal{H}'$ という近似を用いる。また、準静的近似 $\partial_\eta \sim \mathcal{H}$ も使って解析して行く。まず δ の式を得るために、式 (3.88) に注目する。 $\Psi'' \sim (\mathcal{H}\Psi)' \sim \mathcal{H}'\Psi$ の関係が成り立つことに注意すると、式 $\Psi'' \approx -2\mathcal{H}'\Phi$ が成立することがわかる。また、 \mathcal{H} の一階微分以上の項以外は有限である、ということに注意すると、関係式 $2\Phi \approx \Psi$ 式 (3.87) と式 (3.89) から得られる。このとき、 Ψ に関する微分方程式、 $\Psi'' + \mathcal{H}'\Psi = 0$ が得られる。この微分方程式の解は $\Psi = \text{const.}/a + \text{const.}e^{-a}$ と書くことができる。このとき、 $\Psi' = -\mathcal{H}\Psi$ が成り立つので、式 (3.85) を用いると、以下の式が成り立つことがわかる。

$$\Psi'' \approx \frac{2\mathcal{H}'}{3\mathcal{H}' - 7\mathcal{H}f'_R} \frac{\kappa^2 \rho a^2}{1 + f_R} \delta. \quad (3.96)$$

一方で、式 (3.89) と式 (3.90) から、パラメータ v を消去すると、

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - 3\Psi'' - 3\mathcal{H}'\Psi + k^2\Phi = 0, \quad (3.97)$$

が得られる。故に、式 (3.96) を式 (3.97) に代入することで、物質の密度揺らぎの方程式、

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{6\mathcal{H}'}{3\mathcal{H}' - 7\mathcal{H}f'_R} \frac{\kappa^2 \rho a^2}{1 + f_R} \delta \approx 0. \quad (3.98)$$

を得ることができる。この式 (3.98) は、明らかに式 (3.91) や (3.92) と異なっている。つまり、このような将来の特異点があると、宇宙の背景時空の発展だけではなく、物質の密度揺らぎの振る舞いも全く変わってくることを意味している。

IV 型

IV 型特異点の場合には、 $k^3, \mathcal{H}^3, \mathcal{H}\mathcal{H}' \ll \mathcal{H}''$ という近似を適用すべきである。このとき、式 (3.82)、(3.83) より、 $\mathcal{H}^2 f_{RR}, \mathcal{H}^4 f_{RRR} \ll 1$ という関係が成り立つことがわかる。この関係を使うと、式 (3.88) より、 $\Phi \approx \Psi$ となることがわかり、式 (3.85) と式 (3.87) から、

$$\Psi \approx \Phi \approx \frac{\kappa^2 \rho a^2}{1 + f_R} \left\{ -4k^2 + \frac{6\kappa^2 \rho a^2}{1 + f_R} + \frac{18\kappa^2 \rho \mathcal{H}^2 a^2}{(1 + f_R)k^2} \right\}^{-1} \left[\left\{ 2 - \frac{3\kappa^2 \rho a^2}{(1 + f_R)k^2} \right\} \delta - \frac{6\mathcal{H}}{k^2} \delta' \right]. \quad (3.99)$$

が成立する。この式 (3.99) を式 (3.97) に代入することで、 δ に関する三次の微分方程式を得ることができるが、ここでは陽に書き下すことはしない。

ここで、A. de la Cruz-Dombriz らによって書かれた注目すべき論文 [51] があることを紹介しておきたい。この論文では F(R) 重力理論において、物質の密度揺らぎの微分方程式を代数的な方法で近似を用いずに導いている。しかしながら、この方程式は非常に複雑であるために、物質の密度揺らぎの成長を解析するには何らかの近似を用いる必要がある。ただし近似を使う順番を変えると、結果が変わってしまうので注意が必要である。

3.11 4 次の微分方程式からの解析

事例 I まず、小スケール近似 $\mathcal{H}^2 \ll k^2$ を用いたときの物質の密度揺らぎ $\delta\rho/\rho$ の微分方程式は論文 [51] の式 (31) および付録より、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta'''' + \mathcal{H} \left(3 + \frac{f'_R}{\mathcal{H}(1 + f_R)} + O(\mathcal{H}^2/k^2) \right) \delta'' + \mathcal{H}^2 \left(\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} + O(1) \right) \delta'' \\ + \mathcal{H}^3 \left(\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} + O(1) \right) \delta' - \mathcal{H}^4 \left(\frac{2\kappa^2 k^2 \rho a^2}{3\mathcal{H}^4(1 + f_R)} + O(1) \right) \delta = 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

ここで、近似 $\mathcal{H}^2 \ll k^2$ の下で準優勢な項の具体的な形を表すことは省略した。まず、 δ の準静的な解に注目して、式 (3.100) から k^2 に比例する項を読み取ると、

$$\frac{d^2 \delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} - \frac{2}{1 + f_R} \Omega_m \delta = 0. \quad (3.101)$$

を得る。ここで、有効状態方程式パラメータおよび物質のエネルギー密度比を、 $w_{\text{eff}} = -2\dot{H}/(3H^2) - 1$ 、 $\Omega_m = \kappa^2 \rho/(3H^2)$ として定義した。また、 H は通常のハッブル率 $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ であり、 N は $N \equiv \ln a$ として定義される。物質優勢期では式 (3.101) は、

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \frac{1}{2} \frac{d\delta}{dN} - \frac{2}{1+f_R} \delta = 0. \quad (3.102)$$

となる。 δ の成長因子、 $f \equiv d \ln |\delta|/dN$ は、このとき、 $|f_R| \ll 1$ を満たすならば、 $f = -1/4 \pm \sqrt{33}/4$ と与えられる。故に、物質優勢期における成長因子は Λ CDM 模型のもの、 $f_{\text{max}} = 1$ と比べて大きい。一方で、四次の微分方程式 (3.100) には、準定常解だけでなく下記の振動解もある。

$$\begin{aligned} \delta(\eta) &= C_1(\eta)e^{ik \int d\eta} + C_2(\eta)e^{-ik \int d\eta} \\ &= \text{const.} \times \frac{1}{a\sqrt{1+f_R}} e^{ik \int d\eta} + \text{const.} \times \frac{1}{a\sqrt{1+f_R}} e^{-ik \int d\eta} \end{aligned} \quad (3.103)$$

ここで、近似 $\mathcal{H}^2 \ll k^2$ の下で WKB 近似を使った。この振動解の有効的な振幅の成長は $C_1(\eta)$ もしくは $C_2(\eta)$ によって決まるので、有効成長因子 f_{eff} として、 $f_{\text{eff}} \equiv d \ln |C_1|/dN = d \ln |C_2|/dN$ と定義しておくると便利である。今の場合には、この有効成長因子は、

$$f_{\text{eff}} = -1 - 3 \left(\frac{\ddot{H}}{H^3} + 4 \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{H^2 f_{RR}}{1+f_R}, \quad (3.104)$$

と与えられる。この有効成長因子の成長は個々の模型に依存するが、条件 $|H^2 f_{RR}| \ll 1$ を満たさない模型の場合には振動解は成長解にもなりうる。

事例 II 次に、 $(k/\mathcal{H})^2 |f_R| \ll 1$ と $|f_{RR}| k^2/a^2 \gg 1$ の条件を満たす場合について考える。同様に、物質の密度揺らぎの方程式は論文 [51] の式 (31) および付録から、以下のよう求められる。

$$\begin{aligned} \delta'''' + \mathcal{H} (3 + O(\mathcal{H}^2/k^2)) \delta'''' + \mathcal{H}^2 (k^2/\mathcal{H}^2 + O(1)) \delta'' \\ + \mathcal{H}^3 (k^2/\mathcal{H}^2 + O(1)) \delta' - \mathcal{H}^4 \left\{ \frac{4k^2}{3\mathcal{H}^2} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \right) + O(1) \right\} \delta = 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

k^2 に比例する項に注目すると、

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} - 2(1 + w_{\text{eff}}) \delta = 0. \quad (3.106)$$

を得る。物質優勢期では、式 (3.106) は、

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \frac{1}{2} \frac{d\delta}{dN} - 2\delta = 0 \quad (3.107)$$

となる。この準静的な解の成長因子は、 $f = -1/4 \pm \sqrt{33}/4$ であり、事例 I の場合と同じである。一方で振動解は、

$$\delta(\eta) = C_1 \frac{1}{a} e^{ik \int d\eta} + C_2 \frac{1}{a} e^{-ik \int d\eta}, \quad (3.108)$$

となる。ここで、 C_1 と C_2 は任意定数である。この解の有効成長因子は、

$$f_{\text{eff}} = -1. \quad (3.109)$$

と表される。もし、 $|H^2 f_{RR}| \ll 1$ であれば式 (3.109) は、式 (3.104) と同じであるが、もし、 $H^2 f_{RR}$ が無視できないときには事例 I の場合とは異なる結果となる。

事例 III $(k/\mathcal{H})^2 |f_R| \ll 1$ かつ $|f_{RR}| k^2/a^2 \ll 1$ の場合には δ の四次の微分方程式は下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta'''' + \left\{ \frac{12\mathcal{H}^2(-2 + \mathcal{H}''/\mathcal{H}^3) f_{RRR}}{a^2 f_{RR}} + \frac{1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2}{-2 + \mathcal{H}''/\mathcal{H}^3} + O(\mathcal{H}^2/\chi^2) \right\} \mathcal{H} \delta'''' \\ + \chi^2 \left\{ (1 + O(\mathcal{H}^2/\chi^2)) \delta'' + \mathcal{H} (1 + O(\mathcal{H}^2/\chi^2)) \delta' + \mathcal{H}^2 \left(2 \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} - \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}^3} + O(\mathcal{H}^2/\chi^2) \right) \delta \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\chi \equiv \sqrt{\frac{a^2}{3f_{RR}} \frac{1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2}{2 - \mathcal{H}''/\mathcal{H}^3}}. \quad (3.111)$$

χ^2 に比例する項に注目すると、

$$\frac{d^2 \delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w_{\text{eff}} \right) \frac{d\delta}{dN} + \left(2 \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H^3} \right) \delta = 0. \quad (3.112)$$

を得る。式 (3.112) の解は f_R や f_{RR} だけではなく、 f_{RRR} や f_{RRRR} にも依存している。それは、FL 方程式、(3.82) と (3.83) から下記の関係があることが分かるからである。

$$2 \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H^3} = -\frac{3\Omega_m}{2(1+f_R)} - \frac{f'_R}{\mathcal{H}(1+f_R)} - \frac{f''_R}{\mathcal{H}^2(1+f_R)} + \frac{f'''_R}{2\mathcal{H}^3(1+f_R)}. \quad (3.113)$$

故に、この準静的な解は宇宙の背景時空の振る舞いからだけでは決めることはできない。一方で、振動解は、

$$\delta(\eta) = C_1 e^{\int f_{\text{eff}} dN + i \int \chi d\eta} + C_2 e^{\int f_{\text{eff}} dN - i \int \chi d\eta}. \quad (3.114)$$

と与えられる。ここで、 C_1 と C_2 は任意定数である。この解 (3.114) に対する、有効成長因子 f_{eff} は、

$$f_{\text{eff}} = 1 - \frac{5}{2} \frac{d}{dN} \ln |\chi| - 2 \frac{d}{dN} \ln |f_{RR}| + \frac{1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2}{2 - \mathcal{H}''/\mathcal{H}^3}. \quad (3.115)$$

となる。この有効成長因子も $f(R)$ の高次の微分に依存して決まるので、この解の振る舞いをこれ以上議論するためには、何か具体的な模型を仮定しなければならない。

3.11.1 個々の模型での計算

Hu and Sawicki's model $f(R)$ の関数形として、以下のようなものを考える。

$$f(R) = -m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad (3.116)$$

これは W. Hu と I. Sawicki によって提案された模型 [55] である。Sloan Digital Sky Survey (SDSS) や Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP7) のデータからフィッティングした模型 [58] を用いると、物質の密度揺らぎの時間依存性を詳しく調べることができる。このとき、この模型におけるパラメータは $n = 1.53$, $c_1 = 10^{3.47}$, $c_2 = 10^{2.28}$ と与えられ、この条件の下で $f(R)$ およびその微分を計算し、銀河団のスケール $k \sim 0.1 - 0.01h \text{ Mpc}^{-1}$ を考慮すると、この模型は事例 III に該当することがわかる。また、このパラメータの値をとると、 $R^3 f_{RRR}$ と $R^4 f_{RRRR}$ は十分に小さい。そのために準定常解は ΛCDM 模型のものと同様であるということが分かる。この結論は、論文 [58] で導かれた結論と一致している。また、早く変動する解についてはもう少し後で議論することにする。

Starobinsky's model 次に、下のような作用を持つ Starobinsky's model [56] を考える。

$$f(R) = \lambda R_0 \left(\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right). \quad (3.117)$$

Hu and Sawicki's model の場合と同様に、この模型でも論文 [58] で得られた最適化解を用いて物質の密度揺らぎの時間依存性を調べると、同様に、準定常解の振る舞いは、 ΛCDM 模型からのずれが小さいために、観測的に見分けることは難しいという結論を得る。

このような結果は、太陽系近傍での重力実験を満足しなければならないという要請から来ている。すなわち、 $F(R)$ 重力の模型を太陽系内で一般相対性理論と見分けがつかないようにするという条件が、大規模スケールにおいても ΛCDM 模型からの違いが小さくなるという結果を生んでしまうのである。どうしてこのような結果ができるのかということは、サブホライズン近似を用いたときの計算を見ると明らかである。つまり、 $|f_{RR}|k^2/a^2 \ll 1$ という条件が原因となっていたのである。

指数的な重力模型 次に、指数的な $f(R)$ の関数形 [57]

$$f(R) = -cr(1 - e^{-R/r}), \quad (3.118)$$

を考える。この模型では、鋭い R 依存性があるために Λ CDM 模型からのずれを持つことができるのではないかと期待されている。いくつかの論文 [59, 60] で式 (3.118) におけるパラメータを制限しているが、大きな c に対する有効な制限はない。そのため、もし c が 1000 位の大きさになることを考えると、 $R^3 f_{RRR} \sim 1$ となるために δ の非自明な発展が得られることが期待される。しかしながら、 $R^3 f_{RRR} \sim 1$ となると実際には宇宙の背景時空の成長にも影響を与えてしまう。そのため、宇宙の背景時空の成長を Λ CDM 模型と同一にして、物質の密度揺らぎの発展のみを異なるようにするには、パラメータの微調整が必要になってしまうであろう。

速く変動するモードについて 背景時空の発展がほとんど Λ CDM 模型と等しいような模型では、物質の密度揺らぎの発展も準静的な解については区別がつかないということの説明してきた。ただし、 $F(R)$ 重力理論における物質の密度揺らぎのモードは準静的なものだけではないので、これからもう一つのモード、速く変動するモードの振る舞いについて調べる。まず、背景時空の発展がほとんど Λ CDM 模型と等しいような模型は事例 III の場合、つまり $(k/\mathcal{H})^2 |f_R| \ll 1$ かつ $|f_{RR}| k^2/a^2 \ll 1$ に相当する。このとき、式 (3.114)、(3.115) によってその解の振る舞いは与えられるが、振動解であるかそうでないかは、 χ が実数であるかどうかによって決まる。

背景時空の方程式 (3.82)、(3.83) から、 $(1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2)/(2 - \mathcal{H}''/\mathcal{H}^3) \sim 1$ が今の場合に成立することが分かるので、 χ が実であるかどうかは f_{RR} の符号を見ることで明らかとなる。ただし $f_{RR} > 0$ という条件が、スカラーオン [61] の質量平方を正とするための条件として、現在有力と見られている模型には課されている。そのため、どの場合でも χ は実数であり、この速く振動するモードは振動的な振る舞いをするのがわかる。つぎに、この振動が減衰振動なのかそれとも成長振動なのかということが問題となってくるが、それは式 (3.115) の有効成長因子の正負を調べることによって知ることができる。式 (3.82)、(3.83) を用いると、今の場合には、

$$f_{\text{eff}} \simeq -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \left(2 - \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}^3} \right) \frac{\mathcal{H}^2 f_{RRR}}{a^2 f_{RR}}, \quad (3.119)$$

と表される。ここで、物質優勢期には $\mathcal{H}''/\mathcal{H}^3 \simeq 1/2$ となることに注意すると、 f_{eff} の正負は f_{RR} , f_{RRR} によって決まることが分かる。論文 [58] のパラメータの値を仮に当ては

めて考えると、 $f_{RR}/f_{RRR} < 0$ であるために $f_{\text{eff}} < 0$ を得る。つまり、振動減衰解であることを意味している。ただし、この結果はそれほどパラメータの値にはよっていない。なぜなら $f_{RR}/f_{RRR} < 0$ は、これらの模型で、 f_R が近似的に R の負冪関数とみなせる故の結論であるためである。また、指数関数型の場合でも $f_{RR}/f_{RRR} < 0$ を満たすので、やはり解は振動減衰解であることが分かる。

この振動の周期は、 $|f_{RR}|k^2/a^2 \ll 1$ という条件から分かるように、クインテッセンス模型の場合と比べて十分に短い。つまり、 k エッセンス模型で音速が光速を超えるような振動の周期に対応している。ただし、この $F(R)$ 重力理論の場合には、これはスーパールミニナリティを意味しているわけではない。そのため、因果律の問題は生じず、模型として矛盾は含まない。

どうしてこのような解の存在が導かれたかというのは、式 (3.88) を見ると推察することができる。 Λ CDM 模型や k エッセンス模型の場合には、このアインシュタイン方程式の (ij), $i \neq j$ 成分は、単に $\Phi = \Psi$ を導くだけであるが、今の場合はそのようにはなっていない。 $\Phi = \Psi$ となるような解と $\Psi \sim f_{RR}\Psi''/a^2$ となるような解が出現し、この後者の解が速く変動するモードに対応しているのである。

3.12 $F(R)$ 重力理論における物質の密度揺らぎのまとめ

まず、近似を用いて物質の密度揺らぎの時間発展を調べた。サブホライズン近似を用いた場合には、 $|f_{RR}|k^2/a^2 \ll 1$ か $|f_{RR}|k^2/a^2 \gg 1$ かによって、発展の仕方が異なることを示し、ある種の振動解を求める際には、サブホライズン近似の代わりに超相対論的な近似 $\partial/\partial\eta \sim k$ を用いればよいということがわかった。また、この近似計算の応用として、特異点を持つような模型における、特異点近くの物質の密度揺らぎの振る舞いの変化を調べた。

次に、A. de la Cruz-Dombriz らによって書かれた論文 [51] の結果を引用し、三つの場合にわけて、物質の密度揺らぎの成長について調べた。一つ目は、小スケール近似 $\mathcal{H}^2 \ll k^2$ が他の近似に比べて有効である場合、二つ目は、 $|f_R|$ が小さいという近似が小スケール近似よりも有効であるが、 $|f_{RR}|$ はそれほど小さくない場合、三つ目は、 $|f_R| \ll 1$ も $|f_{RR}|$ も小さい場合である。それぞれ特徴的な解が得られたが、特に注目すべきなのは一つ目の場合に、準静的な解の発展が Λ CDM 模型のものよりも速いことと三つ目の場合の振動解はそれほど自明ではないことである。しかしながら、実際の模型を使って調べるとほぼ三つ目の場合に該当し、準静的な解の発展は Λ CDM 模型と同じであり、速く変動するモードは成長解ではなく、振動解となることがわかった。またこの振動解は減衰解で

あり、故に物質の密度揺らぎの成長として効いてくるのは準静的な解である。そのため、これらのモデルを物質の密度揺らぎから制限することはできないことがわかった。この速く変動するモードが減衰する振動解となるためには、 $f_{RR} > 0$, $f_{RRR} < 0$ さえ満たせばよいために、パラメータの値にそれほど影響しない。また、逆に背景時空の発展は Λ CDM 模型と同じであるが、物質の密度揺らぎの発展は異なるようなモデルを記述するためには $f_{RR}/f_{RRR} > 0$ となるようなものを作ればよいともいえる。この振動は因果律に抵触せずクインテッセンス模型のものよりも周期が短いという点で、F(R) 重力理論独特のものである。

4 結論

第二節で見たように、 k エッセンス模型では、リコンストラクションの手法によって、任意の宇宙の背景時空の時間発展が記述できることが示された。また、F(R) 重力理論でもこのようリコンストラクションが可能であるということが知られている [54]。そのため、どの暗黒エネルギーのモデルが正しいのかということ、宇宙の背景時空の発展からだけでは決めることができない。つまり、宇宙マイクロ波背景放射や BAO、超新星の観測からだけではこれらのモデルを棄却していくことはできないのである。そこで、第三節では背景時空からの摂動として、物質の密度揺らぎの発展を調べた。過去の研究では、サブホライズン近似を用いたものと数値計算をして調べたものがほとんどであったが、本研究ではこのような近似を用いずに解析的に調べることによって新しい知見を得ることができた。まず、 k エッセンス模型のようなスカラー場の理論や F(R) 重力理論には、準静的な解だけではなく、振動解もあるということ。そして、 k エッセンス模型の場合には、その振動解は成長解としても現れやすいことが分かった。これは、 Λ CDM 模型との明らかな違いである。また、密度揺らぎに波数依存性が現れるのは F(R) 重力理論特有のものとしてよく紹介されることがあるが、そうではなく、サブリーディングの項まで評価すれば、どのモデルでも波数依存性があるということも分かった。F(R) 重力理論の場合には、現在有力と見られているモデルは、背景時空の成長でも、物質の密度揺らぎの時間発展を見ても、 Λ CDM 模型との差異が見られないことが分かった。背景時空の発展が Λ CDM 模型とほぼ等しいときに、密度揺らぎの速い変動をするようなモードが減衰振動解となるための十分条件は、 $f_{RR} > 0$ かつ $f_{RRR} < 0$ であり、この条件を満たすときに、物質の密度揺らぎの発展も Λ CDM 模型のものと同しくなる。

謝辞

本論文を書くにあたり、野尻 伸一 教授には、研究の方針や解釈の相談、助言、文章の添削など多方面にわたってお世話になりました。そして何より、このような環境の下で自由に研究をさせて頂けたことに感謝をしています。また、本論文を修正する際に、南部 保貞 準教授には論文の監修をして頂いたこと、市來 淨與 助教には関連研究を調べていただいたことにここで感謝を述べたいと思います。馬場 一晴 助教には、研究する意味があるかどうか不明確であったときに、がんばって仕上げようと元気付けられたことが記憶に残っています。また、同室の依田君や齋藤君、廣地君、大隅さん、伊藤さんには、気軽に物理の議論ができる環境であったということや、あまり堅苦しくない自由な雰囲気での研究ができたことに感謝しています。

付録 A 四次の微分方程式の導出

四次の微分方程式 (3.58)、

$$\frac{d^4\delta}{dN^4} + M_3 \frac{d^3\delta}{dN^3} + M_2 \frac{d^2\delta}{dN^2} + M_1 \frac{d\delta}{dN} + M_0\delta = 0, \quad (\text{付録 A.1})$$

はガウス消去法のような手順によって導出することができる。

1. 式 (3.55) の一行目を N で微分する。
2. 式 (3.55) の二行目、三行目、および四行目を使って、一番目の行程で導かれた式から、 $d\Psi/dN$ 、 $d(\delta X/X)/dN$ 、 $d(\delta\phi/\phi)/dN$ に比例する項を消去する。
3. 二番目の行程で得られた式を N で微分する。
4. 式 (3.55) の二行目、三行目、および四行目を使って、三番目の行程で導かれた式から、 $d\Psi/dN$ 、 $d(\delta X/X)/dN$ 、 $d(\delta\phi/\phi)/dN$ に比例する項を消去する。
5. 四番目の行程で得られた式を N で微分する。
6. 式 (3.55) の二行目、三行目、および四行目を使って、五番目の行程で導かれた式から、 $d\Psi/dN$ 、 $d(\delta X/X)/dN$ 、 $d(\delta\phi/\phi)/dN$ に比例する項を消去する。
7. 式 (3.55) の一行目と、二番目、四番目の行程で得られた式を使って、六番目の行程で導かれた式から、 Ψ 、 $\delta X/X$ 、 $\delta\phi/\phi$ に比例する項を消去すると、式 (付録 A.1) が得られる。

式 (付録 A.1) は k エッセンス模型において、近似を用いずに表された物質の密度揺らぎの微分方程式である。式 (付録 A.1) のそれぞれの項の係数は下記のように定義される。

$$M_3 \equiv -A_{11} + \sum_{\alpha, \beta, \gamma=2 \& \alpha \neq \beta \neq \gamma}^4 D(\alpha, \beta, \gamma) A_{1\beta} \left(A_{1\beta} \frac{dA_{1\gamma}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{i=2}^4 A_{1i} A_{i\gamma} - A_{1\gamma} \frac{dA_{1\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{i=2}^4 A_{1i} A_{i\beta} \right), \quad (\text{付録 A.2})$$

$$M_2 \equiv -3 \frac{dA_{11}}{dN} - \sum_{\alpha=2}^4 A_{1\alpha} A_{\alpha 1} - \sum_{\alpha, \beta, \gamma=2 \& \alpha \neq \beta \neq \gamma}^4 D(\alpha, \beta, \gamma) A_{1\beta} \left(A_{1\beta} \frac{d^2 A_{1\gamma}}{dN^2} + A_{11} A_{1\beta} \frac{dA_{1\gamma}}{dN} + A_{11} A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} A_{d\gamma} + 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\gamma} + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\gamma}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\gamma} - A_{1\gamma} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} - A_{11} A_{1\gamma} \frac{dA_{1\beta}}{dN} - A_{11} A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} A_{d\beta} - 2A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} - A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \right), \quad (\text{付録 A.3})$$

$$M_1 \equiv -3 \frac{d^2 A_{11}}{dN^2} - 3 \sum_{\alpha=2}^4 \frac{dA_{1\alpha}}{dN} A_{\alpha 1} - 2 \sum_{\alpha=2}^4 A_{1\alpha} \frac{dA_{\alpha 1}}{dN} - \sum_{\alpha, \beta=2}^4 A_{1\beta} A_{\beta\alpha} A_{\alpha 1} - \sum_{\alpha, \beta, \gamma=2 \& \alpha \neq \beta \neq \gamma}^4 D(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \left(2A_{1\beta} \frac{dA_{11}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} A_{d1} + \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} + 2 \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} + \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} + \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \right) \left(A_{1\beta} \frac{dA_{1\gamma}}{dN} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} A_{d\gamma} - A_{1\gamma} \frac{dA_{1\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} A_{d\beta} \Big) \\
& - \left(\frac{dA_{1\beta}}{dN} + \sum_{d=1}^4 A_{1d} A_{d\beta} \right) \left(A_{1\beta} \frac{d^2 A_{1\gamma}}{dN^2} + 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\gamma} \right. \\
& + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\gamma}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\gamma} - A_{1\gamma} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} \\
& \left. - 2A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} - A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \right) \Big\}, \quad (\text{付録 A.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_0 \equiv & - \frac{d^3 A_{11}}{dN^3} - 3 \sum_{\alpha=2}^4 \frac{d^2 A_{1\alpha}}{dN^2} A_{\alpha 1} - 3 \sum_{\alpha=2}^4 \frac{dA_{1\alpha}}{dN} \frac{dA_{\alpha 1}}{dN} - \sum_{\alpha=2}^4 A_{1\alpha} \frac{d^2 A_{\alpha 1}}{dN^2} \\
& - 3 \sum_{\alpha,\beta=2}^4 \frac{dA_{1\beta}}{dN} A_{\beta\alpha} A_{\alpha 1} - 2 \sum_{\alpha,\beta=2}^4 A_{1\beta} \frac{dA_{\beta\alpha}}{dN} A_{\alpha 1} - \sum_{\alpha,\beta=2}^4 A_{1\beta} A_{\beta\alpha} \frac{dA_{\alpha 1}}{dN} \\
& - \sum_{\alpha,\beta,\gamma=2}^4 A_{1\gamma} A_{\gamma\beta} A_{\beta\alpha} A_{\alpha 1} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=2 \& \alpha \neq \beta \neq \gamma}^4 D(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \left(A_{11} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} \right. \right. \\
& + 2A_{11} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} + A_{11} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} + A_{11} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \\
& - A_{1\beta} \frac{d^2 A_{11}}{dN^2} - 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d1} - A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d1}}{dN} \\
& \left. - A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d1} \right) \left(A_{1\beta} \frac{dA_{1\gamma}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\gamma} - A_{1\gamma} \frac{dA_{1\beta}}{dN} \right. \\
& \left. - A_{1\gamma} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\beta} \right) - \left(A_{1\beta} \frac{d^2 A_{1\gamma}}{dN^2} + 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\gamma} \right. \\
& + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\gamma}}{dN} + A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\gamma} - A_{1\gamma} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} \\
& \left. - 2A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} - A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \right) \\
& \left. \times \left(A_{11} \frac{dA_{1\beta}}{dN} + A_{11} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\beta} - A_{1\beta} \frac{dA_{11}}{dN} - A_{1\beta} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f1} \right) \right\}, \quad (\text{付録 A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta, \gamma) \equiv & \frac{1}{2} \left\{ \left(A_{1\alpha} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} + 2A_{1\alpha} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} + A_{1\alpha} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} \right. \right. \\
& + A_{1\alpha} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} - A_{1\beta} \frac{d^2 A_{1\alpha}}{dN^2} - 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\alpha} \\
& - A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\alpha}}{dN} - A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\alpha} \left. \right) \left(A_{1\beta} \frac{dA_{1\gamma}}{dN} \right. \\
& + A_{1\beta} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\gamma} - A_{1\gamma} \frac{dA_{1\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\beta} \left. \right) \\
& - \left(A_{1\beta} \frac{d^2 A_{1\gamma}}{dN^2} + 2A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\gamma} + A_{1\beta} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\gamma}}{dN} \right. \\
& + A_{1\beta} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\gamma} - A_{1\gamma} \frac{d^2 A_{1\beta}}{dN^2} - 2A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} A_{d\beta} \\
& - A_{1\gamma} \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{dA_{d\beta}}{dN} - A_{1\gamma} \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} A_{d\beta} \left. \right) \left(A_{1\alpha} \frac{dA_{1\beta}}{dN} \right. \\
& + A_{1\alpha} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\beta} - A_{1\beta} \frac{dA_{1\alpha}}{dN} - A_{1\beta} \sum_{f=2}^4 A_{1f} A_{f\alpha} \left. \right) \left. \right\}^{-1} \\
& \times \left(\frac{d^3 A_{1\alpha}}{dN^3} + 3 \sum_{d=2}^4 \frac{d^2 A_{1d}}{dN^2} A_{d\alpha} + 3 \sum_{d=2}^4 \frac{dA_{1d}}{dN} \frac{dA_{d\alpha}}{dN} + \sum_{d=2}^4 A_{1d} \frac{d^2 A_{d\alpha}}{dN^2} \right. \\
& + 3 \sum_{d,e=2}^4 \frac{dA_{1e}}{dN} A_{ed} A_{d\alpha} + 2 \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} \frac{dA_{ed}}{dN} A_{d\alpha} + \sum_{d,e=2}^4 A_{1e} A_{ed} \frac{dA_{d\alpha}}{dN} \\
& \left. + \sum_{d,e,f=2}^4 A_{1f} A_{fe} A_{ed} A_{d\alpha} \right). \tag{付録 A.6}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Hubble, E. (1929) Proc. Natl. Acad. Sci. USA **15**, 168-173.
- [2] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [3] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009(1998); *Astron. J.* **117**, 707 (1999).
- [4] Buchdahl, H. A. , *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **150**: 1(1970).
- [5] S. Nojiri and S. D. Odintsov, eConf **C0602061**, 06 (2006) [*Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007)] [arXiv:hep-th/0601213].
- [6] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010). [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].
- [7] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010). [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].
- [8] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rep.* **505**, 59 (2011) [arXiv:1011.0544 [gr-qc]].
- [9] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall* (Friedrich Vieweg und Sohn, Brunschweig, 1955).
- [10] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [11] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, United Kingdom, 2003).
K. i. Maeda, *Phys. Rev. D* **39**, 3159 (1989).
- [12] S. Nojiri and S. D. Odintsov, eConf C0602061:06,2006, *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.*4:115-146,2007. [arXiv:hep-th/0601213].
- [13] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Astrophys. J.* **325**, L17 (1988).
- [14] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988).
- [15] T. Chiba, N. Sugiyama and T. Nakamura, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **289**, L5 (1997) [arXiv:astro-ph/9704199].
- [16] I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999) [arXiv:astro-ph/9807002].
- [17] T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* **62**, 023511 (2000) [arXiv:astro-ph/9912463].
- [18] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*

- 85**, 4438 (2000) [arXiv:astro-ph/0004134].
- [19] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001) [arXiv:astro-ph/0006373].
- [20] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003); H. V. Peiris *et al.* [WMAP Collaboration], *ibid.* **148**, 213 (2003); D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *ibid.* **170**, 377 (2007).
- [21] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180**, 330 (2009).
- [22] G. Efstathiou *et al.* (The 2dFGRS Team), Mon. Not. R. Astron. Soc. **330**, L29-L35 (2002).
- [23] P. Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], Astron. Astrophys. **447**, 31 (2006); A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **659**, 98 (2007).
- [24] M. Oguri *et al.*, Astron. J. 135:512-519, 2008 February.
- [25] S. Nojiri and S. D. Odintsov, J. Phys. Conf. Ser. **66**, 012005 (2007) [arXiv:hep-th/0611071].
- [26] S. Nojiri, Mod. Phys. Lett. A **25**, 859 (2010) [arXiv:0912.5066[hep-th]].
- [27] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999) [arXiv:hep-th/9904075].
- [28] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999) [arXiv:hep-th/9904176].
- [29] A. Sen, JHEP **0204**, 048 (2002) [arXiv:hep-th/0203211].
- [30] A. Sen, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1797 (2002) [arXiv:hep-th/0204143].
- [31] G. W. Gibbons, Phys. Lett. B **537**, 1 (2002) [arXiv:hep-th/0204008].
- [32] J. S. Bagla, H. K. Jassal and T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **67**, 063504 (2003) [arXiv:astro-ph/0212198].
- [33] N. Arkani-Hamed, H. C. Cheng, M. A. Luty and S. Mukohyama, JHEP **0405**, 074 (2004) [arXiv:hep-th/0312099].
- [34] N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, JCAP **0404**, 001 (2004) [arXiv:hep-th/0312100].
- [35] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Gen. Rel. Grav. **38**, 1285 (2006) [arXiv:hep-th/0506212].
- [36] S. Capozziello, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **632**, 597 (2006) [arXiv:hep-th/0507182].
- [37] J. Matsumoto and S. Nojiri, Phys. Lett. B **687**, 236 (2010) [arXiv:1001.0220

- [hep-th]].
- [38] L. Guzzo et al. *Nature (London)*, **451**, 541 (2008).
- [39] C. Blake et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **415**, 2876. (2011) [arXiv:1104.2948 [astro-ph.CO]].
- [40] J. Matsumoto, *Phys. Rev. D* **83**, 124040 (2011) [arXiv:1105.1419 [astro-ph]].
- [41] K. Bamba, J. Matsumoto, S. Nojiri, *Phys. Rev. D* **85**, 084026 (2012) [arXiv:1109.1308 [hep-th]].
- [42] T. Narikawa, K. Yamamoto, *Phys. Rev. D* **81**, 043528 (2010), [arXiv:0912.1445].
- [43] P. Zhang, *Phys. Rev. D* **83**, 063510 (2011), [arXiv:1101.5164].
- [44] P. J. E. Peebles, (1980) *The Large-Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press), P. J. E. Peebles, (1993) *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press).
- [45] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [46] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Supplement*, **78**, 1 (1984).
- [47] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Phys. Rept.* **231**, 1-105 (1993), [arXiv:astro-ph/9303019].
- [48] C. Rubano and P. Scudellaro, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 307 (2002) [arXiv:astro-ph/0103335]
- [49] L. Pogosian and A. Silvestri, *Phys. Rev. D* **77**, 023503 (2008) [arXiv:0709.0269[astro-ph]].
- [50] S. Carloni, E. Elizalde, S. Odintsov, *Gen. Rel. Grav.* **42**, 1667 (2010) [arXiv:0907.3941[gr-qc]]
- [51] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, and A. L. Maroto, *Phys. Rev. D* **77**, 123515 (2008)
- [52] S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **71**, 063004 (2005) [arXiv:hep-th/0501025].
- [53] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, R. J. Scherrer, *Phys. Rev. D* **84**, 063003 (2011) [arXiv:1106.4996[astro-ph.CO]].
- [54] K. Bamba, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *JCAP* **10**, 045 (2008) [arXiv:0807.2575 [hep-th]].
- [55] W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007).
- [56] A. A. Starobinsky, *JTEP Lett.* **86**, 157 (2007).
- [57] E. V. Linder, *Phys. Rev. D* **80**, 123528 (2009); G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri,

- S. D. Odintsov, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **77**, 046009 (2008).
- [58] V. F. Cardone, S. Camera, and A. Diaferio, [arXiv:1201.3272 [astro-ph.CO]]
- [59] A. Ali, R. Gannouji, M. Sami, A. A. Sen, Phys. Rev. D **81**, 104029 (2010).
- [60] L. Yang, C. -C. Lee, L. -W. Luo, and C. -Q. Geng, Phys. Rev. D **82**, 103515 (2010).
- [61] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **30**, 682 (1979) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 719 (1979)]; Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).