量子ダイログ関数と団代数

中 西　知 樹

1. はじめに*1)

本稿のタイトルのキーワードの一つである**量子ダイログ関数**（quantum dilogarithm）は，正確に言えば二つのバージョンがあるのだが，Faddeev が Kashaev，Volkov とともに，90 年代半ばに離散 Liouville 模型の研究において導入したものである．その後，結び目不変量と 3 次元双曲体積を結びつける Kashaev の**体積予想**に現れるなどその重要性が認識された．最近では弦理論の研究者たちによって Chern-Simons ゲージ理論，あるいは超対称ゲージ理論における BPS 状態の数えあげなどの文脈においても活発に研究が行われている．

タイトルのもう一方のキーワードである**団代数**（cluster algebra）は 2000 年ごろに Fomin と Zelevinsky によって導入された可換代数のクラスであるが，こちらも，多元環，リー群，量子群などの表現論，三角圏の理論，リーマン面の三角分割やモジュライ理論など，さまざまな数学の分野と関わりながら急速に発展を遂げている．

さて，量子ダイログ関数と団代数（正確にはその量子化である量子団代数）の間に密接な関連があることに最初に気がついたのは Fock と Goncharov で 2003 年ごろのことであった．最近になって団代数の理論の整備が進んだ結果，Keller，長尾，Kashaev と著者らによって量子ダイログ関数のみたす恒等式である**量子ダイログ恒等式**について団代数の観点からより包括的な理解が得られるようになった．本稿ではこのあたりの事情について，団代数の技術的な詳細にはあまり立ち入らずにその雰囲気を読者にお伝えしたい．詳しい内容や文献については文献 1, 2) を参照されたい．

一方，このような流れと並行して量子ダイログ恒等式はまた Donaldson-Thomas 理論の**壁越え現象**により理解することが自然であることが Kontzevich と Soibelman，長尾らの最近の研究で明らかにされつつある．これに関する長尾氏による明解な解説[3)] を合わせてお読みいただけると良いと思う．

2. ダイログ関数

はじめに「古典的な」ダイログ関数を導入しよう．任意の自然数 k に対して，以下のベキ級数

$$\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \qquad (1)$$

は収束半径 1 となる．$k = 1$ のとき，$\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x)$ であることから，一般の k に対して $\mathrm{Li}_k(x)$ を k 次の**ポリログ関数**（polylogarithm）という．特に $\mathrm{Li}_2(x)$ を**ダイログ関数**（dilogarithm）あるいは後述の関数 $L(x)$ と区別するときは **Euler のダイログ関数**ともいう．$(\mathrm{Li}_2(x))' = \mathrm{Li}_1(x)/x$ であるので，$\mathrm{Li}_2(x)$ は積分表示

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-y)}{y} dy \qquad (2)$$

*1） 数理科学 Vol.50-10，pp.46–51，サイエンス社，2012，掲載論文の著者最終稿

を持つことがわかる．これにより，$\mathrm{Li}_2(x)$ は複素平面上に解析接続されるが, $x=1$ を分岐点に持つ．本稿ではこの多価性の曖昧さを除くため，(2) により定義される $\mathrm{Li}_2(x)$ を $x \leq 1$ なる実数に対して考える．定義より，$\mathrm{Li}_2(0)=0$ が成り立つ．また，良く知られた Euler による結果により，

$$\mathrm{Li}_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

となる．

つぎに，(2) の被積分関数を「対称化」した関数

$$L(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{\frac{\log(1-y)}{y}+\frac{\log y}{1-y}\right\}dy \tag{4}$$

を考える．これを **Rogers のダイログ関数**という．この関数の解析接続は $x=0,1$ の双方に分岐点を持つので，本稿では多価性の曖昧さを除くため，$L(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ なる実数に対して考える．

部分積分により，$0 \leq x \leq 1$ に対して，

$$L(x)=\mathrm{Li}_2(x)+\frac{1}{2}\log x\log(1-x) \tag{5}$$

となる．これより，$\mathrm{Li}_2(x)$ と同様に

$$L(0)=1, \quad L(1)=\frac{\pi^2}{6} \tag{6}$$

が成り立つことがわかる．

ダイログ関数の理論においては，$L(x)$ に関する以下の二つの恒等式が大変重要である．

定理 1　(1)（**Euler の恒等式**）

$$L(x)+L(1-x)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{7}$$

(2) （**ペンタゴン恒等式/Abel の恒等式**）

$$\begin{aligned}&L(x)+L(y)+L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)\\&\quad+L(1-xy)+L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Euler の恒等式 (7) を (8) の後ろの 3 項に用いると，(8) はまた

$$\begin{aligned}L(x)+L(y)&=L\left(\frac{x(1-x)}{1-xy}\right)\\&\quad+L(xy)+L\left(\frac{y(1-y)}{1-xy}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

と書くこともでき，これもペンタゴン恒等式という．

ところで，(5) を用いれば，これらの恒等式の $L(x)$ を $\mathrm{Li}_2(x)$ に置きかえることができるが，その際，余計な対数関数の項が現れる．歴史的には順序が逆で，$\mathrm{Li}_2(x)$ による表式が先にあり，$L(x)$ を導入すると対数関数項がきれいに吸収され $L(x)$ のみの関数方程式となることが後に見出された．そして，このことが関数 $L(x)$ の意義なのである．

3. ダイログ恒等式と団代数

90 年代に，可積分模型の文脈においてペンタゴン恒等式 (8) の一般化が現れ，盛んに研究された．そして，これらの恒等式の背後に存在するある種の代数構造が見え隠れはしていた．しかし，残念ながら，その時点ではまだ団代数の概念は導入されていなかった.（その当時の雰囲気については 16 年前の拙稿[4] を参照されたい.）そして，最近になって，ようやく背後にある代数構造が団代数に他ならないことが理解されたのである．

団代数というのはとても粗く言えば，各頂点から n 本の枝が出ているツリーグラフ（図 1）を考え，各頂点上に配置された n 個の変数が**変異**（mutation）と呼ばれる有理変換によって発展していくものである．したがって，ツリーの頂点を多重時間変数に持つような離散力学系と言っても良い．

団代数の詳細な定義はここでは触れずに,「A_2 型の団代数」における変数（正確には「係数」ある

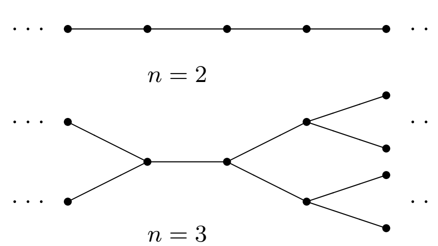

図 1　$n=2,3$ のツリーグラフ

いは「y 変数」と呼ばれるもの）を直接的に導入する．この場合は上の n は 2 であり，離散的な時間変数 t は整数となる．以下では，各時刻 t に対して, 二つの変数 $y_1(t), y_2(t)$ が配置され以下の規則をみたすものを考える．

(I) (**初期条件**) $y_1(0) = y_1$, $y_2(0) = y_2$．ここで, y_1, y_2 は独立で可換な変数（初期変数）である．

(II) (**変異の規則**) t が偶数のときは

$$\begin{cases} y_1(t+1) = y_1(t)^{-1}, \\ y_2(t+1) = y_2(t)(1+y_1(t)). \end{cases} \tag{10}$$

t が奇数のときは

$$\begin{cases} y_1(t+1) = y_1(t)(1+y_2(t)), \\ y_2(t+1) = y_2(t)^{-1}. \end{cases} \tag{11}$$

これを具体的に $t=0$ から始めて $t=5$ まで実行すると以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y_1(0) = y_1 \\ y_2(0) = y_2, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(1) = y_1^{-1} \\ y_2(1) = y_2(1+y_1), \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(2) = y_1^{-1}(1+y_2+y_1y_2) \\ y_2(2) = y_2^{-1}(1+y_1)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(3) = y_1(1+y_2+y_1y_2)^{-1} \\ y_2(3) = y_1^{-1}y_2^{-1}(1+y_2), \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(4) = y_2^{-1} \\ y_2(4) = y_1y_2(1+y_2)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} y_1(5) = y_2 \\ y_2(5) = y_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

最後の結果は，この変換の列が（半）周期 5 の周期性を持つことを意味する．このように団代数が周期性を持つとき，それに付随するダイログ恒等式が得られるというのが団代数の理論からの帰結である．以下では，特に (12) の周期に付随するダイログ恒等式がペンタゴン恒等式 (9) に他ならないことを説明しよう．

いま，$k_0, \ldots, k_4$ を

$$k_t = \begin{cases} 1 & t = 0, 2, 4 \\ 2 & t = 1, 3 \end{cases} \tag{13}$$

と定める．すなわち，k_t は変異の規則 (10), (11) において，$y_{k_t}(t+1) = y_{k_t}(t)^{-1}$ をみたすもので，これを t における**前方変異点**（forward mutation point）という．また，符号 ε_t $(t = 0, \ldots, 4)$ を

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 1 & t = 0, 1 \\ -1 & t = 2, 3, 4 \end{cases} \tag{14}$$

と定める．ε_t は変数 $y_{k_t}(t)$ の (12) における初期変数 y_1, y_2 による展開の主要項のベキの符号であり，これを**トロピカル符号**（tropical sign）という．これは団代数の理論において重要なものである．

以上の記号を用いて，団代数の周期 (12) に付随するダイログ恒等式は

$$\sum_{t=0}^{4} \varepsilon_t L\left(\frac{y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}{1+y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}\right) = 0 \tag{15}$$

で与えられる．そして，これはペンタゴン恒等式 (9) と一致する．実際,

$$\begin{aligned} x &= \frac{y_1(0)}{1+y_1(0)} = \frac{y_1}{1+y_1}, \\ y &= \frac{y_2(1)}{1+y_2(1)} = \frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2}, \end{aligned} \tag{16}$$

とおくとき,

$$\begin{aligned} \frac{y_1(2)^{-1}}{1+y_1(2)^{-1}} &= \frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ &= \frac{x(1-y)}{1-xy} \end{aligned} \tag{17}$$

などとなることが容易に確かめられる．

4. 量子ダイログ関数

本題の量子ダイログ関数について述べよう．

この節では $q \neq 0$ は $|q| < 1$ をみたす複素数とする．このとき，無限積

$$e_q(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1+q^{1+2k}x). \tag{18}$$

は任意の複素数 x に対して収束し，複素平面上で正則な関数を定める．その逆数で定まる有理型関数 $\Psi_q(x)=e_q(x)^{-1}$ をここでは**量子ダイログ関数** $\Psi_q(x)$ と呼ぶ.（Faddeev 自身は，$e_q(x)$ を量子ダイログ関数と呼んでいる．これ以外にも本稿の q を $q^{1/2}$ とするなど他の慣習もある.）

関数 $\Psi_q(x)$ の基本的な性質を見ておこう．まず，$\Psi_q(x)$ の定義より，$\Psi_q(0)=1$ であり，また以下の関数方程式をみたすことがすぐわかる．

$$\Psi_q(q^2x)=(1+qx)\Psi_q(x). \tag{19}$$

この二つの性質は，q と x の形式的ベキ級数としての $\Psi_q(x)$ を特徴づける．このことより，$\Psi_q(x)$ は $x=0$ における以下のベキ級数展開

$$\Psi_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q)^n}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})}x^n \tag{20}$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q)^n}{n(1-q^{2n})}x^n\right) \tag{21}$$

を持つことがわかる．これらの収束半径はともに $1/|q|$ である．

次の恒等式は 50 年代の Schützenberger による結果で，証明は初等的である．

定理 2　（**q 指数性**）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X, Y に対して，以下が成り立つ．

$$\Psi_q(X)\Psi_q(Y)=\Psi_q(X+Y). \tag{22}$$

ただし，(22) はベキ級数 (20) に $X, Y, X+Y$ などを代入して得られる非可換変数 X, Y の形式的ベキ級数の等式である．

関係式 $YX=q^2XY$ は X と Y について対称ではなく，$\Psi_q(Y)\Psi_q(X)=\Psi_q(Y+X)$ とはならないことに注意する．

さて，Faddeev と Kashaev は，以下の意味で，$\Psi_q(x)$（あるいは $e_q(x)$）がダイログ関数の「量子化」であることを見出した[5)]．

定理 3　(i)（**漸近挙動**）極限 $q\to 1^-$ において，以下が成り立つ．

$$\log\Psi_q(x)\sim-\frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{2\log q}. \tag{23}$$

(ii)（**ペンタゴン恒等式**）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X, Y に対して，

$$\Psi_q(Y)\Psi_q(X)=\Psi_q(X)\Psi_q(q^{-1}YX)\Psi_q(Y) \tag{24}$$

が成り立つ．さらに，$q\to 1^-$ における (24) の半古典極限により $L(x)$ のペンタゴン恒等式 (9) が得られる．

(23) は (21) の極限と (1) を比べてただちに得られる．(24) は (22) と (19) を（巧みに）繰り返し適用して得られる．(ii) の後半の主張は，U, V を適当な関数空間上の作用素とみなし，(24) の両辺の適当な行列要素の $q\to 1^{-1}$ の極限における漸近挙動の主要項を比べることによって (9) が得られる，という意味である．このような極限を考えることを，量子力学の用語を用いて**半古典極限**（semiclassical limit）という．

ところで，(24) は (9) を半古典極限に持つ一方で，両者の右辺の変数の形はあまり似ていない．これと関連して，Volkov は最近 (24) が以下の形に書き換えられることを見出した．

定理 4　（**Volkov のペンタゴン恒等式**）$YX=q^2XY$ をみたす非可換な変数 X, Y に対して，

$$\begin{aligned}\Psi_q(X)\Psi_q(Y)&=\Psi_q((1+qX)^{-1}Y)\\&\times\Psi_q(qX(1+qX+qY)^{-1}Y)\\&\times\Psi_q(X(1+qY)^{-1})\end{aligned} \tag{25}$$

が成り立つ．

(25) の右辺も (9) の右辺とは一見似ていないが，実はこれが (9) の「表式の上での」自然な q 類似になっている．このことについては次節で説明する．

5. 量子ダイログ恒等式と量子団代数

量子団代数（quantum cluster algebra）は 2004 年頃に Berenstein，Zelevinsky と Fock，Goncharov の二つのグループによってほぼ同時に導

入されたものであり，団代数の変数を「非可換化した」ものである．この詳しい定義は省いて，ここでは，3 節で述べた「A_2 型の団代数」の変数の量子化を直接的に導入する．古典的な場合と同様に，各時刻 $t \in \mathbb{Z}$ に対して，二つの変数 $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ が配置され以下の規則をみたすものを考える．

(I)（**初期条件**） $Y_1(0) = Y_1$, $Y_2(0) = Y_2$．ここで，Y_1, Y_2 は独立で非可換な変数（初期変数）であり，形式的な変数 q に対して，関係式

$$Y_1 Y_2 = q^2 Y_2 Y_1 \tag{26}$$

をみたす．

(II)（**変異の規則**）t が偶数のときは

$$\begin{cases} Y_1(t+1) = Y_1(t)^{-1}, \\ Y_2(t+1) = Y_2(t)(1 + qY_1(t)). \end{cases} \tag{27}$$

t が奇数のときは

$$\begin{cases} Y_1(t+1) = Y_1(t)(1 + qY_2(t)), \\ Y_2(t+1) = Y_2(t)^{-1}. \end{cases} \tag{28}$$

これを具体的に $t = 0$ から始めて $t = 5$ まで実行すると以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned} &\begin{cases} Y_1(0) = Y_1 \\ Y_2(0) = Y_2, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(1) = Y_1^{-1} \\ Y_2(1) = Y_2(1 + qY_1), \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(2) = Y_1^{-1}(1 + qY_2 + Y_1Y_2) \\ Y_2(2) = Y_2^{-1}(1 + q^{-1}Y_1)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(3) = Y_1(1 + qY_2 + Y_1Y_2)^{-1} \\ Y_2(3) = q^{-1}Y_1^{-1}Y_2^{-1}(1 + qY_2), \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(4) = Y_2^{-1} \\ Y_2(4) = q^{-1}Y_1Y_2(1 + q^{-1}Y_2)^{-1}, \end{cases} \\ &\begin{cases} Y_1(5) = Y_2 \\ Y_2(5) = Y_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{29}$$

変異の列 (29) は，古典的な場合 (12) と同様の周期性を持つことがわかる．これは偶然ではなく，一般に,（ある技術的な仮定のもとで）古典団代数の周期は量子団代数の周期に持ちあがることが知られている．そして，古典的な場合と同様に，量子団代数の周期に対してそれに付随した（いろいろな形の）量子ダイログ恒等式が得られるのである．以下では，特に (29) の周期に付随する量子ダイログ恒等式として二つのペンタゴン恒等式 (24), (25) が得られることを説明しよう．

k_t，ε_t を (13)，(14) で導入したものとする．$[Y_{k_t}(t)]$ $(t = 0, \ldots, 4)$ を (29) における $Y_{k_t}(t)$ の主要項（**トロピカル部分**），すなわち，

$$\begin{aligned} &[Y_1(0)] = Y_1, \\ &[Y_2(1)] = Y_2, \\ &[Y_1(2)] = Y_1^{-1}, \\ &[Y_2(3)] = q^{-1}Y_1^{-1}Y_2^{-1} = (q^{-1}Y_1Y_2)^{-1}, \\ &[Y_1(4)] = Y_2^{-1}, \end{aligned} \tag{30}$$

と定める．このとき，量子団代数の周期 (29) に付随する**量子ダイログ恒等式のトロピカル形**は

$$\Psi_q([Y_{k_0}(0)]^{\varepsilon_0})^{\varepsilon_0} \cdots \Psi_q([Y_{k_4}(4)]^{\varepsilon_4})^{\varepsilon_4} = 1 \tag{31}$$

で与えられる．より具体的には，(30) を代入して，

$$\begin{aligned} &\Psi_q(Y_1)\Psi_q(Y_2)\Psi_q(Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q(q^{-1}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_q(Y_2)^{-1} = 1 \end{aligned} \tag{32}$$

となる．$Y_2 = X$, $Y_1 = Y$ とおくと，これはペンタゴン恒等式 (24) そのものである．

また，量子団代数の周期 (29) に付随する**量子ダイログ恒等式の普遍形**は

$$\Psi_q(Y_{k_4}(4)^{\varepsilon_4})^{\varepsilon_4} \cdots \Psi_q(Y_{k_0}(0)^{\varepsilon_0})^{\varepsilon_0} = 1 \tag{33}$$

で与えられる．ここで，積の順序が (31) と逆であることに注意をする．より具体的には，(29) を代入して，

$$\begin{aligned} &\Psi_q(Y_2)^{-1}\Psi_q(q(1 + qY_2)^{-1}Y_2Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q((1 + qY_2 + Y_1Y_2)^{-1}Y_1)^{-1} \\ &\quad \times \Psi_q(Y_2(1 + qY_1))\Psi_q(Y_1) = 1 \end{aligned} \tag{34}$$

となる．ここで，$Y_2(q+qY_1)=X$，$Y_1=Y$ とおくと，$YX=q^2XY$ が成り立ち，Volkov のペンタゴン恒等式 (25) と一致することが確かめられる．

(31) が量子変数のトロピカル部分に対する恒等式であるのに比べて，(33) は量子変数そのものが現れる点において，(15) の「表式の上での」自然な q 類似になっている，というのが前節の最後で述べたコメントの意味である．

6. Faddeev の量子ダイログ関数

量子ダイログ関数には二つのバージョンがあることを冒頭で述べた．最後に，もう一つのバージョンについても簡単にふれておこう．

前節の関数 $\Psi_q(x)$ においては，パラメーター q に対して条件 $|q|<1$ が課されていた．これは，たとえば $UV=q^2VU$ をみたす作用素 U,V をユニタリーにとれない，あるいは応用上重要な $|q|=1$ の場合を扱うことができない，などの問題をひき起こす．そこで，Faddeev は純虚数ではない任意の複素数 b をパラメーターとする以下のような関数を導入した[6]．

$$\Phi_b(z)=\exp\left(-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2zx\sqrt{-1}}}{\sinh(xb)\sinh(x/b)}\frac{dx}{x}\right). \tag{35}$$

ただし，積分路は $x=0$ における極を上から回るものとする．詳細は省略するが，この積分は $\mathrm{Im}\,z$ が小さいとき収束し，さらに複素平面上の有理型関数に解析接続されることがわかる．この有理型関数をあらためて $\Phi_b(z)$ と表し **Faddeev の量子ダイログ関数**（あるいは非コンパクト量子ダイログ関数，モジュラー量子ダイログ関数）という．

対称性 $\Phi_{b^{-1}}(z)=\Phi_{-b}(z)=\Phi_b(z)$ により，$\mathrm{Re}\,b>0,\quad \mathrm{Im}\,b\geq 0$ としてかまわない．

$$q=e^{\pi b^2\sqrt{-1}},\quad \overline{q}=e^{-\pi b^{-2}\sqrt{-1}}, \tag{36}$$

とおく．$\overline{q}$ は q のいわゆるモジュラー変換である．このとき，$\mathrm{Im}\,b=0$（すなわち b は正の実数）ならば，$|q|=|\overline{q}|=1$，また，$\mathrm{Im}\,b>0$ ならば，$|q|,|\overline{q}|<1$ が成り立つ．

定理 5　$\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Im}\,b>0$ をみたす b に対して，

$$\Phi_b(z)=\frac{\Psi_q(e^{2\pi bz})}{\Psi_{\overline{q}}(e^{2\pi b^{-1}z})}. \tag{37}$$

すなわち，$|q|=1$ における量子ダイログ関数を Ψ_q とその「モジュラーペア」$\Psi_{\overline{q}}$ の比の極限で定めるというのが Faddeev のアイデアである．$\Psi_q(x)$ と同様，$\Phi_b(z)$ に対しても，ペンタゴン恒等式の類似が成立して，さらに前節で述べたような量子団代数との関係が成り立つ．そして，半古典極限を「量子力学系から古典力学系への移行」という物理的視点から解釈する場合には，ユニタリティーの要請より量子ダイログ関数として $\Psi_q(x)$ より $\Phi_b(z)$ を考える方が自然となる．

以上まとめると，量子ダイログ恒等式の背後に量子団代数という構造があることを説明した．ところで，量子団代数と共形場理論の間にはさらなる未知の関係があることを示唆するいくつかの状況証拠がある．物語の新しい章は始まったばかりかもしれない，

参考文献

1) T. Nakanishi. Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities. In A. Skowroński and K. Yamagata, editors, *Representations of algebras and related topics*, EMS Series of Congress Reports, pages 407–444; arXiv:1006.0632 [math.QA]. European Mathematical Society, 2011.
2) R. M. Kashaev and T. Nakanishi. Classical and quantum dilogarithm identities. *SIGMA*, 7:102, 29 pages, 2011. arXiv:1104.4630 [math.QA].
3) . 3 次元 Calabi-Yau 圏ぁ dilog . **拭** ◎ , 1 掘 :48–54, 2012.
4) 西 μ. dilogarithm. **拭** ◎ , 9 掘 :28–35, 1996.
5) L. D. Faddeev and R. M. Kashaev. Quantum dilogarithm. *Mod. Phys. Lett.*, A9:427–434; arXiv:hep–th/9310070, 94.
6) L. D. Faddeev. Discrete Hisenberg-Weyl group and modular group. *Lett. Math. Phys.*, 34:249–254; arXiv:hep–th/9504111, 1995.

（なかにし・ともき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）