報告番号	※ 甲 第 号

主 論 文 の 要 旨

論文題目 STUDIES ON MUTATION AND TILTING THEORY
(変異および傾理論の研究)

氏　　名 水野　有哉

論 文 内 容 の 要 旨

多元環の表現論において変異理論は重要な役割を果たす。変異とは、簡単に述べるとある圏において特定の対象の因子を取り替え新しい対象を得る操作のことをいう。これは圏の構造を理解する上で非常に効果的なものである。論文では変異理論と傾理論、また近年著しく発展している τ 傾理論、クラスター傾理論との関係を述べる。

まず傾理論と変異の関係について述べる。傾理論とは現在数学の多くの分野において重要な道具となっている導来圏を扱う上でなくてはならない理論である。傾加群の自己準同型環は元の多元環と導来圏同値であることはよく知られている。それゆえ新しく得られた多元環の箙及び関係式と、元の多元環とそれとの関係を知ることは非常に重要で古くから多くの人々によって研究されてきた。もっとも古くよく知られている結果は Bernstein-Gelfand-Ponomarev 鏡映変換である。これは現在 APR(=Auslander-Platzeck-Reiten) 傾加群として定式化されている。この APR 傾加群の顕著な性質の一つは、道多元環上の APR 傾加群の自己準同型環の箙は元の多元環の箙を反転させることで得られるということである。このように道多元環上の APR 傾加群の自己準同型環の箙は完全に組み合わせ的に決定される。そしてこれは傾加群の変異理論の起源となった重要な結果である。

私はこの APR 傾加群に着目し、上記の結果をより広いクラスの多元環へと一般化を行った。道多元環とは大域次元が１以下の多元環に他ならないので、これを大域次元が２以下の多元環へと拡張することは自然な試みである。私はクラスター代数の変異との関係を示す事でこれに成功した。より具体的にはポテンシャル付き箙の変異という組み合わせ論的操作と対応していることを示した。これは前述の道多元環の場合の結果を完全に含む形で与えられ、さらにこの結果が大域次元が２以下とは限らないより一般的なクラスの多元環にも適用出来る事を示した。また応用として未解決問題の部分的解を与える事を行った。

次に多元環の重要なクラスの一つである自己入射多元環に対して、変異理論と傾理論との関係を調べた。自己入射多元環においては傾加群は自明なものしかなく、それゆえ自明でない導来同値な多元環を得るにはより複雑な傾複体というものを扱う必要がある。私はその中でも Okuyama-Rickard 複体としてよく知られている複体を考察した。これは圏論の観点から現在では準傾複体の変異の特別なものとして解釈されている。私はポテンシャル付き箙で与えられている自己入射多元環に対して、準傾複体の変異との可換性を示す事でこの自己準同型多元環の箙と関係式を決定した。さらにこれを傾複体の場合へと応用することで導来同値である自己入射多元環を得る事

に成功した。この結果から機械的に多くの導来同値の多元環を得ることが出来た。

次にτ傾理論と変異理論について行った考察を述べる。τ傾理論においてはτ傾加群が中心的役割を果たす。これは近年導入されたもので傾加群の一般化となっている。τ傾加群は多くの良い性質を持つ事が示されている。特に台τ傾加群と2項準傾複体との間に一対一対応があることがわかっている。しかしながら準傾複体は傾複体より条件が弱く導来圏同値を与えるとは限らない。そこで導来圏の観点から、傾複体を与える台τ傾加群を選定することは根本的問題である。私はこの問題に対して、自己入射多元環の場合に完全な解答を与えた。それは中山関手というよく知られている関手を用いて定義されるν-安定という条件を満たすというものである。これによって傾複体という複雑な対象が加群圏の単純な計算だけで求められる事を示した。さらにそれらに対応するねじれ対やクラスター傾対象がどのような性質を満たすかについても示した。

次に自己入射多元環のなかでもとりわけ古くから調べられているDynkin型前射影的多元環のτ傾加群について調べた。前射影的多元環とは多元環の表現論において古くから研究されているものであるが、近年では量子群やクラスター代数といったものにも応用され活発に研究されている対象の一つである。Non-Dynkin型前射影的多元環においては傾加群を用いることでその構造の理解は大きく飛躍した。一方で前述でも述べたように自己入射多元環においては傾加群は自明なものしかなくDynkin型前射影的多元環では同様の議論を用いる事は出来なかった。私はこの場合においてτ傾加群が傾加群の役割を果たすことを示した。そして多元環上のイデアルの積に注目し、それらを変異理論の観点から捉える事で、すべてのτ傾加群を求める事に成功した。さらにτ傾加群が古典的重要概念であるWeyl群との一対一対応を持つ事を示した。この結果の系として加群圏の捻れ類をすべて決定しこれらとの間にも一対一対応があることを示した。

最後にクラスター傾理論に変異を用いた事で得られた結果について述べる。クラスター傾理論とは高次元Auslander- Reiten理論を与える上で本質的役割を果たす理論である。私はこのクラスター型理論を用いてGabrielの定理の拡張を行った。ここでGabrielの定理とはDynkin型道多元環上の直既約加群とその箙から定まる二次形式のルートとの間に一対一対応があるというものである。この有名な定理は様々な形で一般化が試みられている。私はクラスター傾理論において中心的役割を担うn-有限表現型多元環を用いてこの定理を拡張した。それはこの多元環上の加群圏におけるクラスター傾部分圏に注目し、その部分圏に含まれる直既約加群が、次元ベクトルを取る事で二次形式のルートを与える事というものである。特に1-有限表現型多元環はGabriel定理で扱われたDynkin型道多元環であるので一般化になっていることがわかる。さらにこのルート (クラスタールートとよぶ) のもつ性質を調べた。そしてクラスタールートが鏡映変換の合成で単純ルートから得られることを示した。さらにこのルートがコクセター変換の作用によって常に同一な符号を持つを示した。特にnが偶数の場合には常に非負になることも示した。次にn=2の場合において逆にルート全体のなかからクラスタールートを得る方法について考察した。これに関して問題を定式化し予想を与えた。そしてある良いクラスにおいて実際これが成り立つことを示した。