報告番号	※　乙　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　実数値をパラメータとして持つある計算論における Turing degrees について

氏　　名　米　澤　　佳　己

論　文　内　容　の　要　旨

1990 年代 L. Blum, M. Shub, S. Smale らはフラクタル集合の性質を調べるためこれまでに用いてきた代数的手法, 位相的手法, 解析的手法などに加え計算可能性の手法を用いることにより新しい結果が得られるかもしれないという発想のもとに, 実数値のパラメータを持つ計算モデルのひとつを与えた.

しかし, 彼らは実数値計算論は, フローチャートを用いて定義を行っているため, 以前からある自然数上の計算論との関連を調べるには困難である.

本論文では L. Blum, M. Shub, S. Smale らの実数値計算論を実数, 自然数, 実数の有限列をパラメータと持つ計算論へと拡張し展開してる. これを本論文では B.S.S. 計算論と呼ぶ. その結果, 自然数上の計算論との関連が明らかになり, この実数値計算論でも自然数上の計算論の様々な手法が利用可能であることが明らかになった.

さらに, これらの概念を基礎にして, 自然数上での計算論で重要な研究対象である Turing Degrees の概念を自然な形で B.S.S. 計算論に拡張し, これを B.S.S. Turing degrees と名付けた. これは, 実数数の集合 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{<\omega}$ (実数数の有限列全体の集合) の部分集合の間に計算可能性によって得られる情報の強弱を定めた (偽) 順序集合である. B.S.S. Turing degrees の全体のなす順序集合の性質を調べることは自然数や実数の集合の複雑さの度合いを調べることであり, 数理論理学としてとても重要な研究テーマである.

本論文ではこの B.S.S. Turing degrees のなす偽順序集合の性質を調べることを主目的としている.

B.S.S. Turing degrees に対する最初の結果として, B.S.S. Turing degree の意味で比較不能な二つの実数の集合が存在することを示した. 具体的には有理数の全体の集合 $\mathbb{Q}$ とカントールの三進集合 C が比較不能な実数の集合であることを明らかにしている.

第 2 の結果として有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限生成拡大体 K, L に対して, K と L の B.S.S. Turing degrees での比較可能性と, K, L の包含関係が一致することを示した. このことにより, B.S.S. Turing degrees がなす偽順序の中に, 様々な有限順序集合を埋め込めることが分かり, その結果 B.S.S. Turing degrees がなす偽順序構造の複雑さがさらに明らかになった.

第 3 の結果として, B.S.S. Turing degrees がなす偽順序構造の中に実数直線 $\mathbb{R}$ を順序の意味で埋め込む事ができることを示した. このことにより, 無限な順序集合についても多くのものがB.S.S. Turing degrees がなす偽順序構造の中にを埋め込めることが分かった.

最後に, 本論文で解決できなかった問題をいくつか触れている. 古典的 Turing degrees では示されている極小元の存在性や, 空間の次元が違うと Turing degrees が異なるかなど Turing degrees の構造を調べるために重要な問題が未解決のまま残された. これらの問題の解決は今後の課題である.