別紙１－１

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　乙　　第　　　　　号

氏　　　　　名　米　澤　　佳　己

論　文　題　目　実数値をパラメータとして持つある計算論における
Turing degrees について

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士 木村芳文

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士 岡田聡一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
准教授 博士(情報科学) Jacques Garrigue

委　員　名古屋大学大学院情報科学研究科 准教授 博士(学術) 吉信康夫

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は, Blum, Shub, Smale が 1990 年代に提案した, 実数の四則演算や大小比較を基本演算とする実数値関数の計算可能性の概念に基づく計算論 (以下 BSS 計算論と表す) について考察したものである.

実数値関数の計算可能性の概念は, BSS 計算論以前にも数理論理学者たちによってもいくつか提案されているが, 数理論理学者は通常, 自然数値関数の古典的な計算可能性の概念についての Church の提唱に述べられるように, 有限的に記述された手続きに沿った有限ステップの計算のみをアルゴリズムと捉える立場に立つ. そのため, 無限小数である実数の四則演算や大小比較さえも有限時間で実行可能な計算とは呼べず, 実数の計算を要求された精度での近似計算と考えたうえで計算可能性の概念を定式化するのが常道である.

これに対し, BSS 計算論においては, 個々の実数をアプリオリな計算対象とみなし, 実数の四則演算や大小比較を定数コストで実行可能な操作とみなした上で計算可能性の概念を定式化する. 創始者らは, フラクタル図形など $\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}^n$ 内の図形の複雑さを, そのメンバーシップ問題の計算の複雑さとして捉えるためにこの概念を導入したのであり, これは数学者が素朴な意味で「実数の計算」と考えるものを素直に表現したものではあるが, 上述のような数理論理学者の立場から見れば, 超越的な操作を許す, という意味でやや異色の計算論であるともいえる.

申請者は本論文において, BSS 計算論を, 数理論理学者としての視点から, 自然数値の古典的な計算論の理論展開の枠組みに沿って検討し, 両者の類似点と相違点を詳しく論じている. その成果は大きく分けて以下に述べる二点にまとめられる.

第一に申請者は, 本論文第 3 章において, 仮想的なプログラミング言語を導入し, BSS 計算可能性を, この言語によってプログラム可能であることとして再定義すると同時に, この言語に自然数型変数を導入することで, BSS 計算可能性の概念の保存的な拡張を行った. これにより, 計算可能述語の自然数型変数についての量化を扱えるようになり, 古典的な計算論との対比が可能になった. 申請者はこのことを用いて, 枚挙定理やパラメータ定理といった, 古典的計算論における基本的な定理の対応物が BSS 計算論においても成立することを示した. この成果は, BSS 計算論が, その幾分超越的な性質にもかかわらず, Church の提唱に基づく正統的な計算論のもつ性格をある程度共有していることを示したものであるといえる.

第二に申請者は, 本論文第 4 章および第 5 章において, BSS 計算論における Turing 次数の理論を展開している. 古典的計算論において, 自然数のある集合のメンバーシップ問題が, 別の集合のそれに手続き的に還元できるとき, 前者は後者に Turing 還元可能であるといい, 自然数の集合の, 相互に Turing 還元可能であるという同値関係についての同値類を Turing 次数という. Turing 次数の全体が Turing 還元可能性についてなす擬順序構造を調べることは, 古典的計算論の重要なテーマの一つである. 申請者は, 実数の集合に対して Turing 次数の BSS 計算論における対応物 (BSS Turing 次数) を定義し, その全体が BSS Turing 還元可能性についてなす擬順序構造について次の成果を得ている:

(a) BSS Turing 還元可能性とボレル階層の関連を調べ, 系として有理数体とカントルの三進集合が比較不能な BSS Turing 次数をもつことを示した.

(b) 実代数体については, BSS Turing 還元可能性による順序と包含順序が一致することを示した.

(c) 代数的に独立かつ稠密な実数の集合を用いて, BSS Turing 次数の擬順序構造に実数直線を埋め込めることや, 互いに比較不能な連続濃度個の BSS Turing 次数が存在することを示した.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

興味深いのは, 古典的計算論における Turing 次数の構造が, 専ら対角線論法のヴァリエーションを用いて調べられるのに対し, 申請者は BSS Turing 次数の構造の解析に, ボレル階層や代数体など, 位相, 解析, 代数などの様々な数学の手法を用いている点である. このことは BSS Turing 次数の擬順序構造が, 様々な数学の知見を反映した非常に複雑な構造をもつことを示唆している.

このように, 本論文は, 素朴な着想から生まれた BSS 計算論を, 数理論理学的洗練の高みにまで至らしめており, BSS 計算論の数理論理学的見地からの研究の端緒をなすものといえる. 加えて, 本論文の次数理論における成果は, この分野の研究に数学の様々な分野が横断的に関わる可能性を示唆するものでもある. 全体として, 本論文の学術的意義は相当に大きい.

また，本論文に関する公開審査会を 2013 年 10 月 7 日に行い，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する.