実数値をパラメータとして持つある計算論における Turing degrees について

米澤佳己

1　はじめに

1990 年代 L. Blum, M. Shub, S. Smale らはマンデルブロー集合やジュリア集合などのフラクタル集合の性質を調べるため, 今までに用いてきた代数的手法, 位相的手法, 解析的手法などに加え計算可能性の手法を用いることにより新しい結果が得られるかもしれないという発想のもとに, 実数値の計算論を展開した. ここでいう計算可能性の手法とは, 実数値もしくは複素数値の関数の計算可能性の概念を定義し, 対象となる関数や述語, 集合等をその計算のための具体的なアルゴリズムが存在するか否か, つまり計算可能であるか否かの観点から解析しようとするものである.

数理論理学では, 1930 年代から Gödel, Turing, Church, Kleene など多くの人々により自然数上の関数に対する計算可能性という概念の数学的な定式化が試みられた. 当初は, それぞれの研究者が違った形で計算可能性の概念を定式化したため, それらの定式化の間に強弱の違いがあるのか等不明のまま個別に研究が進められた. その後これらの計算論で定義された計算可能性は全て同等なものであることが示され, それ以後は統一的な計算可能性の研究がなされるようになった. これら同等な定義による計算可能な関数を帰納的関数と呼ぶ. そして「“計算可能な関数” という直観的な概念を, 帰納的関数と同一視しよう」という提唱が Church によって行われ, この提唱は今日数理論理学や計算科学の研究者たちによって広く受け入れられている. 帰納的関数の理論においては現在までに多くの重要な結果が得られている. (以後, この自然数上の計算論を古典的計算論もしくは古典的帰納的関数論と呼ぶことにする.)

実数値, 複素数値の計算論についてもこれまでいくつかの計算可能性についての定式化が導入されたが, 自然数値の場合と違い実数値の計算論ではそれぞれの定義は根本的にちがったものであり, 定義可能な関数のクラスや性質は各定義ごとに異なることがわかっている. また, 自然数の場合 ω と ω^n は計算可能な意味で同型写像が存在するため ω と ω^n 上の関数や集合に対する計算可能性は同じものであるのに対し, 実数の全体 $\mathbb{R}$ には位相構造が入っているため $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ は計算可能性の定義によっては計算可能性の意味でも同型とならず, これらの集合上の計算可能関数の

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 03D30; Secondary 03D15.
Keywords and Phrases. B.S.S. recursive function; Turing degree

全体の持つ構造は異なるものになる．そのほか自然数の計算可能な集合では最小値を求める操作も計算可能になるが, 実数の場合には最小値を求めることや下限を求めることは計算可能ではなくなる．その反面, 実数値の計算論においては, 実数の位相的な手法や代数的な手法など自然数上の計算論にはない新しい研究手法を用いることができる場合がある．このように, 実数上の計算論は自然数の計算論と本質的に異なったものになっている．

冒頭に述べた L. Blum, M. Shub, S. Smale による実数値の計算論もこのような実数値の計算論の一つである．本論文では, これを B.S.S. 計算論もしくは B.S.S. 帰納的関数論と呼ぶ．この計算論は実数の四則演算, 順序比較を計算可能な関数とする実数値計算論の中で計算可能な実数値関数のクラスを最も小さく見積もるものである．また, B.S.S. 計算可能な関数は他の計算可能関数よりも代数的, 幾何学的な性質を多く有しており, 彼らの目的である幾何学的な集合の性質を調べるのにより適したものとなっている．本論文では実数値の計算論としてもっぱら B.S.S. 計算論を取り上げる．

さて, 古典的計算論では Turing degrees の概念が重要な研究対象である．これは, 自然数の集合 ω や ω^n, $\omega^{<\omega}$ (自然数の有限列全体の集合) の部分集合の間に計算不可能性の程度によって大小を定めた (擬) 順序集合である．Turing degrees 全体のなす (擬) 順序集合の性質を調べることは自然数の集合の計算不可能性の構造を調べることであり, 数理論理学においてとても重要な研究テーマである．また, Turing degrees の定義において古典的な計算可能性を他の計算論における計算可能性に類似の概念におきかえることで計算論ごとに Turing degrees の類似物を考えることができる．例えば, よく知られた $P \neq NP$ 問題は自然数における多項式時間で計算可能な関数に対する Turing degrees の類似物についての問題と捉えることができる．本論文では古典的計算論と B.S.S. 計算論を比較することにより, Turing degrees の概念を自然な形で B.S.S. 計算論に拡張し, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{<\omega}$ (実数の有限列全体の集合) の部分集合に計算不可能性の程度によって大小を定めた (擬) 順序集合を定義し, これを B.S.S. Turing degrees と名付けた．

本論文の目的は, 古典的な計算論の重要な概念や定理が B.S.S. 計算論においてどの程度対応物を持つか, 特に古典的計算論で現在までに調べられてきた Turing degrees の様々な定義や性質を B.S.S. Turing degrees においても同じ形で定義ができるのか, さらにそこで問題になる性質について同等の結果が得られるのかを調べることである．

B.S.S. 計算論における実数値関数の計算可能性を L. Blum, M. Shub, S. Smale らはフローチャートを用いて定義しているが, この形では古典的な計算論と比較することは難しい．そこで, 我々はある種の計算機言語を導入し, この計算機言語で書かれたプログラムによって計算可能な関数という形で B.S.S. 計算可能な関数を定義しなおしている．また L. Blum, M. Shub, S. Smale らは関数の変数, 定数を実数にのみに限定しているが, 本論文における定義では, 実数, 自然数および実数の有限列の 3 種類の変数, 定数 (複素数は実数の対と考える) を扱えるものとして定義している．(もちろん, 変数, 定数を実数にのみに限定した場合には L. Blum, M. Shub, S. Smale の定義したものと計算可能という意味では一致する.) このことにより B.S.S. 計算論を古典的計算論の自然な拡張ととらえることができ, その結果古典的計算論における様々な結果や手法も B.S.S. 計

算論に導入することができるようになった. 特に, フローチャートによる定義では, 古典的な計算論で最も基本となる枚挙定理を記述することが困難であるのに対し, 本論文の定義では自然数, 実数, 実数の有限列を変数や定数として扱えることにより, 枚挙定理を記述することおよび証明することができるようになった.

B.S.S. 計算可能な関数の定義が得られると, 古典的 Turing degrees の定義を自然な形で B.S.S. 計算論の上に拡張する形で B.S.S. Turing degrees の概念を得ることができる. 古典的 Turing degrees の最初の結果として, 比較不能な 2 元の存在 (つまり Turing degrees 全体が全 (擬) 順序集合になっていないこと) が挙げられる. 本論文において B.S.S. Turing degrees に対しても比較不能な 2 元の存在を 3 種類の方法で示した. そのいずれも古典的 Turing degrees の手法とは異なり, 最初のものは位相的な手法を用いたものであり, 二つ目は代数的手法を用いたもの, 三つ目はその両方の手法を用いたものである. 古典的 Turing degrees の理論では, 対象が離散的な集合であるため, 位相的, 代数的, 解析的な手法を使うことが難しく数理論理学の強制法のみが研究手法であるのに対し, B.S.S. 計算論においては数理論理学の手法だけでなく, 位相的手法, 代数的手法, 解析的手法など様々な手法を用いることができる.

また, 古典的 Turing degrees の理論において Turing degrees の全体がなす (擬) 順序集合の中にどのような部分順序集合が埋め込むことができるかを調べることもとても重要である. 上述の第三の手法により, B.S.S. Turing degrees に対しては, その中に順序集合として実数直線を埋め込むことができることおよび比較不能な連続濃度の B.S.S. Turing degrees の存在を示すことができた. この事実は B.S.S. Turing degrees の理論において重要な結果であると思われる.

本論文は第 2 節で自然数上の計算論についてのまとめを行う. 前述のように, ある単純なプログラミング言語を導入し, それを基に帰納的関数, 帰納的述語, 帰納的集合等の概念を定義する. その後, 帰納的関数の主要な性質を述べる. 次に本論文で主要な役割を果たす Turing degrees の定義を述べ, Turing degrees に関する基本的な結果である比較不能なものの存在を示す定理を述べる.

第 3 節では自然数の議論に沿って実数値を含んだ計算論への拡張を行う. 自然数の場合と同様に, 実数をパラメータとして含む単純なプログラミング言語を定義し, それをもとに実数値の帰納的関数, 帰納的述語, 帰納的集合等の概念を定義し, その基本的性質を述べ, その後, 実数値の Turing degrees である B.S.S. Turing degrees に関する理論を扱う. 最初に B.S.S. Turing degrees の定義を行い, 古典的な Turing degrees のときに成立する比較不能なものの存在性が B.S.S. Turing degrees においても成立することを表わす定理を位相的な手法と代数的な手法の二通りの方法で示す. その第一のものが定理 4.1, 定理 4.2, 系 4.5 であり, 第二のものが定理 4.6 である.

第 5 節では第三の方法として位相, 代数の手法を用いた結果を述べている. B.S.S. Turing degrees 全体がなす (擬) 順序集合の中に実数直線 $\mathbb{R}$ が順序構造を保存したまま埋め込めること, および, 連続濃度個の互いに比較不能な B.S.S. Turing degrees が存在することを示す (定理 5.1, 系 5.2, 系 5.3). 第 4 節と本節の結果を合わせる事により, B.S.S. Turing degrees の全体がなす (擬) 順序集合の複雑さが明らかになる.

これら第 3 節, 第 4 節, 第 5 節が本論文の中心的な内容である.

最後に, 全体のまとめと共に本論文で解決できなかったいくつかの問題に触れている. 古典的計算論では示されている同一の型の変数に対する量化子を 1 つにまとめることが B.S.S. 計算論でも可能かどうか, 異なる次元では Turing degrees の全体の構造が異なるか, 同一次元内で jump オペレータが定義できるかなど Turing degrees の構造に対する重要な問題が未解決のまま残された. これらの問題の解決は今後の課題である.

本論文の主要な成果は著者が [9] において発表したものに基づいている.

尚, 本研究とほぼ同時期に K. Meer と M. Ziegler によって $\{q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ が $\mathbb{Q}$ より B.S.S. Turing degree の意味で真に小さいものであることなど B.S.S. Turing degrees と同等な概念についての研究が独立に行われている [5].

2　自然数上の計算論のまとめ

この節では実数値計算論の前提となっている自然数値の計算論である帰納的関数の理論について, 基本的な定義および性質を解説する.

帰納的関数の理論は計算可能な関数とは何かを答えると共に, 数学的な集合や定義などの複雑性の判定を行うことを大きな目的としている.

$\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ を自然数の全体のなす集合とする.

本論文では様々な計算可能性の定式化のうち, [4] において導入された PL という単純な計算機言語言語を用いたものを採用している. PL は必要最小限の実行命令のみを持つもっとも単純な計算機言語である. 計算機言語 PL で記述されたプログラムで計算可能な関数として帰納的関数 (すなわち計算可能な関数) を定義している.

定義　(計算機言語 PL)

計算機言語 PL は以下のような構成で成り立っている.

1. 変数記号

PL の変数はすべて ω の値のみをとり, 以下の種類がある.

- ◦ $N_0, N_1, \ldots$　入出力変数
- ◦ $TN_0, TN_1, \ldots$　補助変数
- ◦ Y　出力変数

2. 実行命令

PL の実行命令は以下の種類のものがある. 但し N は任意の変数とする.

S1)	$N := N + 1$	S2)	$N := N \dot{-} 1$
S3)	IF $N \neq 0$ GOTO s	S4)	END

PL のプログラムとは各行に上記の実行命令を 1 つずつ書きならべた文字列のことである. その各行には 1 から始まる行番号が付いており, S3) に現れる s は $N \neq 0$ である場合に次に実行する実行命令の行番号を表わしている.

PL のプログラムに対し, 計算を行うには入力 $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle \in \omega^n$ に対して各変数を $N_0 = x_0, N_1 = x_1, \ldots, N_{n-1} = x_{n-1}$ (その他の変数は 0) と初期化し, 行番号 1 の文から実行を開始し, 'END' 文に到達すると実行を停止する. 実行が停止したとき, 変数 Y の値をその実行に対する計算結果とする. 但し, 'END' 文に到達しない場合もしくは S3) 型の命令文の飛び先 s がプログラム内に存在しない場合はこの実行は停止しないものとする.

PL は利用できる命令が 4 種類しかなく実用的でない計算機言語であるが, 関数の計算可能性のみを研究するためにはこれで十分である. また, PL の変数は負の値を代入できないことや, いくらでも大きな値も記憶できることおよび, PL には入出力命令がなく, プログラムの実行中に新しい入力を得ることができないことなどは, 実際に存在する計算機言語と大きく異なる.

帰納的関数とはこの PL 言語でプログラムを記述することができる関数のことであり, 正確には

次のように定義される.

定義 (帰納的関数, 帰納的集合, 帰納的述語)

- 部分関数 $f : \omega^n \to \omega$ に対し, その定義域を $\mathrm{dom}(f)$ とし, $\vec{x} \in \mathrm{dom}(f)$ であることを $f(\vec{x}) \downarrow$ とあらわし, $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(f)$ であることを $f(\vec{x}) \uparrow$ とあらわす.
- 部分関数 $f : \omega^n \to \omega$ に対して PL のプログラム q があって
各 $\vec{x} \in \omega^n$ に対し
$$\begin{cases} f(\vec{x}) \downarrow = y & \Longleftrightarrow \quad \text{入力 } \vec{x} \text{ における } q \text{ の実行が停止し, その出力が } y \text{ である.} \\ f(\vec{x}) \uparrow & \Longleftrightarrow \quad \text{入力 } \vec{x} \text{ における } q \text{ の実行が停止しない.} \end{cases}$$
をみたすとき f は q により計算可能といい, また f は帰納的関数であるという.
- ω^n の部分集合 A に対し, その特性関数 $\chi_A : \omega^n \to \{0, 1\}$ が帰納的な全域関数であるとき, A を帰納的集合という.
- ω^n の上の述語 P に対して, 集合 $\{\vec{x} \in \omega^n | P(x)\}$ が帰納的集合であるとき, P を帰納的述語という.

PL のプログラムは自然数によって符号化することができる. その自然数を $\ulcorner q \urcorner$ で表わすことにする. プログラムの符号化は実数値の計算論にも拡張することができるが, 実数値の場合自然数だけでなく, 実数値の有限列も用いて符号化することになる. このことは実数値計算論でとても重要なことである.

自然数の計算論において PL で記述できるプログラムは自然数で符号化できるので, その全体は高々可算個になる. このことより, 帰納的関数の全体も高々可算個であることが分かり, 自然数から自然数への関数の全体は非可算個存在するので, このことより帰納的関数でない関数の存在が示される. また, 具体的にも

$$\begin{cases} \mathrm{HALT}(\ulcorner q \urcorner, x) = 1 & \Longleftrightarrow \quad 1 \text{ 入力のプログラム } q \text{ に } x \text{ を代入して実行すると停止する.} \\ \mathrm{HALT}(\ulcorner q \urcorner, x) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{その他のとき.} \end{cases}$$

と定めた関数 $\mathrm{HALT}(x)$ は帰納的関数でないことが知られている.
帰納的関数を扱うとき, その関数の PL 言語によるプログラムを毎回記述するのはとても不便で扱いにくい. 関数 f が帰納的関数であることを示す場合次の定理を利用する.

定理 自然数値の変数を持ち自然数を値にする関数のクラス $\mathcal{C}$ で以下をみたす最小なものは帰納的関数の全体のなすクラスと一致する.

(1) 関数 $S(x) = x + 1$, $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $C_0(x) = 0$ は $\mathcal{C}$ の元である.

(2) $g(y_1, \ldots, y_m)$, $h_1(x_1, \ldots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$ がすべて $\mathcal{C}$ の元ならば $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$ で定まる f も $\mathcal{C}$ の元である.

(3) $g(x_1,\ldots,x_n)$ と $h(y,x,x_1,\ldots,x_n)$ が $\mathcal{C}$ の元ならば

$$\begin{cases} f(0,x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n) \\ f(x+1,x_1,\ldots,x_n) = h(f(x,x_1,\ldots,x_n),x,x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

により定まる f も $\mathcal{C}$ の元である.

(4) $g(y,x_1,\ldots,x_n)$ が $\mathcal{C}$ の元ならば

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mu y[g(y,x_1,\ldots,x_n)=1]$$

によって定まる f も $\mathcal{C}$ の元である.

(ここで $\mu y[\cdots]$ とは $[\cdots]$ をみたす最小の自然数 y を表す. 但し, このような y が存在しない場合 f の値は存在しないものとする. μ を最小化演算子もしくは μ オペレーターと呼ぶ.)

この定理より例えば

$$\begin{cases} f(0,y) & = & U_1^1(y) \\ f(x+1,y) & = & S(f(x,y)) \end{cases}$$

により与えられる関数 $f:\omega^2\to\omega$ は帰納的関数であることが分かる. この $f(x,y)$ が $x+y$ であることは明らかなので, このことより "+" が帰納的な関数であることが分かる. さらに同様にして "×" やベキ計算, 階乗など数学的に基本的な関数が全て帰納的関数であることが分かる.

ここで, ω^n の部分集合の間の計算可能性による複雑さの度合いを意味する Turing degree (of unsolvability) の定義を与える. これは二つの集合に対して, その集合たちが計算可能性の立場からみてどちらがその情報量を多く持っているかを比較するものである.

Turing degree の定義に必要になるため, 集合 $S\subseteq\omega^n$ に対し, S に相対化した計算可能性の概念を導入する. これにより, 自然数上の関数や集合が集合 S を用いて計算できるのかできないのかの判定基準が与えられる. ω の部分集合がどの程度帰納的でないか (また, その集合の構造の複雑さ, 情報量の多さ) の基準を調べるのが Turing degree of unsolvability の目的である.

定義 (S に相対化した計算, S–帰納的計算)

- $S\subseteq\omega^n$ に対して, 新しいプログラム言語 PL^S を PL に次の型の新しい実行命令を付け加えたものとする.
  SO) IF $\langle M_1,\ldots,M_n\rangle\in S$ GOTO s
  (ここで各 M_i は PL の変数とする.)
- 部分関数 f が計算機言語 PL^S で計算可能であるとき, f は S–帰納的関数であるという. また S–帰納的集合, S–帰納的述語も同様に定める.
  S が帰納的集合でないときには明らかに S–帰納的関数の全体は, 帰納的関数の全体よりも真に大きな集合になる.

相対化された計算を用いて, Turing degrees の定義が以下のように定義される.

定義　(Turing degrees)

- $A,\ B \subseteq \omega$ に対し, A が B–帰納的集合であるとき A は B から Turing 還元可能であるといい, $A \leq_T B$ とあらわす.
- $(A \leq_T B)$ & $(B \leq_T A)$ を $A \equiv_T B$ とあらわし,
  $(A \leq_T B)$ & $(B \not\equiv_T A)$ を $A <_T B$ とあらわす.
- $\mathcal{D}_T = (\wp(\omega)/\equiv_T)$ とし, $\mathcal{D}_T$ の元を Turing degree と呼ぶ.
- $A, B \subseteq \omega$ に対して $(A \not\leq_T B)$ & $(B \not\leq_T A)$ となることを A と B は Turing degree の意味で比較不能であるという.

Turing degree of unsolvability とは ω の部分集合全体 $\wp(\omega)$ 上に定義された擬順序で , その最小元が帰納的集合たちの全体になっている. この擬順序は $\wp(\omega)$ の元の間の計算性の意味での複雑さを比較しているものであり, その擬順序構造を調べることは, ω の部分集合たちの “計算可能性の意味での複雑さ” の構造を調べることである. その最初の結果として次のものがある.

定理　ある $A_n \subseteq \omega$ $(n \in \omega)$ が存在し, $m \neq n$ ならば A_m と A_n は Turing degree の意味で比較不能である.

特に, この擬順序は線形順序ではない.
現在も, Turing degrees の研究は続いており, このほかにも様々な研究結果が得られている. 特に, Turing degrees の全体の集合に非自明な (擬順序) 自己同型対応が存在するかどうかが現在最も重要な問題として研究が進んでいる.

3　実数値計算論の定義, 記号, 基本的性質について

ここで L. Blum, M. Shub, S. Smale らが定義した実数値の計算可能性関数の定義を与える. 実数値関数の計算可能性に関しては現在までに幾つかのものが存在するが自然数値関数の計算可能性の場合と違い, これらは本質的に異なるものとなっている. L. Blum, M. Shub, S. Smale の計算可能性 (B.S.S. 計算可能性) はその中でも最も弱い形すなわち計算可能性のクラスとして最も小さいものとなっている. B.S.S. 計算可能な関数は他の計算可能関数よりも代数的, 幾何学的な性質を多く有しており, 彼らの目的である幾何学的な集合の性質を調べるのにより適したものとなっている.

L. Blum, M. Shub, S. Smale たちは [1] においてフローチャートを用い, 実数のみを変数に持つ関数として計算可能な関数を定義している. しかし, 本論文では 前節で与えた自然数値計算論の定義に用いた計算機言語 PL を実数値計算にまで拡張した $PL(\mathbb{R})$ という計算機言語を導入し, $PL(\mathbb{R})$ で計算可能なものとして B.S.S. 計算可能関数を定義している. $PL(\mathbb{R})$ は自然数型, 実数型, 実数の有限列型の変数を持った計算機言語であり, B.S.S. 計算可能関数は変数および値として, 自然数, 実数, 実数の有限列を持つことができる. この定義において, 変数の値とも実数に関数に制限したものは L. Blum, M. Shub, S. Smale たちが与えた計算可能な関数に一致するが, 自然数や実数の有限列も変数として利用できることにより, 計算論的な性質の表現がよりやりやすくなっている.

定義　(計算機言語 $PL(\mathbb{R})$)

1. 変数記号

- ○ $N_0, N_1, \ldots$　自然数型の入出力変数
- ○ $TN_0, TN_1, \ldots$　自然数型の補助変数
- ○ $A_0, A_1, \ldots$　実数型の入出力変数
- ○ $TA_0, TA_1, \ldots$　実数型の補助変数
- ○ $X_0, X_1, \ldots$　実数の有限列型の入出力変数
- ○ $TX_0, TX_1, \ldots$　実数の有限列型の補助変数

注意

1) 自然数型の変数は非負の整数値をとる.
2) X が実数の有限列型の変数のとき
   2.1) X の値は実数の有限列である.
   2.2) $X[i]$ により X の第 i 番目の要素をあらわす.
   2.3) $\mathrm{size}(X)$ は X の列としての長さをあらわす.
   2.4) $i \geq \mathrm{size}(X)$ である場合, $X[i] = 0$ とする.

2. 実行命令

N を自然数型の変数, A, B, C および B_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を実数型の変数, X, Y を実数の有限列

型の変数とする.

$PL(\mathbb{R})$ の実行命令は以下の種類のものがある.

S1)	$N := N + 1$	S2)	$N := N \dot{-} 1$
S3)	IF $N \neq 0$ GOTO s	S4)	$A := B + C$
S5)	$A := B - C$	S6)	$A := B \cdot C$
S7)	$A := B/C$	S8)	$A := B$
S9)	$A := \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	S10)	IF $A \leq B$ GOTO s
S11)	$A := X[N]$	S12)	$X[N] := A$
S13)	$N := \mathrm{size}(X)$	S14)	$X := \langle B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle$
S15)	$X := \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$	S16)	$X := Y$
S17)	END		

$PL(\mathbb{R})$ のプログラムも PL の場合と同様に各行に行番号がついている.
そして, 入力 $\langle \vec{x}, \vec{\alpha}, \vec{Z} \rangle \in \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$ に対して各変数を

$N_0 = x_0, N_1 = x_1, \ldots, N_{n-1} = x_{n-1}$

$A_0 = \alpha_0, A_1 = \alpha_1, \ldots, A_{m-1} = \alpha_{m-1}$

$X_0 = Z_0, X_1 = Z_1, \ldots, X_{l-1} = Z_{l-1}$

(その他の変数は 0) に初期化し, 行番号 1 の文から実行を開始し, ‘END’ 文に到達すると実行を終了する.

定義 (B.S.S. 帰納的写像, B.S.S. 帰納的集合, B.S.S. 帰納的述語)

$\mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$, $\mathfrak{Y} = \omega^{n'} \times \mathbb{R}^{m'} \times (\mathbb{R}^{<\omega})^{l'}$ とする.

- 部分写像 $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ が $PL(\mathbb{R})$ のプログラム q により計算可能なとき f を B.S.S. 帰納的写像という.
- $\mathfrak{X}$ の部分集合 A に対し, その特性関数 $\chi_A : \mathfrak{X} \to \{0, 1\}$ が B.S.S. 帰納的な全域関数であるとき, A を B.S.S. 帰納的集合という.
- $\mathfrak{X}$ の上の述語 P に対して, 集合 $\{\mathfrak{A} \in \mathfrak{X} | P(\mathfrak{A})\}$ が B.S.S. 帰納的集合であるとき, P を B.S.S. 帰納的述語という.

定義 (S–B.S.S. 帰納的計算)

$S \subseteq \mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$ に対して, 新しいプログラム言語 $PL(\mathbb{R})^S$ を $PL(\mathbb{R})$ に次の型の新しい実行命令を付け加えたものとする.

SO) IF $(\langle M_0, \ldots, M_{n-1}, B_0, \ldots, B_{m-1}, Y_0, \ldots, Y_{l-1} \rangle \in S)$ GOTO s

ここで各 M_i は自然数型の変数, B_j は実数型の変数, Y_k は実数値の有限列型の変数とする.

部分写像 f が計算機言語 $PL(\mathbb{R})^S$ で計算可能であるとき, f は S–B.S.S. 帰納的写像であるという. また S–B.S.S. 帰納的集合, S–B.S.S. 帰納的述語も同様に定める.

定義 ($PL(\mathbb{R})^S$ プログラムの符号化)

$PL(\mathbb{R})^S$ のプログラムは実行命令の有限列であるから, 実行命令 S9), S15) に現れる実数を除き, PL のプログラムと同様に自然数 e によって符号化することができる. そして S9), S15) に現れる実数を実数の有限列 E としてまとめると, 計算機言語 $PL(\mathbb{R})^S$ のプログラムは $\langle e, E\rangle$ ($e \in \omega$, $E \in \mathbb{R}^{<\omega}$) の形で表わすことができる. この $\langle e, E\rangle$ を $PL(\mathbb{R})^S$ のプログラムの符号化といい, そのプログラムで計算可能な写像を f とするとき $f = \{\langle e, E\rangle\}^S$ とあらわし, $\langle e, E\rangle$ を f の index という.

実数の計算論を展開するにあったて自然数の計算論では出てこなかった幾つかの概念が必要になる. 以下にそれらの概念の定義を与える.

定義 (計算路)

f が $\langle e, E\rangle$ を index にもつ S–帰納的写像であるとき

- index $\langle e, E\rangle$ のプログラムに対し, 変数を入力 $\mathfrak{A} = \langle \vec{x}, \vec{\alpha}, \vec{Z}\rangle$ に初期化して実行すると T–ステップで実行が停止する場合, そのプログラムの実行の推移をあらわした行番号の列 $p = \langle l_0, l_1, \ldots, l_{T-1}\rangle$ を $\{\langle e, E\rangle\}^S(\mathfrak{A})$ の計算路という.
- $V_p^{\langle e,E\rangle,S} = \{\mathfrak{A} \mid \{\langle e, E\rangle\}^S(\mathfrak{A})$ の計算路が $p\}$ と定める.

定義 (B.S.S. 帰納的可算集合)

- f が $\langle e, E\rangle$ を index に持つ S–B.S.S. 帰納的写像であるとき, $PL(\mathbb{R})^S$ プログラム $\langle e, E\rangle$ が入力 $\mathfrak{A}$ に対し, 実行が停止することを $f(\mathfrak{A})\downarrow$ とあらわし, 実行が停止しないことを $f(\mathfrak{A})\uparrow$ とあらわす. また, $\mathrm{dom}(f) = \{\mathfrak{A} \mid f(\mathfrak{A})\downarrow\}$ とおく.
- 集合 Ω に対して, S–B.S.S. 帰納的写像 f が存在して, $\Omega = \mathrm{dom}(f)$ となるとき, Ω を S–B.S.S. 帰納的可算集合という. また $\{\mathfrak{A} \mid A(\mathfrak{A})\}$ が S–B.S.S. 帰納的可算集合であるとき A を S–B.S.S. 帰納的可算述語という.
  但し, $S = \emptyset$ である場合, 単に B.S.S. 帰納的可算集合/B.S.S. 帰納的可算述語という.

定義 (基本半代数的集合)

- $\mathbb{R}^m$ の部分集合 X に対して, 有限個の有理関数の組 $h_1^1(x), \ldots, h_{n_1}^1(x)$, $h_1^2(x), \ldots, h_{n_2}^2(x)$ が存在して,

$$\begin{aligned} x \in X \quad &\Longleftrightarrow \\ &h_1^1(x) > 0 \;\&\; \cdots \;\&\; h_{n_1}^1(x) > 0 \quad \& \quad h_1^2(x) \geq 0 \;\&\; \cdots \;\&\; h_{n_2}^2(x) \geq 0 \end{aligned}$$

  をみたすとき, A を基本半代数的集合といい, 上の式を X の定義式とよぶ.
- 写像 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ の各成分が有理関数であるとき, h を有理写像という.

- 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{R}^m$ の部分集合 X が
有限個の有理関数の組 $h^1_1(x), \ldots, h^1_{n_1}(x),\ h^2_1(x), \ldots, h^2_{n_2}(x)$ と有限個の有理写像の組 $h^3_1(x), \ldots, h^3_{n_3}(x),\ h^4_1(x), \ldots, h^4_{n_4}(x)$ が存在して,

$$\begin{aligned} x \in X \iff & \\ & h^1_1(x) > 0 \ \&\ \cdots \ \&\ h^1_{n_1}(x) > 0 \ \& h^2_1(x) \geq 0 \ \&\ \cdots \ \&\ h^2_{n_2}(x) \geq 0 \\ & \&\ h^3_1(x) \in S \ \&\ \cdots \ \&\ h^3_{n_3}(x) \in S \ \& h^4_1(x) \notin S \ \&\ \cdots \ \&\ h^4_{n_4}(x) \notin S \end{aligned}$$

をみたすとき, A を S–基本半代数的集合といい, 上の式を X の定義式とよぶ.

ここで, 本論文の主要な結果である 定理 4.2, 定理 4.6, 定理 5.1 を証明するにあたって必要となる基本的な定理, 補題を与える.

定理 (枚挙定理)
$T^S_{n,m,l}(e, E, \mathfrak{A}, p) \equiv$ “ $\mathfrak{A} \in V^{\langle e,E \rangle, S}_p$ ” ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$) とおくと述語 $T^S_{n,m,l}(e, E, \mathfrak{A}, p)$ は S–B.S.S. 帰納的述語になる. また, 任意の S–B.S.S. 帰納的可算集合 $A \subseteq \mathfrak{X}$ に対して, ある $\langle e, E \rangle$ が存在し

$$\mathfrak{A} \in A \iff \exists p \in \omega\ T^S_{n,m,l}(e, E, \mathfrak{A}, p)$$

をみたす.

定理 (パラメータ定理) $\mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$, $\mathfrak{Y} = \omega^{n'} \times \mathbb{R}^{m'} \times (\mathbb{R}^{<\omega})^{l'}$ とする. B.S.S. 帰納的写像 $S^{n',m',l'}_{n,\,m,\,l} : \omega \times \mathbb{R}^{<\omega} \times \mathfrak{X} \to \omega \times \mathbb{R}^{<\omega}$ が存在し

$$\{S^{n',m',l'}_{n,\,m,\,l}(e, E, \mathfrak{A})\}^A(\mathfrak{B}) = \{\langle e, E \rangle\}^A(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ (ただし } \mathfrak{A} \in \mathfrak{X},\ \mathfrak{B} \in \mathfrak{Y})$$

をみたす.

補題 f が $\langle e, E \rangle$ を index として持つ S–B.S.S. 帰納的写像であるとき, 次が成り立つ.

(1) $V^{\langle e,E \rangle, S}_p$ は S–基本半代数的集合であり, その定義式に現れる各係数は e, E, p から B.S.S. 帰納的に求められる.
(2) $\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{p \in \omega} V^{\langle e,E \rangle, S}_p$ をみたす. それゆえに S–B.S.S. 帰納的可算集合は S–基本半代数的集合の可算個の直和としてあらわせる.
(3) f を $V^{\langle e,E \rangle, S}_p$ に制限したものは有理写像である.

補題 $A(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$ 上の述語とすると, 次は同値になる.

(1) $A(\mathfrak{A})$ は S–B.S.S. 帰納的可算述語.
(2) ある $\langle e, E \rangle$ が存在し, $A(\mathfrak{A}) \iff \exists p \in \omega\ T^S_{n,m,l}(e, E, \mathfrak{A}, p)$.

(3) ある S–B.S.S. 帰納的述語 R が存在し, $A(\mathfrak{A}) \iff \exists n \in \omega\ R(n, \mathfrak{A})$.

自然数上の帰納的関数の理論と違い, B.S.S. 帰納的写像の理論では変数の型として, 自然数, 実数, 実数の有限列の 3 種類のものが存在するので, 存在記号 '∃' も 3 種類のものが存在する. 次の定理は B.S.S. 計算論において 3 種類の存在記号の使用により帰納的可算性が保存されることを示している.

定理 3.1

(1) $R(n, \mathfrak{A})$ が B.S.S. 帰納的可算述語ならば, $\exists n \in \omega\ R(n, \mathfrak{A})$ もまた B.S.S. 帰納的可算述語である.

(2) $R(\alpha, \mathfrak{A})$ が B.S.S. 帰納的可算述語ならば, $\exists \alpha \in \mathbb{R}\ R(\alpha, \mathfrak{A})$ もまた B.S.S. 帰納的可算述語である.

(3) $R(X, \mathfrak{A})$ が B.S.S. 帰納的可算述語ならば, $\exists X \in \mathbb{R}^{<\omega}\ R(X, \mathfrak{A})$ もまた B.S.S. 帰納的可算述語である.

証明: (1) 自明である.
(2) $R(\alpha, \mathfrak{A})$ が B.S.S. 帰納的可算述語ならば, ある $\langle e, E \rangle$ を用いて

$$R(\alpha, \mathfrak{A}) \equiv \exists p \in \omega\ T_{n,m+1,l}(e, E, \alpha, \mathfrak{A}, p).$$

とすることができる. よって

$$\begin{aligned}
& \exists \alpha \in \mathbb{R}\ R(\alpha, \mathfrak{A}) \\
\equiv\ & \exists \alpha \in \mathbb{R} \exists p \in \omega\ T_{n,m+1,l}(e, E, \alpha, \mathfrak{A}, p) \\
\equiv\ & \exists p \in \omega \exists \alpha \in \mathbb{R}\ T_{n,m+1,l}(e, E, \alpha, \mathfrak{A}, p) \\
\equiv\ & \exists p \in \omega \exists \alpha \in \mathbb{R}\ T_{0,1,0}(S(e, E, \mathfrak{A}), \alpha, p) \\
& \qquad (\text{ここで } S \text{ はパラメータ定理における } S^{0,\,1,\,0}_{n,\,m,\,l} \text{ のことである.}) \\
\equiv\ & \exists p \in \omega\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha \in V_p^{S(e,E,\mathfrak{A})}.
\end{aligned}$$

$V_p^{S(e,E,\mathfrak{A})}$ は基本半代数的集合なので, 有限個の有理関数による連立不等式としてあらわすことができる. そして $\exists \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha \in V_p^{S(e,E,\mathfrak{A})}$ はその連立不等式が解をもつことを意味している. ここで実閉体における量化子消去定理 (の効果的な形 ([6]) を利用することにより, $\exists \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha \in V_p^{S(e,E,\mathfrak{A})}$ は有限個の有理関数の不等式としてあらわすことができる. さらに, それらの有理関数の各係数は e, E, p, $\mathfrak{A}$ から帰納的に計算可能である. それゆえにこれらの連立不等式を $R'(e, E, \mathfrak{A}, p))$ であらわせば, これは B.S.S. 帰納的述語になる.

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha \in V_p^{S(e,E,\mathfrak{A})} \equiv R'(e, E, \mathfrak{A}, p).$$

であるので

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\ R(\alpha, \mathfrak{A}) \equiv \exists p \in \omega\ R'(e, E, \mathfrak{A}, p)$$

が得られ, それゆえに $\exists \alpha \in \mathbb{R}\ R(\alpha, \mathfrak{A})$ は B.S.S. 帰納的可算述語である.

(3) 各 $n \in \omega$ に対し

$$A_n(\mathfrak{A}) \equiv \exists \alpha_1 \cdots \exists \alpha_n \in \mathbb{R}\ R(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \mathfrak{A})$$

とする．これは (2) より B.S.S. 帰納的可算述語である．さらに (2) の証明を詳しく見ると $A_n(\mathfrak{A})$ は n に関して効果的に定義されていることがわかる．よって $U(n, \mathfrak{A}) \equiv A_n(\mathfrak{A})$ とおくと $U(n, \mathfrak{A})$ もまた B.S.S. 帰納的可算述語になる．このことより

$$\exists X \in \mathbb{R}^{<\omega}\ R(X, \mathfrak{A}) \equiv \exists n \in \omega\ U(n, \mathfrak{A})$$

もまた B.S.S. 帰納的可算述語となる．

∎

系 3.2 f が B.S.S. 帰納的写像ならば range(f) は B.S.S. 帰納的可算集合である．

ここで B.S.S. 帰納的写像の概念を利用して $\omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$ の部分集合の間の関係 B.S.S. Turing 還元可能性を定義する．これは自然数上の Turing 還元可能性の定義を実数値の B.S.S. 計算可能性に自然な形に拡張したものとなっている．B.S.S. Turing 還元可能性は自然数上の Turing degrees の場合と同じく, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{<\omega}$ の部分集合の間の情報量の多さの違いを表わす擬順序をなしている．B.S.S. Turing degrees の全体がなすクラスのこの擬順序構造がどのような構造になっているのかを調べることは数理論理学の重要な研究テーマであるとともに実数の集合の複雑性の解析や幾何学的性質の解析につながる．

定義 (B.S.S. Turing degrees)
$\mathfrak{X} = \omega^n \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{<\omega})^l$, $\mathfrak{Y} = \omega^{n'} \times \mathbb{R}^{m'} \times (\mathbb{R}^{<\omega})^{l'}$ とする．

- $A \subseteq \mathfrak{X}$ と $B \subseteq \mathfrak{Y}$ に対して, A が B から B.S.S. Turing 還元可能であるとは, ある全域的な B–B.S.S. 帰納的写像 $f : \mathfrak{X} \to \{0, 1\}$ が存在し,

$$f(\mathfrak{A}) = 1 \iff \mathfrak{A} \in A$$

  をみたすこととする．このとき $A \leq_T^{BSS} B$ とあらわす．
- $(A \leq_T^{BSS} B)$ & $(B \leq_T^{BSS} A)$ を $A \equiv_T^{BSS} B$ とあらわす．
  また $(A \leq_T^{BSS} B)$ & $(B \not\leq_T^{BSS} A)$ を $A <_T^{BSS} B$ とあらわす．
- $\mathcal{D}_T^{BSS} = \left(\bigcup_{\mathfrak{X}} \wp(\mathfrak{X}) \right) \Big/ {\equiv_T^{BSS}}$ とし, $\mathcal{D}_T^{BSS}$ の元を B.S.S. Turing degree と呼ぶ．
- $A \subseteq \mathfrak{X}$ と $B \subseteq \mathfrak{Y}$ に対して $(A \not\leq_T^{BSS} B)$ & $(B \not\leq_T^{BSS} A)$ となることを A と B は B.S.S. Turing degree の意味で比較不能であるという．

4 比較不能な Turing degrees の存在性について

この節では B.S.S. Turing degrees の全体について最も基本的な性質である比較不能な 2 元の存在を 2 通りの手法により示す.

<u>第一の方法 (位相的手法)</u>

ここでは位相的手法を用いて有理数の全体の集合とカントールの 3 進集合が B.S.S. Turing degree の意味で比較不能であることを示す.

定理 4.1 A, B を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. B が $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ 集合 $(\alpha > 1)$ であり $A \leq^{BSS}_T B$ をみたすならば A もまた $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ 集合になる.

証明:

$A \leq^{BSS}_T B$ であるので, $f : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, $f = \{\langle e, E\rangle\}^B$ を全域的な B–B.S.S. 帰納的関数で $f(x) = 1 \iff x \in A$ をみたすものとする.

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\omega} V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ である. また $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ は 各 $p \in \omega$ に対して B– 基本半代数的集合であるので, 以下のように有限個の有理写像を用いてあらわすことができる

$$\begin{gathered} h^1_1(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h^1_{n_1}(x) > 0 \& h^2_1(x) \geq 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h^2_{n_2}(x) \geq 0 \\ \& \ h^3_1(x) \in B \ \& \ \cdots \ \& \ h^3_{n_3}(x) \in B \& h^4_1(x) \notin B \ \& \ \cdots \ \& \ h^4_{n_4}(x) \notin B. \end{gathered}$$

B は $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ 集合であり, 各 $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ が有理写像と B を持ちいてあらわせるので $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ もまた $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ 集合である.

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists p \in \omega[f(x) = 1 \ \& \ x \in V_p^{\langle e,E\rangle,B}] \\ x \notin A &\iff \exists p \in \omega[f(x) = 0 \ \& \ x \in V_p^{\langle e,E\rangle,B}]. \end{aligned}$$

をみたす. f は各 $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ 上有理関数として表現できるので, f はある閉部分集合を除いた集合上連続な関数になる. これらのことから, A および A^c が Σ^0_α 集合になることがわかる. よって A は $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ 集合である. ∎

定理 4.2 $Q \subseteq \mathbb{R}$ を高々可算な集合とし, $C \subseteq \mathbb{R}$ を非可算無限な測度 0 集合 [もしくは第 1 種集合] とする. このとき $C \not\leq^{BSS}_T Q$ となる.

以下の補題はこの定理を証明するために必要である.

補題 4.3 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定数でない有理関数, $Q \subseteq \mathbb{R}$ を高々可算な集合とすると $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in Q\}$ は高々可算な集合となる.

補題 4.4 全域的な B–B.S.S. 帰納的関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \{\langle e, E\rangle\}^B$ をその像が有限集合なものとする．このとき $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ が無限集合ならば, f は $V_p^{\langle e,E\rangle,B}$ の上で定数関数である．

(定理 4.2 の証明:)

$C \leq_T^{BSS} Q$ と仮定して矛盾を導く．$f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $f = \{\langle e, E\rangle\}^Q$ を全域的な Q–B.S.S. 帰納的関数で $f(x) = 1 \iff x \in C$ をみたすものとする．$\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\omega} V_p^{\langle e,E\rangle,Q}$ より, ある $p \in \omega$ について $V_p^{\langle e,E\rangle,Q} \cap C$ は非可無限算集合となる．$V_p^{\langle e,E\rangle,Q}$ をあらわす定義式を

$$\begin{gathered} h_1^1(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x) > 0 \& h_1^2(x) \geq 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x) \geq 0 \\ \& \ h_1^3(x) \in Q \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_3}^3(x) \in Q \& h_1^4(x) \notin Q \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x) \notin Q \end{gathered}$$

とする．また各有理写像は定数写像ではないと仮定してよい．ここで $h_i^3(x) \in Q$ をみたす x の全体は高々可算個なので $V_p^{\langle e,E\rangle,Q}$ が非可算無限集合であることよりこの定義式の中にこの形の式は含まれない．さらに上の定義式から $h_j^2(x) \geq 0$ の形をした式の等号を除いた

$$\begin{aligned} h_1^1(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x) > 0 \& h_1^2(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x) > 0 \\ \& h_1^4(x) \notin Q \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x) \notin Q \end{aligned}$$

によって定まる集合を V' とすれば $V' \subseteq V_p^{\langle e,E\rangle,Q}$ かつその差は高々可算な集合なので V' もまた非可算無限集合である．V' が空でない開集合から高々可算個の点を除いた集合であることと C が測度 0 な集合 [もしくは第一種集合] であることより $V' - C \neq \emptyset$. よって $V_p^{\langle e,E\rangle,Q} - C \neq \emptyset$ となる．このことと $V_p^{\langle e,E\rangle,Q} \cap C \neq \emptyset$ より f が $V_p^{\langle e,E\rangle,Q}$ 上定数関数であることに反する． ∎

系 4.5 $\mathbb{Q}$ を有理数全体の集合, C をカントールの 3 進集合とすると, $\mathbb{Q}$ と C は B.S.S. Turing degree の意味で比較不能である．

証明: C は閉集合なので $\boldsymbol{\Delta}_2^0$ 集合である．また, Baire のカテゴリー定理より $\mathbb{Q}$ は $\boldsymbol{\Delta}_2^0$ でないことが得られる．よって 定理 4.1 より $\mathbb{Q} \not\leq_T^{BSS} C$ が得られ, 定理 4.2 より $C \not\leq_T^{BSS} \mathbb{Q}$ が得られる． ∎

<u>第二の方法 (代数的手法)</u>

ここでは代数的手法を使って B.S.S. Truring degree の意味で比較不能な集合の存在を示す.

定理 4.6 $K, L \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上有限生成的な体とすと
$K \subseteq L \iff K \leq_T^{BSS} L$ をみたす．

証明: ($K \subseteq L \Rightarrow K \leq_T^{BSS} L$)

ここで, L は K の単拡大であると仮定してよい．なぜならば K が L 上有限生成的な体であるとき, $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R})$ とあらわせるので

$$K \subseteq K(\alpha_1) \subseteq K(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \cdots \subseteq K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

とすると, 各拡大が単拡大であることおよび $\leq_T^{BSS}$ が推移的な関係であることから K と L についても結果が得られるからである.

$L = K(\alpha)$, $n = [L : K]$ $(1 \leq n \leq \infty.)$ とすると, $x \in K$ を判定する $PL(\mathbb{R})^L$ のプログラムは以下のように与えられる.

1 **if** $x \notin L$ **then output** 0 **end**

2 $x \in L = K(\alpha)$ なので, $x = f(\alpha)/g(\alpha)$ となる K 係数の既約有理関数 $f(t)/g(t)$ ($f(t)$, $g(t)$ は多項式, $\deg f$, $\deg g < n$) を見つける. ($n < \infty$ のときには , $g(t) \equiv 1$ ととる.) ($K = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ と書けるので, K の元および K 係数多項式は B.S.S. 帰納的写像によって枚挙することができる. また各 x に対し f, g は一意的に決定される.)

3 **if** $\deg f = \deg g = 0$ **then output** 1 **else output** 0

4 **end**

∎

逆を示すために次の補題を与える.

補題 4.7 $K \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分体とする. $h(x)$ を 実係数有理関数で, 無限個の $r \in K$ に対して $h(r) \in K$ をみたすものとすると, $h(x)$ の各係数は K の元としてとることができる.

証明:

$h(x) = f(x)/g(x)$, ($f(x)$, $g(x)$ 多項式) とおく. $n = \deg(f) + \deg(g)$ に関する数学的帰納法により示す.

$n = 0$ ならば明らかである.

$n > 0$ ならば , $1/h(x)$ を考えることにより $\deg(f) \geq \deg(g)$ と仮定してよい. $h(r) = q$ とすると

$$h(x) = (f(x) - qg(x))/g(x) + q = (x - r)f_1(x)/g(x) + q$$

とおけるので, $f_1(x)/g(x)$ に対して帰納法の仮定を適用すればよい.

∎

補題 4.8 $K \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分体, $h(x)$ を実係数有理関数とする. $\alpha \notin K$ と $q_1, q_2 \in K$ $(q_1 \neq q_2)$ が

$$\exists^\infty r \in K[h(r + q_i\alpha) \in K] \qquad (i = 1, 2)$$

をみたすならば $h(x)$ は定数関数である.

証明:

有理関数 $h(x + q_i\alpha)$ は無限個の $r \in K$ に対して, K に値をとるので, 補題 4.7 より K 係数有理関数としてよい. よって $p_i(x) = h(x + q_i\alpha)$ ($p_i(x)$ は K 係数有理関数, $i = 1, 2$) とおく. すると $p_1(x) = h(x + q_1\alpha)$ および $p_2(x - q_2\alpha) = h(x)$ となるので, $p_1(x) = h(x + q_1\alpha) = p_2((x + q_1\alpha) - q_2\alpha) = p_2(x + q\alpha)$ $(q = q_1 - q_2 \neq 0)$ が得られる. この両辺の係数を比較することにより $p_1(x)$ それゆえ $h(x)$ は定数関数となる. ∎

証明: (定理 4.6, $K \leq_T^{BSS} L \Rightarrow K \subseteq L$ の証明)

$K \leq_T^{BSS} L$ かつ $K \not\subseteq L$ と仮定し矛盾を導く. $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ を $f = \{\langle e, E\rangle\}^L$ 全域的 L–B.S.S. 帰納的関数で $f(x) = 1 \iff x \in K$ をみたすものとする. $\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\omega} V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ より, ある $p \in \omega$ について $V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ は非可無限算集合. よって明らかに $V_p^{\langle e,E\rangle,L} - K \neq \emptyset$ である.

$V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ をあらわす定義式を

$$\begin{gathered} h_1^1(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x) > 0 \& h_1^2(x) \geq 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x) \geq 0 \\ \& \ h_1^3(x) \in L \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_3}^3(x) \in L \& h_1^4(x) \notin L \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x) \notin L \end{gathered}$$

とする. ただし, 有理関数 $h_j^i(x)$ は全て定数関数ではないとしてよい. すると, L が可算集合であることより $h_i^3(x) \in L$ をみたす x の全体もまた可算集合になるので, $V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ が非可算無限集合であることと合わせて, この定義式に $h_i^3(x) \in L$ の形の式は含まれない.

開集合 U を

$$h_1^1(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x) > 0 \ \& \ h_1^2(x) > 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x) > 0,$$

により定め, 集合 W を

$$h_1^4(x) \notin L \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x) \notin L$$

と定める. すると $V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ が非可算無限集合であることより $U \cap W$ は空集合でない.

Claim $U \cap W \cap K \neq \emptyset$

もし $U \cap W \cap K = \emptyset$ であるとすると

$$x \in U \cap K \Rightarrow h_1^4(x) \in L \ \vee \ \cdots \ \vee \ h_{n_4}^4(x) \in L$$

をみたす. $K - L$ が $\mathbb{R}$ の稠密部分集合であるので $\alpha \in U \cap (K - L)$ なる α をとることができる. そこで $x = r + q\alpha \in U \cap K (r, q \in \mathbb{Q})$ を考えると, ある j, q_1, $q_2 (q_1 \neq q_2)$ が存在して無限個の $r \in \mathbb{Q}$ に対し $h_j^4(r + q_i\alpha) \in L$ $(i = 1, 2)$ をみたすことになる. よって補題 4.8 により $h_j^4(x)$ は定数関数になり, 矛盾である.

$U \cap W \cap K \neq \emptyset$ と $U \cap W \subseteq V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ より $V_p^{\langle e,E\rangle,L} \cap K \neq \emptyset$ が得られるので $V_p^{\langle e,E\rangle,L} - K \neq \emptyset$ と合わせて f が $V_p^{\langle e,E\rangle,L}$ 上定数関数であることに矛盾する.

∎

5 B.S.S. Turing degrees への実数直線の埋め込み

定理 4.6 より B.S.S. Turing degrees の可算無限上昇列, 可算無限減少列, 可算無限個の互いに比較不能な元の存在が導かれる. この節ではこれらが非可算無限個でも存在することを示す.

この節では $I = \{\alpha_k \mid k \in \omega\}$ は次をみたす集合とする.

1) $\forall k \in \omega\ \alpha_k \notin \overline{\mathbb{Q}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})}$ ($\overline{K}$ は K の代数的閉包をあらわす.)
2) $I \subseteq \mathbb{R}$ は稠密である.

各 $k \in \omega$ に対し $\overline{\mathbb{Q}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})}$ は可算無限集合であるので, $\overline{\mathbb{Q}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})}$ に属さない実数の存在は明らかである. また, その元に有理数を加えたものもこの集合に属さない事を用いれば I を稠密集合にできる. よって 1), 2) をみたす集合 I は存在する.

また 1) より直ちに I は

1') $\forall k \in \omega\ \alpha_n \notin \overline{\mathbb{Q}(I - \{\alpha_k\})}$

をみたすことがわかる.

定理 5.1 A, $B \subseteq \mathbb{R}$ を B.S.S. 帰納的集合とすると次が成り立つ:

(1) $A \subseteq B$ ならば $A \cap I \leq_T^{BSS} B \cap I$.
(2) $(B - A)^\circ \neq \emptyset$ ならば $B \cap I \not\leq_T^{BSS} A \cap I$.

証明:

(1) 明らか.

(2) $B \cap I \leq_T^{BSS} A \cap I$ と仮定し, $f = \{\langle e, E\rangle\}^{A \cap I}$ を $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ が全域的 $A \cap I$– B.S.S. 帰納的関数で

$$f(x) = 1 \iff x \in B \cap I$$

をみたすものとする. f が全域的関数なので

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \omega} V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I}$$

となり $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} \cap (B - A)^\circ$は, ある $p \in \omega$ に対して非可算無限集合.

<u>Claim</u> $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} \cap (B - A)^\circ \cap I = \emptyset$
$V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I}$ は無限集合なので, f は $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I}$ 上定数関数である. $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} \cap (B - A)^\circ \cap I \neq \emptyset$ とすると, $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} \cap B \cap I$ は空集合ではなく, それゆえに $f|V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} = 1$ となる. このことは $V_p^{\langle e, E\rangle, A \cap I} \subseteq B \cap I$ を意味しており, I が可算無限集合であることに矛盾する.

$V_p^{\langle e,E\rangle, A\cap I}$ をあらわす定義式を

$$h_1^1(x)>0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x)>0 \& h_1^2(x)\geq 0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x)\geq 0$$
$$\& \ h_1^3(x)\in A\cap I \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_3}^3(x)\in A\cap I \& h_1^4(x)\notin A\cap I \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x)\notin A\cap I$$

とする. 各有理写像はすべて定数写像でないと仮定してよい.

また, $h_j^3(x)\in A\cap I$ をみたす x の全体がなす集合は高々可算な集合なので $h_j^3(x)\in\ A\cap I$ の形の式はこの定義式には含まれない.

$$h_1^1(x)>0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_1}^1(x)>0 \ \& \ h_1^2(x)>0 \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_2}^2(x)>0$$

で定まる開集合を U とし

$$h_1^4(x)\notin A\cap I \ \& \ \cdots \ \& \ h_{n_4}^4(x)\notin A\cap I.$$

により定まる集合を W とする.

$V_p^{\langle e,E\rangle, A\cap I}$ は非可算無限集合なので $U\cap W$ は空集合でない. Claim より $U\cap W\cap(B-A)^\circ\cap I=\emptyset$ なので

$$x\in U\cap(B-A)^\circ\cap I\Rightarrow h_1^4(x)\in A\cap I \ \vee \ \cdots \ \vee \ h_{n_4}^4(x)\in A\cap I.$$

を得る. $U\cap(B-A)^\circ$ は空でない開集合であり I は $\mathbb{R}$ で稠密なので,
$U\cap(B-A)^\circ\cap I$ は無限集合である. ゆえに, ある j が存在して

$$\exists^\infty x\in U\cap(B-A)^\circ\cap I[h_j^4(x)\in A\cap I] \tag{$*$}$$

をみたす. ここで $K=\mathbb{Q}(I)$ とおくと, $(*)$ より

$$\exists^\infty x\in K[h_j^4(x)\in K]$$

が得られ, よって補題 4.7 より $h_j^4(x)$ は K 係数の有理関数としてよい. そこで $h_j^4(x)$ を $h(x,\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_m})$ (h の各係数は有理数) とあらわし
$C=\{\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_m}\}$, とおくと $(*)$ より

$$\exists^\infty x\in(U\cap(B-A)^\circ\cap I)-C[h(x,\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\ldots,\alpha_{k_m})\in A\cap I] \tag{$**$}$$

が得られる. h は定数関数でないので

$$\exists x\in(U\cap(B-A)^\circ\cap I)-C[h(x,\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\ldots,\alpha_{k_m})\in(A\cap I)-C]$$

が得られる. この x の一つを α_t とおき, $h(\alpha_t,\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\ldots,\alpha_{k_m})$ を α_s とすると, $\alpha_s\in A$ および $\alpha_t\in(B-A)^\circ$ から $\alpha_s\neq\alpha_t$ がわかる. また $\alpha_s\notin C$ より

$$\alpha_s\in\mathbb{Q}(\alpha_t,\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_m})\subseteq\mathbb{Q}(I-\{\alpha_s\})$$

が得られる．これは 1') に矛盾する．

∎

系 5.2 $\varphi(a) = [(-\infty, a) \cap I]$ とおく (ここで [ ] は B.S.S. Turing degrees の $\equiv^T_{BSS}$ による同値類をあらわす)．すると φ は $\mathbb{R}$ から B.S.S. Turing degrees への順序を保存した埋め込みである．

系 5.3 各 $\sigma \subseteq \omega$ に対し, $X_\sigma = \bigcup_{n\in\sigma}(n, n+1)$ とする．X_σ は B.S.S. 帰納的集合である．また $\mathcal{F}$ を $[\omega]^\omega (= \{X \subseteq \omega \mid |X| = \omega\})$ の部分集合で, どの異なる二つの元の交わりも有限集合であるような連続濃度の集合とする．すると $\{[X_\sigma \cap I] \mid \sigma \in \mathcal{F}\}$ は B.S.S. 帰納的集合の連続濃度を持った比較不能集合となる．

6 まとめ

本研究では, B.S.S. 帰納的関数を $PL(\mathbb{R})$ という新しい言語を用いて定義し, 枚挙定理やパラメータ定理のような古典的な帰納的関数論で成立している基本的で重要な性質の類似物の多くがB.S.S. 帰納的関数論でも成立することを示した. また, B.S.S. 計算論における Turing degrees の概念を定義し, 古典的な Turing degrees の理論で最も基本的な性質である比較不能元の存在性について, B.S.S. Turing degrees の理論においても成立することを位相的方法, 代数的方法, 位相および代数の両方用いる方法の 3 通りの方法で示した. また, 実数直線 $\mathbb{R}$ を順序を保存したままB.S.S. Turing degrees の中に埋め込むことができることも証明した. これらの結果により, B.S.S. Turing degrees がとても複雑な (擬) 順序構造であることが明らかになってきた.

しかし, 自然数上の Turing degrees の理論では成立している性質のうち, B.S.S. Turing degrees については未だ成立するか分らない性質がいくつか存在する.

自然数の計算論では ω と ω^n は計算可能性の意味で同等な集合であるのに対し, B.S.S. 計算論において $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ が B.S.S. 計算論可能性の意味で異なっていることがそれらの成否を調べることを困難にしている.

古典的な帰納的関数の理論においては, 連続して並んだ二つの同一のタイプの量化子は 1 つにまとめることができる. しかし B.S.S. 帰納的関数の理論では $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ が同形でないのでこのことは明らかではない.

Question 1 $R(\alpha, \beta, n, \mathfrak{A})$ が B.S.S. 帰納的述語であるとき,
$\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \forall\beta \in \mathbb{R}\ \exists n \in \omega\ R(\alpha, \beta, n, \mathfrak{A})$ を $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \exists n \in \omega\ R'(\alpha, n, \mathfrak{A})$ ($R'(\alpha, n, \mathfrak{A})$: B.S.S. 帰納的述語) の形に書き直すことができるか?

定理 3.1 (2) の証明において実閉体における量化子消去定理を利用した. それゆえに, 定理 3.1 (2) を集合 S に相対化したものが成立するか明らかでない.

Question 2 $R(\alpha, \mathfrak{A})$ が S– B.S.S. 帰納的可算な述語とする.
このとき, $\exists\alpha \in \mathbb{R}\ R(\alpha, \mathfrak{A})$ もまた S–B.S.S. 帰納的可算述語になるか?

旧来の Turing degrees の理論では, ジャンプオペレータがとても重要な役割を果たしている. B.S.S. Turing degrees の理論において,
$S' = \{\langle e, E\rangle \mid \{\langle e, E\rangle\}^S(e, E)\downarrow\}$. によって ジャンプオペレータを定義することができるが, この場合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し, S' は $\omega \times \mathbb{R}^{<\omega}$ の部分集合になってしまう. そこで次のような疑問が生じる:

Question 3 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ とする.
$j(S) = \{\langle e, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \mid \{\langle e, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle\}^S(e, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\downarrow\}$ とおくと,
$S <_T^{BSS} j(S)$ をみたすか?

B.S.S. 帰納的関数の理論では, 位相および代数的構造がとても重要な役割を果たしている．これは B.S.S. 帰納的関数の理論においても, $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ が同形でないことが重要な影響を与えていることを意味する．特に $\mathbb{R}^2$ の部分集合に対してそれど同じ degree をもつ $\mathbb{R}$ の部分集合が存在するかどうか明らかではない.

Question 4 $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \exists B \subseteq \mathbb{R}(A \equiv_T^{BSS} B)$ をみたすか?

参考文献

[1] L. Blum, M. Shub and S. Smale, On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: NP–Completeness, Recursive Functions and Universal Machines, Bull. AMS **21**(1989), 1–46.

[2] L. Blum and S. Smale, The Gödel Incompleteness Theorem and Decidability over a Ring, in From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest (M. Hirsch, J. Marsden and M. Shub eds.), 321-339, Springer, 1993.

[3] L. Blum, F. Cucker, M. Shub and S. Smale, Complexity and Real Computation, Springer, 1997.

[4] M. Davis, R. Sigal and E. Weyuker, Computability, Complexity, and Languages, Academic Press, 1994.

[5] K. Meer and M. Ziegler, An explicit solution to Post's Problem over the reals, Journal of Complexity **24** (2008), 3–15.

[6] A. Seidenberg, A New Decision Method for Elementary Algebra, Ann. of Math. **60** (1954), 365–374.

[7] J. R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison–Wesley Publishing Company, 1967.

[8] B. M. Trager, Algebraic factoring and rational function integration, in Proc. SYMSAC '76 (R. D. Jenks ed.), 219-226, ACM press, 1976.

[9] Y. Yonezawa, The Turing degrees for some computation model with the real parameter, J. Math. Soc. Japan. **60** (2008), 311–324.

[10] Y. Yonezawa, The Normal Form Theorem for the Blum–Shub–Smale's real valued computation theory, 豊田高専紀要 **30** (1997), 95–101.

[11] Y. Yonezawa, 実数値パラメータを含むある計算論における degree について, 数理解析研究所講究録 **1360** (2004), 5–8.

Toyota National College of Technology

2-1, Eisei-cho Toyota, Aichi 471-8525, Japan

E-mail yonezawa@toyota-ct.ac.jp