2.3 線形ボルツマン方程式

位相空間分布関数

$$f(x^\mu, P^i), \qquad P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \qquad P^\mu P_\mu + m^2 = 0 \tag{2.42}$$

不変運動量素片

$$d\Pi = \frac{\sqrt{-g}\, d^4P}{(2\pi\hbar)^3}\theta(P^0)\,\delta\left(P^\mu P_\mu + m^2\right) \tag{2.43}$$

エネルギー・運動量テンソル

$$T^\mu{}_\nu = 2\int d\Pi\, P^\mu P_\nu\, f \tag{2.44}$$

相対論的ボルツマン方程式

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = \mathrm{C}[f] \tag{2.45}$$

エネルギー・運動量輸送

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2\int d\Pi\, P^\mu\, f \tag{2.46}$$

衝突項：反応 $a + b \leftrightarrow c + d$ に対するもの。$f_a = f(x, P_a)$ などと略記して

$$\begin{aligned}\mathrm{C}[f_a] = \frac{1}{2}\int & d\Pi_b d\Pi_c d\Pi_d (2\pi\hbar)^4 \delta^4(P_a + P_b - P_c - P_d) \\ & \times \left[f_c f_d (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) - f_a f_b (1 \pm f_c)(1 \pm f_d)\right] |\mathcal{M}(a + b \to c + d)|^2\end{aligned} \tag{2.47}$$

ただし符号は、+: ボソン、−: フェルミオン。$\mathcal{M}$: 不変散乱振幅
運動量ベクトルの変数変換

$$q^i = a(1 + \Psi)P^i, \qquad q = \sqrt{\gamma_{ij} q^i q^j}, \qquad n^i = \frac{q^i}{q} \tag{2.48}$$

$$P^0 = \frac{\sqrt{q^2 + m^2}}{a}(1 - \Phi), \qquad P^i = \frac{q n^i}{a}(1 - \Psi) \tag{2.49}$$

ボルツマン方程式（平坦宇宙 $K = 0$）

$$0\text{ 次}: \qquad \bar{f}' = \frac{a}{\sqrt{q^2+m^2}}\bar{C}[\bar{f}] \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} 1\text{ 次}: \qquad \delta f' + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2}}\frac{\partial \delta f}{\partial x^i} - \left[\frac{\sqrt{q^2+m^2}}{q}n^i\Phi_{|i} + \Psi'\right]q\frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \\ = \frac{a}{\sqrt{q^2+m^2}}\left(\delta C[f] + \Phi\bar{C}[\bar{f}]\right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

フーリエ・ルジャンドル展開 ($\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$)

$$\delta f(\boldsymbol{x}, q, \boldsymbol{n}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l(2l+1)P_l(\mu)F_l(q, \boldsymbol{k}, \tau) \tag{2.52}$$

流体力学的変数との関係

$$\delta\rho = \int \frac{q^2dq}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{q^2+m^2}F_0 \tag{2.53}$$

$$\delta p = \frac{1}{3}\int \frac{q^2dq}{2\pi^2\hbar^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2+m^2}}F_0 \tag{2.54}$$

$$(\bar{\rho}+\bar{p})v = -\frac{1}{k}\int \frac{q^2dq}{2\pi^2\hbar^3}qF_1 \tag{2.55}$$

$$\bar{p}\Pi = \frac{1}{k^2}\int \frac{q^2dq}{2\pi^2\hbar^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2+m^2}}F_2 \tag{2.56}$$

ボルツマン階層方程式

$$F_0{}' + \frac{kq}{\sqrt{q^2+m^2}}F_1 - q\frac{\partial \bar{f}}{\partial q}\Psi' = \frac{a}{\sqrt{q^2+m^2}}[\delta C]_0 + \bar{C}\Phi \tag{2.57}$$

$$F_1{}' - \frac{kq}{3\sqrt{q^2+m^2}}(F_0 - 2F_2) + \frac{k\sqrt{q^2+m^2}}{3}\frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = \frac{a}{\sqrt{q^2+m^2}}[\delta C]_1 \tag{2.58}$$

$$F_l{}' - \frac{kq}{(2l+1)\sqrt{q^2+m^2}}[lF_{l-1} - (l+1)F_{l+1}] = \frac{a}{\sqrt{q^2+m^2}}[\delta C]_l \qquad (l \geq 2) \tag{2.59}$$

3　一様等方宇宙におけるゆらぎの生成と進化

3.1　インフレーション理論におけるゆらぎの生成

スカラー場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \tag{3.1}$$

摂動展開と関連する変数

$$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi, \qquad u = a\left(\delta\phi + \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}}\Phi\right), \qquad z = \frac{a\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \tag{3.2}$$

古典スカラー場の線形方程式

$$u'' - \triangle u - \frac{z''}{z} u = 0 \tag{3.3}$$

モード展開と量子条件

$$u(\boldsymbol{x}, \tau) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left[u_k(\tau) a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + u_k^*(\tau) a_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right] \tag{3.4}$$

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger\right] = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}') \\ 0 & (\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}') \end{cases} \tag{3.5}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}'}] = \left[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger\right] = 0 \tag{3.6}$$

量子ゆらぎパワースペクトル

$$P_u(k, \tau) = \frac{\hbar c}{2k} |u_k(\tau)|^2 \tag{3.7}$$

スローロールパラメータ

$$\epsilon \equiv \frac{c^4}{16\pi G} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2 \tag{3.8}$$

$$\eta \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{d\phi^2} \tag{3.9}$$

$$\xi \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \frac{1}{V} \sqrt{\frac{dV}{d\phi} \frac{d^3 V}{d\phi^3}} \tag{3.10}$$

スローロール近似における場の方程式と Bunch-Davis 真空

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)u_k = 0 \tag{3.11}$$

$$u_k = \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \tag{3.12}$$

ただし、基準点 $\tau = 0$ は無限の未来とする。
曲率ゆらぎ (ゲージ不変量)

$$\zeta \equiv \Psi + \mathcal{H}v = -\Phi - \frac{\mathcal{H}}{\bar{\phi}'}\delta\phi = -\frac{u}{z} \tag{3.13}$$

生成されるパワースペクトル

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2 V}\left\langle\left|\tilde{\zeta}(\boldsymbol{k})\right|^2\right\rangle = \frac{1}{|z|^2}\mathcal{P}_u(k) = \frac{4\pi t_P^2}{\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{3.14}$$

$$\mathcal{P}_\Phi(k) = \mathcal{P}_\zeta(k) \times \begin{cases} 4/9 & (k \gg k_{\mathrm{eq}}) \\ 9/25 & (k \ll k_{\mathrm{eq}}) \end{cases} \tag{3.15}$$

ただし、$t_P \equiv (G\hbar/c^5)^{1/2}$: プランク時間、$k_{\mathrm{eq}} = a_{\mathrm{eq}}H_{\mathrm{eq}}$: 等密度時のハッブル波数
エントロピーゆらぎの非生成

$$\Gamma \simeq \frac{4}{3}\left(\frac{k}{aH}\right)^2 \Phi \simeq 0 \tag{3.16}$$

生成されるゆらぎの波数微分

$$\frac{d}{d\ln k} = \frac{c^4}{8\pi G}\frac{dV/d\phi}{V}\frac{d}{d\phi} \tag{3.17}$$

スペクトル指数とそのランニング

$$n_{\mathrm{s}} \equiv 1 + \frac{d\ln\mathcal{P}_\zeta}{d\ln k} = 1 - 6\epsilon + 2\eta \tag{3.18}$$

$$\frac{dn_{\mathrm{s}}}{d\ln k} = -24\epsilon^2 + 16\epsilon\eta - 2\xi^2 \tag{3.19}$$

テンソルモード：背景重力波

$$\mathcal{P}_{\mathrm{T}}(k) = 16\pi t_{\mathrm{P}}^2\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{3.20}$$

$$n_{\mathrm{T}} \equiv \frac{d\ln\mathcal{P}_{\mathrm{T}}}{d\ln k} = -2\epsilon \tag{3.21}$$

$$\frac{dn_{\mathrm{T}}}{d\ln k} = -8\epsilon^2 + 4\epsilon\eta \tag{3.22}$$

無矛盾性関係

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{T}}(k)}{\mathcal{P}_{\zeta}(k)} = -2n_{\mathrm{T}} \tag{3.23}$$