3.2　単成分近似におけるゆらぎの成長

背景場

$$a \propto \tau^{\nu}, \qquad \bar{\rho} = \tau^{-2(\nu+1)}, \qquad \left(\nu \equiv \frac{2}{1+3w}\right) \tag{3.24}$$

摂動方程式

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1+3c_{\mathrm{s}}^2)\Phi' + c_{\mathrm{s}}^2 k^2 \Phi = 0 \tag{3.25}$$

$$\delta = -\frac{2k^2\tau^2}{3\nu^2}\Phi - 2\left(\Phi + \frac{\tau}{\nu}\Phi'\right) \tag{3.26}$$

$$v = -\frac{\tau}{1+\nu}\left(\Phi + \frac{\tau}{\nu}\Phi'\right) \tag{3.27}$$

成長解

$$\Phi \propto x^{-\nu} j_{\nu}(c_{\mathrm{s}}x) \simeq \begin{cases} 1 & (c_{\mathrm{s}}x \ll 1) \\ x^{-\nu-1}\cos\left[c_{\mathrm{s}}x - \frac{\pi}{2}(\nu+1)\right] & (c_{\mathrm{s}}x \gg 1) \end{cases} \tag{3.28}$$

放射優勢期のゆらぎ：ホライズン外 ($k\tau \ll 1$)

$$\Phi = \Phi_0 \qquad (\text{一定}) \tag{3.29}$$

$$\delta = -2\Phi_0 \tag{3.30}$$

$$v = -\frac{\tau}{2}\Phi_0 \tag{3.31}$$

放射優勢期のゆらぎ：ホライズン内 ($k\tau \gg 1$)

$$\Phi = -\frac{\Phi_0}{k^2\tau^2}\cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.32}$$

$$\delta = \frac{2\Phi_0}{3}\cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.33}$$

$$v = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{3}k}\sin\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.34}$$

物質優勢期のゆらぎ：ホライズン外 ($k\tau \ll 1$)

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{m0}} \qquad (\text{一定}) \tag{3.35}$$

$$\delta = -2\Phi_{\mathrm{m0}} \tag{3.36}$$

$$v = -\frac{\tau}{3}\Phi_{\mathrm{m0}} \tag{3.37}$$

物質優勢期のゆらぎ：ホライズン内 ($k\tau \gg 1$)

$$\Phi = \Phi_{\rm m0} \tag{3.38}$$

$$\delta = -\frac{k^2\tau^2}{6}\Phi_{\rm m0} \tag{3.39}$$

$$v = -\frac{\tau}{3}\Phi_{\rm m0} \tag{3.40}$$

放射優勢期と物質優勢期のポテンシャルの関係

$$\Phi_{\rm m0} = \frac{9}{10}\Phi_0 \tag{3.41}$$

パワースペクトル

$$\langle \Phi^*(\boldsymbol{k})\Phi(\boldsymbol{k}')\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')P_\Phi(k) \tag{3.42}$$

無次元パワースペクトル

$$\mathcal{P}_\Phi(k) = \frac{k^3 P_\Phi(k)}{2\pi^2} \tag{3.43}$$

遷移関数

$$T(k) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_\Phi(k)}{\mathcal{P}_{\Phi_{\rm m0}}(k)}} \tag{3.44}$$

CDM パワースペクトル

$$P(k) = AkT^2(k)\mathcal{P}_{\Phi_{\rm m0}}(k) \tag{3.45}$$

3.3　光子とバリオンの相互作用効果

トムソン散乱断面積

$$\sigma_{\rm T} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\hbar\alpha}{m_e c}\right)^2 = 0.665\times 10^{-24}\ [\mathrm{cm}^2] \tag{3.46}$$

トムソン散乱の不変振幅

$$|\mathcal{M}_{\rm T}| = 24\pi\hbar^2 c^6 {m_e}^2\sigma_{\rm T}\left[1+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')\right] \tag{3.47}$$

衝突項 (f は光子の分布関数を表す)

$$C_\gamma[f(\boldsymbol{p})] = \frac{3}{16\pi}\frac{n_e\sigma_{\rm T}p}{a}\int d\Omega_{\boldsymbol{n}'}\left[1+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2\right]\left[\delta f(p,\boldsymbol{n}') - \delta f(p,\boldsymbol{n}) - v_{{\rm b},i}n^i p\frac{\partial \bar{f}}{\partial p}\right] \tag{3.48}$$

ただし、n_e: 自由電子数密度、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p, \boldsymbol{n}' = \boldsymbol{p}'/p'$

輝度関数

$$\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\tau) = \frac{1}{4}\frac{\int dp\, p^3\, \delta f(\boldsymbol{x},p,\boldsymbol{n},\tau)}{\int dp\, p^3 \bar{f}(p,\tau)} \tag{3.49}$$

輝度関数のフーリエ・ルジャンドル展開

$$\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) P_l(\mu)\Theta_l(\boldsymbol{k},\tau) \tag{3.50}$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{4}\delta_\gamma, \quad \Theta_1 = -\frac{k}{3}v_\gamma, \quad \Theta_2 = \frac{k^2}{12}\Pi_\gamma \tag{3.51}$$

輝度関数に対する階層方程式

$$\delta_\gamma' - \frac{4}{3}k^2 v_\gamma + 4\Psi' = 0 \tag{3.52}$$

$$v_\gamma' + \frac{1}{4}\delta_\gamma - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma + \Phi = a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \left(v_{\mathrm{b}} - v_\gamma\right) \tag{3.53}$$

$$\Pi_\gamma' + \frac{8}{5}v_\gamma + \frac{36}{5k}\Theta_3 = -\frac{9}{10} a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \Pi_\gamma \tag{3.54}$$

$$\Theta_l' - \frac{k}{2l+1}\left[l\Theta_{l-1} - (l+1)\Theta_{l+1}\right] = -a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \Theta_l, \qquad (l \geq 3) \tag{3.55}$$

バリオンゆらぎの方程式

$$\delta_{\mathrm{b}}' - k^2 v_{\mathrm{b}} + 3\Psi' = 0 \tag{3.56}$$

$$v_{\mathrm{b}}' + \mathcal{H} v_{\mathrm{b}} + \Phi = -\frac{4}{3}\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\mathrm{b}}} a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \left(v_{\mathrm{b}} - v_\gamma\right) \tag{3.57}$$

光子散乱の典型的距離

$$\tau_{\mathrm{c}} = \frac{1}{a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}}} \tag{3.58}$$

光子・バリオン混合流体の音速

$$c_{\mathrm{s}}^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R}; \qquad R \equiv \frac{3}{4}\frac{\rho_{\mathrm{b}}}{\rho_\gamma} \tag{3.59}$$

強結合 0 次解

$$v_{\mathrm{b}} = v_\gamma, \qquad \Pi_\gamma = 0, \qquad \Theta_3 = 0, \qquad \delta_{\mathrm{b}} = \frac{3}{4}\delta_\gamma \tag{3.60}$$

音響振動スケール

$$r_{\mathrm{s}}(\tau) = \int_0^\tau c_{\mathrm{s}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1+R}} = \frac{2}{k_{\mathrm{eq}}}\sqrt{\frac{2}{3R_{\mathrm{eq}}}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+R} + \sqrt{R+R_{\mathrm{eq}}}}{1+\sqrt{R_{\mathrm{eq}}}}\right) \tag{3.61}$$

強結合 1 次方程式

$$\delta_\gamma'' + \frac{R'}{1+R}\delta_\gamma' + k^2 c_s^2 \delta_\gamma = -\frac{4k^2}{3}\Phi - \frac{4R'}{1+R}\Psi' - 4\Psi'' \equiv F(\tau) \tag{3.62}$$

$$\delta_b'' + \frac{R'}{1+R}\delta_b' + k^2 c_s^2 \delta_b = \frac{3}{4}F(\tau) \tag{3.63}$$

強結合 1 次 WKB 解

$$\delta_\gamma(\tau) = (1+R)^{-1/4}\left\{C_1 \cos kr_s + C_2 \sin kr_s - \frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^\tau d\tau' F(\tau')\left[1+R(\tau')\right]^{3/4}\sin\left[kr_s(\tau) - kr_s(\tau')\right]\right\} \tag{3.64}$$

$$\delta_b(\tau) = \left(\text{上式で } F \to \frac{3}{4}F \text{ としたもの}\right) \tag{3.65}$$

(ただし、断熱ゆらぎの場合 $C_1 = -2\Phi_0, C_2 = 0$)
強結合 2 次方程式 (小スケール、高振動近似)

$$\delta_\gamma'' + \frac{k^2\tau_c}{3(1+R)}\left(\frac{8}{9} + \frac{R^2}{1+R}\right)\delta_\gamma' + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_\gamma = 0 \tag{3.66}$$

強結合 2 次 WKB 解

$$\delta_\gamma \propto e^{\pm ikr_s} e^{-k^2/k_D^2}, \qquad k_D^{-2} = \frac{1}{6}\int \frac{\tau_c}{1+R}\left(\frac{8}{9} + \frac{R^2}{1+R}\right)d\tau \tag{3.67}$$

(ただし、偏光を考慮すると 8/9 → 16/15)

3.4 再結合後のゆらぎの成長

物質成分 m とダークエネルギー成分 de の共存系の背景方程式

$$\mathcal{H}^2 + K = \frac{8\pi G}{3}a^2\left(\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_{de}\right) \tag{3.68}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2\left[\bar{\rho}_m + (1+3w)\bar{\rho}_{de}\right] \tag{3.69}$$

物質ゆらぎの方程式 (ダークエネルギーのゆらぎは無視：ホライズン内で OK)

$$\delta' + \triangle v + 3\Phi' = 0 \tag{3.70}$$

$$v' + \mathcal{H}v + \Phi = 0 \tag{3.71}$$

$$(\triangle + 3K)\Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m\left(\delta - 3\mathcal{H}v\right) \tag{3.72}$$

ホライズン内におけるゆらぎの成長方程式

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G\bar{\rho}_{\mathrm{m}}\delta = 0 \tag{3.73}$$

ダークエネルギーが宇宙項の場合の成長解

$$D(t) \propto H(t) \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^3 H^3} \tag{3.74}$$

(一般のダークエネルギーの場合には式 (3.73) を数値積分)