

数学展望 I レポート問題 [1] (5月22日)

- (1) 以下の問題の中から 1題を選び 解答し, 提出すること. 締め切りは6月12日(月)とする.
- (2) A4の大きさのレポート用紙 (表面のみ 使用, 6枚以内) に解答すること.
- (3) (2)の他に表紙1枚をつけ, 氏名と学籍番号を記入し, レポート名「数学展望 I 第1回レポート」を明記すること.
- (4) 問題は講義内で紹介した定理が中心であるが, 証明の丸写しは評価の対象とならない. 作成にあたって友人どうしで相談しても構わないが, 他人のものを写した場合は評価の対象とならないので, 注意せよ.

問 1. 「正多面体の型を (p, q) と表すと, (p, q) の組み合わせは5つあり, それに応じて正4面体, 正6面体, 正8面体, 正12面体, 正20面体の5種類が存在する. 」という定理について説明せよ. また, 双対性に注意して, その分類表を完成せよ.

(作成における注意)

凸多面体の定義は既知として良いが, 正多面体の定義は述べること. 証明に際して, オイラーの多面体公式を証明なしに用いても構わない. 正多面体の分類表には, 頂点数, 辺の数, 面の数は必ず記載すること.

(作成の手引き)

講義で与えた証明は2種類あり, 一方はオイラーの多面体公式を用いてはいない. レポートにはそれらの証明をベースにしたものを書いて構わないし, それ以外のものをつけてもよい.

講義においては, 正多面体の構成方法や (p, q) 毎に相似の違いを除いて一意的に定まることなどはあまり詳しく述べていない. また, 双対性で頂点と面が対応し, 辺の個数が同じことなどは証明していない. 例えば, これらの点を補うと完成度が高まるだろう.

演習問題にある, 頂点数などを (p, q) で与えた式も述べると良い.

問 2. 「頂点の配置がフラレーン C_{60} と同じ凸多面体をサッカーボール型の凸多面体と言う. この凸多面体の構成方法, f 列について述べ, その模型 (折り紙でもよい) を提出せよ. この凸多面体は型 $[5, 6, 6]$ のアルキメデスの多面体である. この凸多面体の代わりに他の型について同様の考察をしてもよい.

(作成における注意)

後半については, すべてのアルキメデスの多面体について触れる必要はない.

(作成の手引き)

講義では, サッカーボール型の凸多面体が正20面体から構成できることを示した. f 列の構成などはそのことを説明して利用すると良い. 模型の作成にあたっては例えば「多面体の折り紙」などを参考にすると良いだろう.

問 3. (自明でない) アルキメデスの平面充填形の型は、次の場合に限られる:

$$\begin{array}{cccc} [3, 12, 12], & [4, 6, 12], & [4, 8, 8], & [3, 6, 3, 6], \\ [3, 4, 6, 4], & [3, 3, 3, 3, 6], & [3, 3, 3, 4, 4], & [3, 3, 4, 3, 4]. \end{array}$$

この事実を説明せよ.

(作成における注意)

アルキメデスの平面充填形の定義はやや曖昧であった. 例えば, $[4, 6, 12]$ という型は, 各頂点の周りに同じ長さの辺を持つ正 4 角形, 正 6 角形, 正 12 角形がこの順に時計回りもしくは反時計回りに並び, 平面全体を埋めつくすことができることを意味する. できるだけ正確な定義を述べること.

(作成の手引き)

例えば, 次の手順で実行せよ:

(step 1) 与えられた補題の等式を用いて, 型の可能性を限定する.

(step 2) $[3, 3, 4, 12]$ などは実際には起こらないことを証明する.

(step 3) 残った型が実際実現可能なことを証明する.

図をうまく利用することが見易さという点でポイントが高くなるだろう. また, 平面充填形からどのようにして作れば良いかを (適切な例を用いて) 述べることも良いだろう.

問 4. 3 次元凸多面体の f 列の特徴付けを与えよ. また, 単体的, 単純の場合に限るとどうなるか.

(作成における注意)

講義の定理 3.3 を参考にせよ. 特に, (V, F) の条件については図も利用すること. さらに, 与えられた (V, F) について, 操作 (I),(II) をそれぞれ実際何回行えばよいかをきちんと式で表現することがポイントである.

(作成の手引き)

$2F - V - 4$ を 3 で割った余りでスタートが 3 種類に分かれることに注意せよ. また, 操作 (I) などが続けて行えるかどうかをきちんと検証することが望ましい.

予告: 第 2 回のレポート (正多面体と群論) は, 6 月半ばに出す予定です. 第 3 回については, 発展問題 (+感想文) になる予定ですが, 発展的な課題については随時予告していきます.

問 5 (予告編).

(発展) トーラスの三角形分割の h 列については一般的にどんな関係式が成立するか. Dehn-Sommerville 方程式を参考にして考察せよ.

(発展) 「10 円玉 1 枚の周りに, 10 円玉は最大 6 枚接するように並べることができる。」この事実の 3 次元版の答えはどうなるだろうか? 正多面体を参考にして考察せよ.

(発展) インターネットを利用して, 「正多面体」を検索した場合, どのような情報が得られるか. 講義内容と絡めて自分なりにまとめよ.