

# 数学展望I 第1回～正多面体と特異点(吉田健一)のシラバス

## 1. 参考書：

- [1] 正多面体を解く (著：一松信), 東海大学出版会, 2002
- [2] 多面体の数理とグラフィックス (著：関口次郎), 数理情報科学シリーズ, 1996
- [3] 代数的トポロジー (著：柘田幹也), 朝倉書店, 2002
- [4] 群の発見 (著:原田耕一郎), 岩波書店, 2001
- [5] 数学のたのしみ, 2005 秋 – 特異点の世界:その広さと豊かさ
- [6] 正 20 面体と 5 次方程式 (著：クライン, 訳：関口次郎), Springer-Verlag 東京, 1997
- [7] 代数学とは何か (著：シャファレヴィッチ, 訳：蟹江幸博), Springer-Verlag 東京, 2001
- [8] 数学名所案内 [上下] (著：G・トス, 訳：蟹江幸博), Springer-Verlag 東京, 2000

## 2. 講義の目標：

いろいろな数学を用いて正多面体 (特異点) を分析することにより, 今後学ぶ種々の数学の考え方 (トポロジー, 群論など) に触れる機会を作ることが目的です. ちなみに, 正多面体そのものに対する理解を深めることが本講義の目的ではありません.

## 3. 講義の進め方：

講義は時間通り 8:45 ~ 10:15 に行います. 講義が中心ですが, 手を動かしたり, 少人数で議論する場を設けることも検討しています. また, 講義を理解するための練習問題も出す予定ですので, 各自で解いて下さい.

講義に関する質問があれば, 講義の後に質問するか, 研究室に質問しに来て下さい. 月, 金曜日の午後は研究室にすることが多いと思います (電子メールで連絡してもらえれば確認できます).

また, 火曜日のお昼休み (1 時間) はオフィスアワーの時間として, 研究室か通り道にあるカフェダビッドにいますので, 直接押し掛けてきても OK です. また, レポートなどの提出物による質問も可能です.

## 4. 成績の評価方法：

中間試験や定期試験は行いません. 代わりに数回 (内容の区切り毎, 3 回の予定) のレポートを提出してもらい, その出来により成績をつけます. レポートの評価においては, 「正確さ」, 「独創性」, 「努力」を評価の対象とします.

また, 出欠の確認を兼ねて簡単な練習問題を時々実施し, 提出状況を成績に考慮する予定です.

## 数学展望 I・授業計画：

最初は、参考書 [1],[2],[3] を参考にして、正多面体の凸多面体としての形に注目して、正多面体の分類、オイラー・ポアンカレの公式とその拡張などを【代数的トポロジー】の視点から説明します。私が黒板で書く絵の質には限界がありますが、web page で検索すると正多面体の綺麗な CG が得られますので、参考にするの良いでしょう。詳しくは以下を予定しています。

### 第 1 回 正多面体とは何か？ (4 月 24 日)

正多面体は凸多面体の特別なものとして、(正多角形の場合と異なり)有限個しかありません。最初にオイラーの多面体公式を紹介して、その結果を用いて正多面体を分類します。

### 第 2 回 正多面体の仲間達 (5 月 1 日 この日は 9:15 から始めます。)

正多面体の条件を少し緩めると、サッカーボール(に似た多面体)が現われます。このような多面体の話と、(時間が許せば)タイルの敷き詰めに関する話をします。

### 第 3 回 正多面体の展開図 (5 月 8 日)

正多面体を展開すると、「形」という情報はかなり失われてしまいますが、数値(頂点の個数、辺の個数、面の個数)とつながり具合は保存されます。この点に注目して単体的複体という概念を導入して、オイラーの多面体公式を違った視点から見直します。

### 第 4 回 種数とオイラー・ポアンカレの公式 (5 月 15 日)

正多面体のような凸多面体は膨らませると球面になります。それでは穴のあいた面(浮き輪のような面)でオイラーの多面体公式のようなものを考えたらどうなるのでしょうか？

真ん中のパートでは、参考書 [4] や、標準的な代数学(もしくは群論の)教科書を参考にして、正多面体の対称性—例えば、立方体を回転させて頂点が頂点に移るような変換はどれくらいあるのでしょうか?—について議論します。このような問題を考えるには【群論】が有効です。群論は「結晶」の構造を分析する際にも重要な役割を果たすことが知られています。講義としては次の内容(タイトルは仮)を予定しています。

### 第 5 回 正多角形の対称性 … 巡回群, 2 面体群, フェルマーの小定理, 群の位数 (5 月 22 日)

### 第 6 回 対称群 … 部分群, 置換 (5 月 29 日)

### 第 7 回 正多面体の対称性 … 正多面体群 (6 月 5 日)

### 第 8 回 空間における回転 … $SO(3)$ の有限部分群, 1 次分数変換 (6 月 12 日)

最後のパートとして、第 9 回 (6 月 19 日), 第 10 回 (6 月 26 日), 第 11 回 (7 月 3 日), 第 12 回 (7 月 10 日), 第 13 回 (7 月 24 日) には、特異点(特に、上に述べた正多面体と関係の深いクライン特異点)に関係した講義を行う予定です。参考書 [5] の石井志保子先生の原稿などを参考にする予定です。

この講義に関連してより高度な内容を知りたい人は参考書 [6],[7],[8] を眺めてみるのも良いでしょう。また、この講義の内容はマックイ (McKay) 対応という興味深い数学的事実に深く関係しています。