数学展望 I **第 11 回 正多面体群 (3)**

9.2　正 6 面体群

(前回の続き)

正 6 面体の 1 つの面の頂点を反時計周りに P_1, P_2, P_3, P_4 とする．反対の面にある対角線の端の点をそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とすると，この正 6 面体の合同変換は，対角線 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4 の間の置換を引き起こす．異なる合同変換には異なる置換が対応しているので，この対応により，正 6 面体群を 4 次対称群 S_4 の部分群とみなすことができる．しかし，$|S_4| = 24$ であり，既に見たように正多面体群の位数も 24 だから，正多面体群は S_4 そのものに他ならない．まとめると，

定理 9.1. 正 6 面体群は 4 次対称群 S_4 (に同型) である.

例 9.2. (1234), (12)(34), (123), (12) に対応する正 6 面体の合同変換を記述せよ.

S_4 にはどのような部分群が存在するだろうか? 次の定理によれば，S_4 の部分群 H の位数の可能性は，

$$|H| = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

である．同様に 4 次交代群 A_4 の部分群の位数の可能性は，上記の 24 以外の数であるが，A_4 には位数 6 の部分群は存在しない.

9.3　正 20 面体群

今まで見てきた 4 次対称群 S_4 を一般化して，n **次対称群** S_n (通常 $n \geq 3$) を考えることができる．これは位数が $n!$ の群である．n 次対称群の元を n 次の**置換**と言う．偶置換，奇置換の概念も自然に拡張され，n 次の偶置換だけからなる部分群を n **次交代群** A_n と言う．最後に残った正多面体群は次の定理で決定される.

定理 9.3. 正 12 面体群 (＝正 20 面体群) は 5 次交代群 A_5 に同型な位数が 60 の群である.

今まで出てきた正多面体群のうち，A_5 だけは **(有限) 単純群**と言う特別な構造を持つ．単純群とは，化学で言えば 1 つの元素に対応するものであり，有限単純群をすべて見い出そうという問題は解決こそされているが，すべてを記述した本はまだ存在しない.

$$\text{単純群の分類} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{すべての元素を見出す}$$

と思えば，重要性は見やすいだろう.

さて，A_5 は単純群であることと深く関連して，

$$S_n \text{ が可解群} \Longleftrightarrow n \leq 4$$

となっている．「群の可解性」は「方程式のべき根による解法の存在」と関係がある (ガロア理論).