数学展望 I **第 13 回： 3 次方程式の解法**

3 次方程式の解法 (カルダノの公式) を紹介する.

11.1 方程式とガロア理論

実数係数の 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ の根は次で与えられることが知られている (2 次方程式の根の公式):

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

一般に, 実数係数の n 次方程式

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n = 0$$

に対して, 次の問を考えてみる.

(1) n 次方程式は複素数の範囲で根を持つか.

(2) n 次方程式は (重複を込めて) いくつ根を持つか. また, 重根となるのはいつか.

(3) n 次方程式の根の公式は存在するか.

まず, 最初の問いに対する答えは次の定理で与えられる. これは**ガウス (Gauss)** により厳密に証明が与えられた.

定理 11.1 (代数学の基本定理). 複素数を係数に持つ n 次方程式は, 複素数の範囲に重複を込めて丁度 n 個の根を持つ.

(注) 係数を実数に制限しても, 根は実数とは限らない！ この結果は複素数の重要性を示している.

次に「根の公式」(べき根による解法) の存在について述べる. **3 次方程式の根の公式**については複数の発見者がいるが, いわゆる**カルダノの公式**が有名である. これを次の節で紹介する.

4 次方程式については, フェラリの解法が知られている. ここではアイデアだけ紹介する.

5 次方程式については根の公式は存在しない[1]. これは**ラグランジェ**による**根の置換**の研究をベースにして, **ルフィニ**(1799) により最初に与えられたが, 彼の証明には不備があった. その不備を埋めたのは**アーベル**(1820 年代) である.

アーベルの仕事とほぼ同じ時期に, **ガロア**は**方程式の群 (ガロア群)** の概念を導入し, 次の定理を証明した:

定理 11.2. n **次方程式の解がべき根により解ける**ための必要十分条件は, その**方程式のガロア群が可解群である**ことである.

一見複雑な「体の拡大」の研究を, 構造的には易しい「群の部分群」の研究に置き換えて調べる方法を**ガロア理論**と呼ぶ.

---

[1] 厳密に述べるのは難しい!

11.2　3次方程式の解法 (カルダノの公式)

一般の3次方程式 $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ の解法は,

$$X^3 + pX + q = 0$$

の形の3次方程式の解法に帰着される. 以下この方程式について考える.

$X = S + T$ とおいて, 方程式に代入して整理すると,

$$(S^3 + T^3 + q) + (3ST + p)(S + T) = 0$$

となるので,

$$\begin{cases} S^3 + T^3 & = & -q \\ ST & = & -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

の根を $S = s, T = t$ とするとき, $x = s + t$ はもとの3次方程式の根になる. このことに注意して, 2次方程式

$$Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0$$

の根 α の3乗根の1つを s とし, t を $3st = -p$ となるように定める:

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}, \qquad t = -\frac{p}{3s}.$$

このとき, $(S, T) = (s, t)$,$(s\omega, t\omega^2)$, $(s\omega^2, t\omega)$ が上の方程式を満たす. ただし, $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ である. まとめると,

定理 11.3. 3次方程式 $X^3 + pX + q = 0$ の *3* 根は,

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}, \qquad t = -\frac{p}{3s}, \qquad \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

とおくとき,

$$s + t, \quad s\omega + t\omega^2, \quad s\omega^2 + t\omega$$

で与えられる.

注意 1. カルダノの公式において, $Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0$ の根の1つ α の「3乗根」は「数値的に求められる」と解釈すべきであろう. 実際, α が複素数の場合, これを $a + b\sqrt{-1}$ (a, b は実数) の形に求めるのは至難である. したがって, 上の公式は (2次方程式の場合と比較して) 実用性は低い.

問 1. (1) 3次方程式 $f(X) = X^3 + bX^2 + cX + d = 0$ の根を α, β, γ とするとき, 各係数を α, β, γ を用いて表せ.

(2) 3次方程式 $f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根を α, β, γ とするとき,
判別式[2] $D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q を用いて表せ.

[2] 2次方程式の判別式は, $a^2(\alpha - \beta)^2 = b^2 - 4ac$ である.