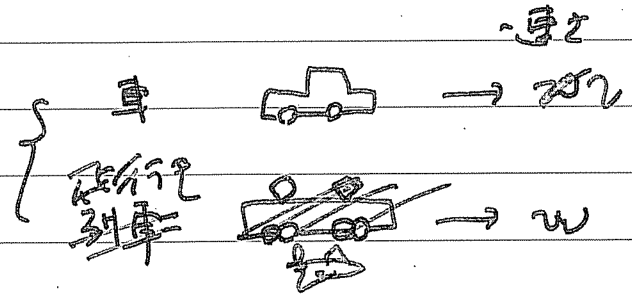
Part I 特殊相対論.

☆ Lorentz 変換

① 光速の不思議

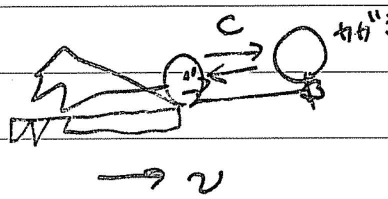
② 速度の合成則.



列車から見た車の速さ $w' = w - v$
車　　　飛行機

△ 光速　$c = 3\times 10^{10}$ cm/秒

c.f. 太陽 ⟶ 地球 は 8分20秒



☆ スーパーマンにとっての光速は?
- 前向き ⟶ $c' = c - v$?
- ⟵ 後向き $c' = c + v$?

☆ $v = c$ となると カガミは見えない?

□ 光速の不思議

Fact 1. 光速は不変 (等速度運動していても)
(観測者によらない)

Fact 2. 誰も光速以上では走れない

$|v| \leq c$

100%?

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

座標系（時計と物差し）

[2] 静止系と運動系

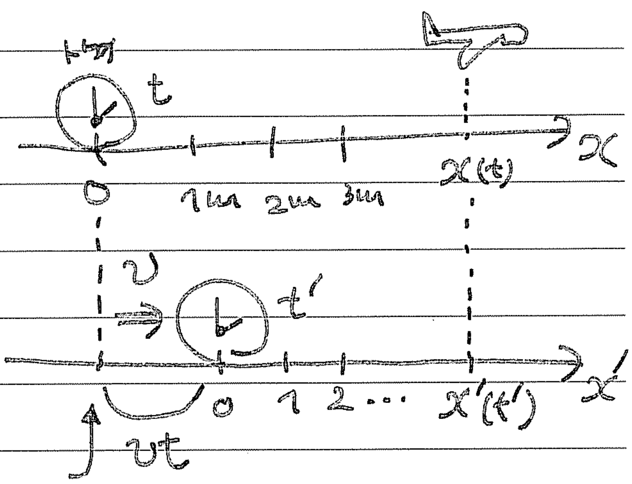
簡単のため.

＊ 1次元の場合を考える.

K系（静止系）(t, x) ← 時刻, 目盛り

（~~t, x~~） 時刻 空間

K'系（運動系）(t', x')



＊ 時刻 $t=t'=0$ で原点は ~~一致した~~ 同一点とする

＊ K'系はK系の x 方向に速度 v で等速直線運動している系.

何に対して

注 静止??

地球? 近似的な静止系.

注 ものさし. 時計は同じものを用いる

[3] 慣性系

* 静止系と運動系は区別できない。

* 慣性系；　力をうけない
(~~他の物体の エイキョウをうけない~~)
自由粒子 ~~が~~ は(必ず) 等速直線運動する様な（座標）系
（静止も含む）
時計も含む

慣性系でない例

{ 加速度運動
　回転系

* 2つの慣性系　K系とK'系の関係を考える。

(3) ガリレイ変換

K系とK'系の座標の関係は

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \end{cases} \quad (*)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}}$$

△ 速度合成則

飛行機の動き

$\begin{cases} x(t) \\ x'(t') \end{cases}$ に対し

(*) を $\underset{t'}{\overset{\shortparallel}{t}}$ で微分して

$$\underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{\shortparallel \; w'} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\shortparallel \; w} - v$$

$$w' = w - v$$

注 (*) は速さ $|v|$ が
光速 c に比べ とても小さい時の近似

例 ~~ガリ~~ ローレンツ変換（正しい変換）

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \beta = v/c \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}}$$

注 c：一定

$v \leq c \quad (\beta \leq 1)$

注 x と t が混ざる

注 逆変換は $\beta \to -\beta$

$$\because \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = (1-\beta^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad //$$

注 $|\beta| \ll 1 \Rightarrow$ ガリレイ変換

$$\because \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \underset{\downarrow\, 1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & -v/c^2 \;(\to 0) \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \quad //$$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{dx}{dt}=w$$

④ 速度合成則

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}=w \\ \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}=w' \end{cases}$$

$$\frac{\Delta x'}{c\Delta t'}=\frac{-\beta c\Delta t+\Delta x}{c\Delta t-\beta\Delta x}=\frac{-\beta+\Delta x/c\Delta t}{1-\beta\,\Delta x/c\Delta t}$$

$$\frac{w'}{\cancel{c}}=\frac{-\beta+\frac{w}{c}}{1-\beta\, w/c} \qquad \beta=\frac{v}{c}$$

$$=\frac{-\frac{v}{\cancel{c}}+\frac{w}{\cancel{c}}}{1-vw/c^2}$$

例 $w=c \Rightarrow v'=c$
光速の不変

$$\boxed{w'=\frac{w-v}{1-wv/c^2}}$$

別 $\begin{cases} x'=x'(t') \\ x=x(t) \end{cases}$ $\begin{cases} x'=x'(x,t) & =x'(x(t),t) \\ t'=t'(x,t) & =t'(x(t),t) \end{cases}$

$$\frac{dx'}{cdt'}=\frac{dx'}{cdt}\cdot\frac{cdt}{cdt'}$$

$$=\frac{dx'}{cdt}\Big/\frac{cdt'}{cdt}$$

~~偏微~~分法の定理

$$=\cancel{\gamma}\left(\frac{dx}{cdt}-\beta\right)\Big/\cancel{\gamma}\left(1-\beta\frac{dx}{cdt}\right)$$

✡ Lorentz 変換

[1] (i) 双曲関数

$$\begin{cases} \cosh\alpha \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \\ \sinh\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \\ \tanh\alpha = \sinh\alpha/\cosh\alpha \end{cases}$$

を用いると

ローレンツ変換は $\tanh\alpha = \beta$ とすると

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

と書ける事を示せ。

(ii)

$$\begin{cases} \cosh\alpha = \cos(i\alpha) \\ \sinh\alpha = -i\sin(i\alpha) \end{cases}$$

を用いると $(i = \sqrt{-1})$ ローレンツ変換は

$$\begin{bmatrix} ict' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(i\alpha) & -\sin(i\alpha) \\ \sin(i\alpha) & \cos(i\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ict \\ x \end{bmatrix}$$

と書ける事を示せ.

[2] 速度合成則を ローレンツ変換を t' で微分する事により示せ.

[3] $\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$ の場合の ローレンツ変換の近似式をもとめたい。

ガリレイ変換の $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ までの補正を

ローレンツ変換を テイラー（マクローリン）展開する事によりもとめよ。

☆ Galileo の相対性原理

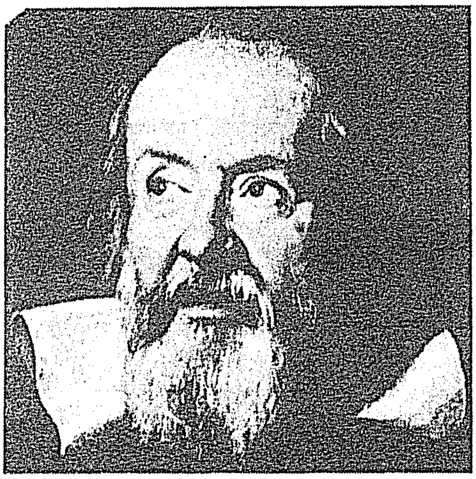


図1 ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei)

ある大きな船のデッキの下の船室にあなたと友達が閉じこめられているとしよう．そこには蝿や蝶やそのほかの小さい虫たちが飛んでいる．また大きな水槽の中には魚が泳いでいる．瓶を傾ければ，中の水がその真下の容器に落ちる．船が静かに止まっているとき，それらの小さな虫たちは船室のどの方向にも同じように飛ぶであろう．魚もすべての方向に同じように泳ぐはずだ．水は真下の容器に落ちる．友達にものを投げるとき，距離が同じならどの方向にでも同じ強さで投げればいい．ジャンプしても，どの方向にも同じだけ飛べるだろう．(船が止まっていればすべてこのようになることは疑いもないことだけれど)，船がどんな速度で動いていても，その運動が一様で，あっちこっちと揺らいでいないある限り，これらのことすべてを注意深く観察しても何らの違いも発見できないであろう．そして，船が動いているか止まっているかは外に出ない限りわからないであろう．

ガリレオ・ガリレイ 天文対話 第2日の
サルヴィアチの言葉より.

20世紀の物理学 第1巻, 丸善.