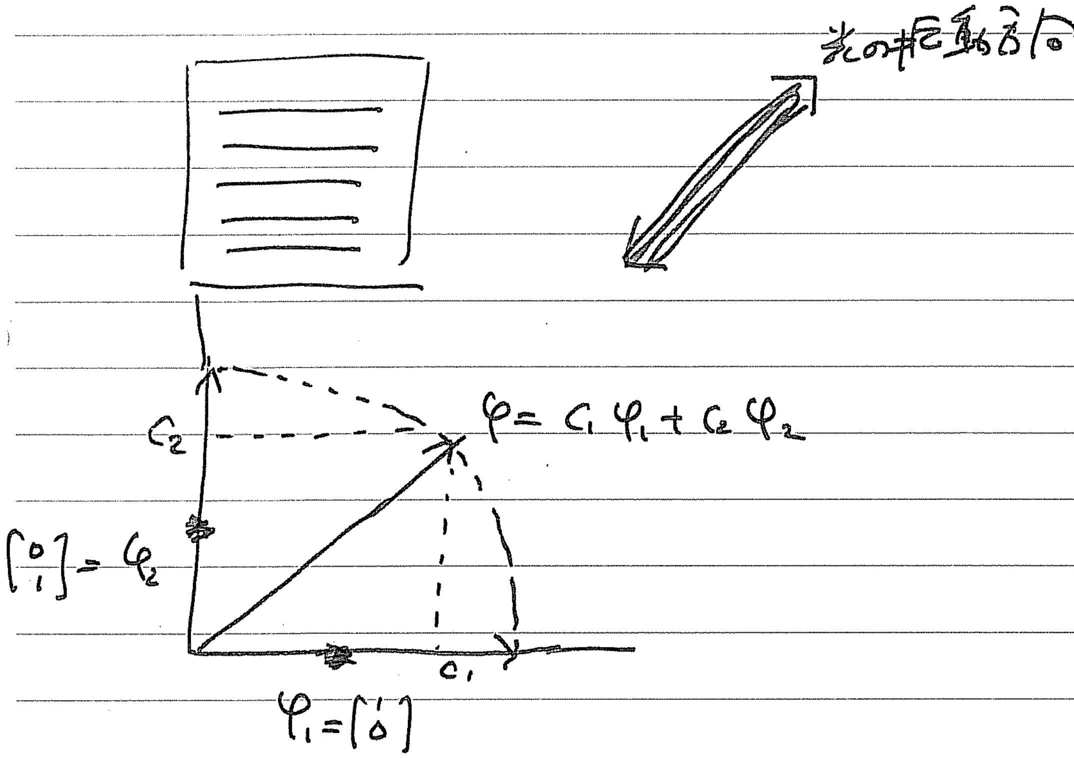
Jan 11 2006

△ 復習

・偏光板



△ 仮定

・光の"1つずつ"の観測により
状態が変化.

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \longrightarrow \varphi_i$$

・変化の確率 $= |c_i|^2$

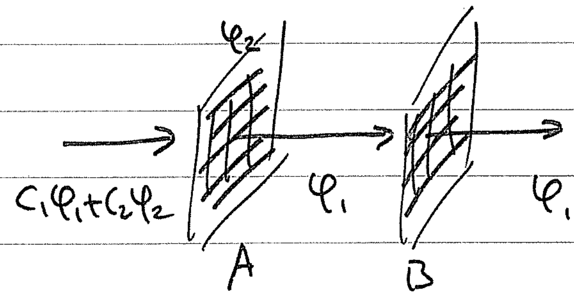
△ 今回

観測操作 = 線形変換

☆固有状態

1 偏光

* 2枚の(平行な)偏光板. (同じ方向の ~~~~ かたよりの観測)



Aを通れば　Bも100% 通る.
　　通らなければ　　　通らない.

一回目 ~~〜~~ 観測で 状態は変化

二回目の同じ観測では ~~〜~~ 変化なし

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \longrightarrow \varphi_1 \ \text{or}\ \varphi_2$$

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_1 \qquad (\varphi_2 \longrightarrow \varphi_2)$$

* 二回目の観測を数式で表現すると.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

観測操作　　状態　　観測値

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\varphi_i = a_i\varphi_i$$

$i = 1, 2$

$a_1 = 1$: 通る
$a_2 = 0$: 通らない

~~観測操作~~ 線形変換　　固有状態　　固有値.

注. 一回目はできない

~~$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ を作用させて方向が変わらない。~~

・一般のベクトル $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

(＊) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\overset{*}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases}x=ax\\0=ay\end{cases}$

問

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ を作用させて 方向が変わらない / 長さは a倍 ベクトルを探せ

~~Aの固有ベクトル~~

~~a をその固有値という~~

$\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix}a=1\\y=0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}a=0\\x=0\end{pmatrix}$

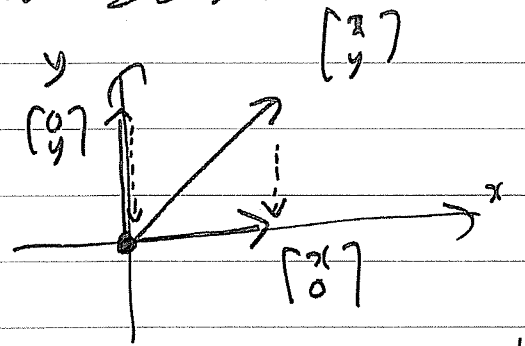
答

$$\begin{cases}A\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\\ A\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\end{cases}$$

$\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$: Aの固有値1の固有ベクトル

$\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ 〃 0 〃

注 Aは射影変換



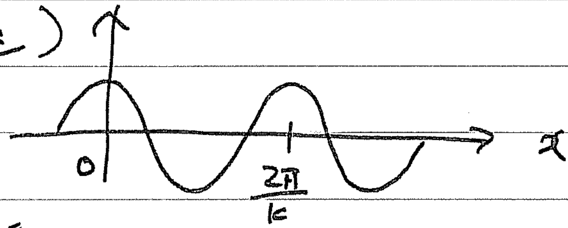
(☆ 一般のベクトルは、固有ベクトルの線形結合 / 重ね合わせ

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
)

② 運動量.

今回は、
▲ 単色光（時間依存性はなし）

$\cos(kx)$



x: 空間座標
k: 波数 $= 2\pi /$ 波長

▲ 量子論への自然な拡張

$$\psi(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

▲ Plank-Einstein の関係
P-E

光子1個の運動量 P（質量×速度）は

$$\boxed{P = \hbar k.} \qquad \hbar: \text{Plank 定数}$$

粒子性　　波動性

※ 青より紫の方が運動量大き..

注 粒子性と波動性を関係づける式

注 太陽 の色（ダイダイ）
表面 6000°C

（光を出す物質は）平均 6000円ずつ分け与える

{ 青色光子 1つ出すのに 1000円必要 → 6コ出せる
{ 紫 　　　1万円 → 1つも出せない.

$$\psi = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

$$\cancel{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \hbar k \psi = p\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = k(-\sin kx + i\cos kx)$$

$$= ik\,(\cos kx + i \sin kx)$$

$$= ik\,\psi$$

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\psi = k\,\psi$$

$$\boxed{\underbrace{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}_{\text{運動量の観測操作}}\psi = p\,\psi} \qquad p = \hbar k$$

固有~~状態~~状態　~~固有値~~ 観測値

[3] (2) 固有値問題の補い

$$A\,f(x) = \lambda\,f(x)$$

A	f	λ
① $\frac{d}{dx}$	e^{kx}	k
② $\frac{d}{dx}-x$	$e^{\frac{x^2}{2}} = f$	0
③ $\frac{d}{dx}-x$	$e^{\frac{x^2}{2}+kx}$	k
④ $\frac{d^2}{dx^2}-x^2$	$e^{\frac{x^2}{2}}$	1
⑤ $\frac{d^2}{dx^2}-x^2$	$xe^{\frac{x^2}{2}}$	3

$(\because)$ ② $f' = xf$

$(\because)$ ④
$$f'' = (xf)' = f + x^2 f$$
$$f'' - x^2 f = f$$

$(\because)$ ⑤
$$(xf)'' = (f + x^2 f)' = xf + 2xf + x^3 f = 3xf + x^3 f$$
$$(xf)'' - x^2(xf) = 3(xf)$$

☆ 固有状態

1 $A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\cdot\sin\theta \\ \cos\theta\cdot\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\theta, x, y \in \mathbb{R}$ (実数)

に対し

$Av = \lambda v$ となる $\lambda \in \mathbb{R}$ および v を全て求めよ.

2 $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

$h_n(x)$ を x の n 次の多項式 とする.

つまり $h_n(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + cx + d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

x の2階微分

(1) $(x^n f(x))''$ $n = 0, 1, 2, 3, 4$ を計算せよ

(2) $A = \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ に対し

$A(h_n f) = \lambda_n h_n f$ つまり

つまり $(h_n f)'' - x^2 h_n f = \lambda_n h_n f$ となる λ_n および h_n を求めよ.

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

☆ 固有状態 (つけたし)

注 $\left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b\right) f = f'' + af' + bf$ とする

$\boxed{3}$ $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{x^2}\right)\psi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x)$ 　　$\beta = 1, 2, 3, \cdots$

および

$\psi_k(x) = x^\beta \phi_k(x)$ とする

(1) $\phi_k(x)$ は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\beta}{x}\frac{d}{dx}\right)\phi_k(x) = \lambda_k \phi_k(x)$$ に従がう事を示せ.

(2) $\phi_k(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\beta-1} \frac{\sin kx}{x}$ が解である事を $\beta = 1, 2, 3$ の場合に確かめ λ_k をもとめよ。

注 $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx} f\right)$

$\boxed{4}$ $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x)$ に対し

$$\psi_k(x) = \left(-\frac{d}{dx} + x\right)^k e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \times e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2}$$

が解である事を $k = 0, 1, 2$ の場合に確かめ, λ_k をもとめよ。

注 $\left(-\frac{d}{dx} + x\right)^2 f = \left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\left(-\frac{d}{dx} + x\right) f\right)$