復習

* 固有状態 Φ : 観測値が確定している状態

$$\boxed{A\Phi = \lambda \Phi}$$

Aの観測で　λという観測値

物理量	固有状態	固有値
A	Φ	λ
運動量 $-i\hbar\frac{d}{dx}$	e^{ikx}	$\hbar k$
$\frac{d^2}{dx^2}-x^2$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	1

~64

□ Schrödinger eq

~~E = K + V~~

エネルギー = 運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$E = K + V(x)$$

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

p : 運動量 ⇝ $-i\hbar \frac{d}{dx}$

m : 質量 $\qquad p^2 = -\hbar \frac{d^2}{dx^2}$

$$H = \cancel{\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2}$$

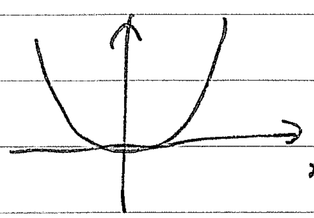
$$-\cancel{\frac{\hbar^2}{2m}} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\boxed{H\psi(x) = E\psi(x)}$$

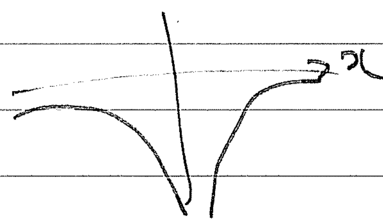
$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V\right)\psi = E\psi$$

$$\psi'' + V\psi$$

例) $V = x^2$

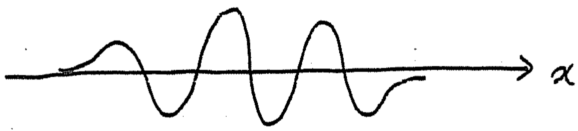


例) $V = \frac{1}{x^2}$



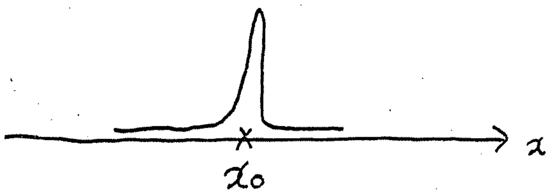
✡ 位置演算子

1 位置の観測



$\psi(x)$

⇓ 観測で"一点に収縮"



$\delta(x-x_0)$

2 Diracのδ-関数 : $\delta(x-x_0)$

✡ ある一点 x_0 のみに | non-zeroな値を持つ
粒子が存在する | 状態

素朴な定義

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \text{"}\infty\text{"} & x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1 \qquad \text{キカクイヒ}$$

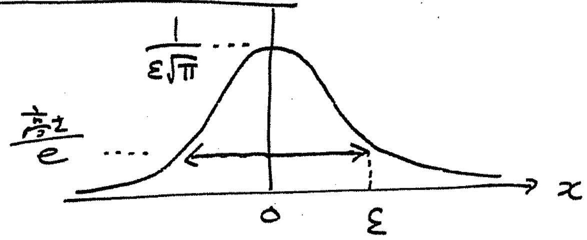
解決策.

困難 1. 情報が光速以上で伝わる。
(量子力学の解釈の問題) → 気にしない
→ Everettの多世界解釈.

困難 2. 普通の関数ではない。 → 気にしない (点は近似なので)
→ 超関数. → Schwartz
→ Sato

素朴な例.（あやしい定義）

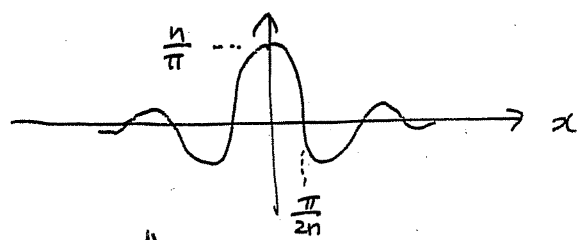
$$\boxed{① \quad \delta(x) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}}$$



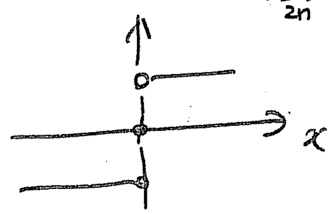
$$\boxed{② \quad \delta(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{-n}^{n} e^{ikx}\, dk}_{}}$$

$$\left(\left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{-n}^{n} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{ix} = 2\,\frac{\sin(nx)}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x}$$



$$③ \quad \theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$



$$\delta(x) \equiv \frac{d}{dx}\theta(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{dx}\theta(x)\, dx = [\theta]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx}\theta(x)\, dx = [f\theta]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{df}{dx}\theta\, dx$$

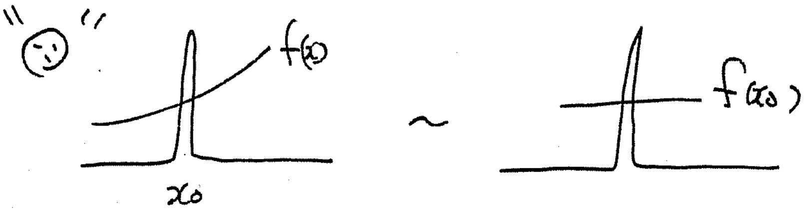
$$\varepsilon \to 0$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)\right)}_{f(0)} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{df}{dx}\theta\, dx \to \frac{df}{dx}(0) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta\, dx}_{0}$$

3 δ-関数の満たすべき性質

性質 $x=x_0$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)\,\delta(x-x_0) \quad ⊛$$



▲ $f(x) = x$ の時.

$$x\,\delta(x-x_0) = x_0\,\delta(x-x_0) \quad ⊛$$

x → 位置演算子 $\hat{x}$ （x をかける演算子）

x_0 → 固有値

$\delta(x-x_0)$ → 固有関数

▲ ⊛ を積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)\int \delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

$f \to \psi$, $x \leftrightarrow x_0$ として

$$\psi(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_0}_{\sum_n}\ \underbrace{\psi(x_0)}_{c_n}\ \underbrace{\delta(x_0-x)}_{\varphi_n(x)}$$

δの完全性.

$$\psi(x) = \sum_n c_n\,\varphi_n(x)$$

和が積になっている。

※これを δ-関数の定義にする。

4 汎関数による定義 (Schwartz的)

δ-関数の定義

$\forall$連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) = f(x_0)$$

- 積分まで含めた"作用"としての定義
- δ-関数は裸では現れないので
  必ず積分の衣を着せるべし。

応用

□ Green関数

$H =$

$\cancel{\left(\frac{d^2}{dx^2} \cdots\right)}$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x)\right) f(x) = \rho(x)$$ となる f をもとめよ

$$\left(\qquad\qquad\right) G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$ となる G がわかれば

$\int dx_0\, \rho(x_0)$

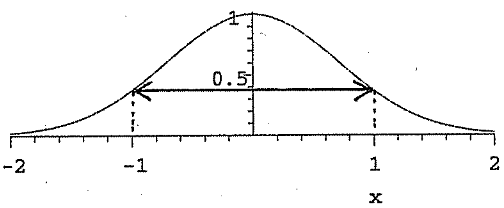
~~f…~~ $\rho(x_0)$ をかけて x_0 で積分すると

$$f(x) = \int G(x, x_0)\, \rho(x_0)\, dx_0$$

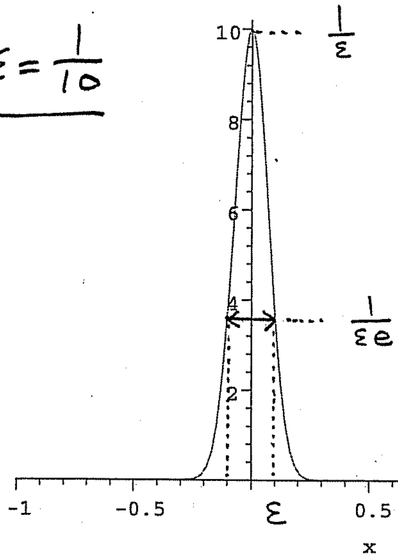
☆ δ-関数の素朴な例

① $\dfrac{1}{\varepsilon} e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}$

$\underline{\varepsilon = 1}$

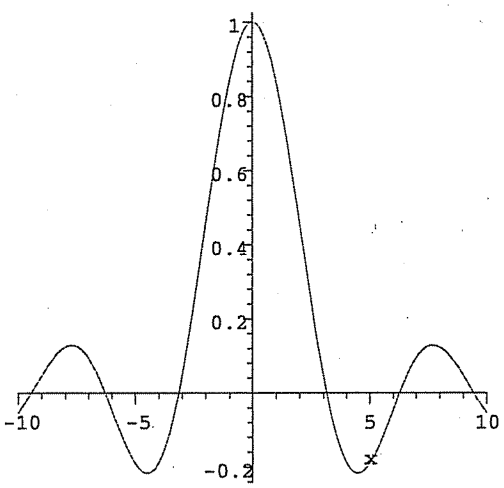


$\underline{\varepsilon = \frac{1}{10}}$

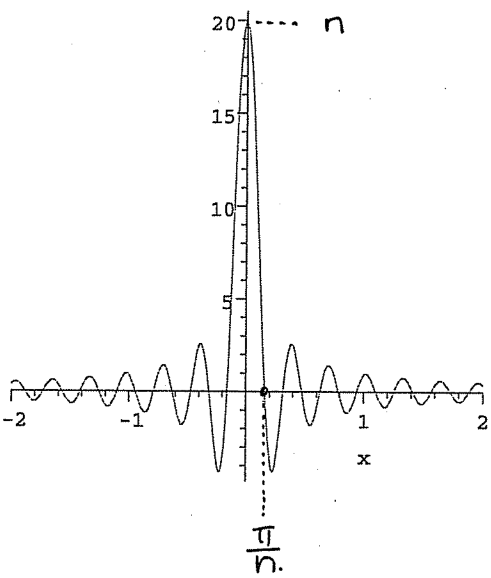


② $\dfrac{\sin nx}{x} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{ikx}\, dk$

$\underline{n = 1}$



$\underline{n = 20}$.



☆ δ-関数

1 $\delta(x)$ という記号は、任意の連続関数 $f(x)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x')\,f(x) \equiv f(x'), \qquad\qquad \delta(x-x') = \delta(x'-x)$$

を意味するとする。その δ-関数に対して、次の関係が成立する。任意の連続関数 $\Psi(x)$ に対して、

$$x\,\delta(x-x_0) = x_0\,\delta(x-x_0),$$
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\,\delta(x-x_0)\,\Psi(x_0),$$
$$\delta(x_0-x_0') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x_0)\,\delta(x-x_0'),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0\,|\,\Psi(x_0)\,|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\,\Psi(x)\,|^2.$$

この１行目と３行目を示せ。ただし３行目の意味は、任意の連続関数 $f(x_0)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0'\,\delta(x_0-x_0')\,f(x_0') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x_0)\int_{-\infty}^{\infty} dx_0'\,\delta(x-x_0')\,f(x_0')$$

とする（積分の順序に注意）。

2 （δ-関数のあやしい定義）

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1/2 & x<0 \end{cases}$$ を用い

$$\delta(x) \equiv \frac{d}{dx}\theta(x)$$ と定義できるとしよう.

このとき 任意の連続関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$ を示してみて下さい。

注 $\frac{d}{dx}\theta = 0$ $x \neq 0$ なので..

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\delta(x)\,dx$$ として 部分積分してみる。

注 ゲンミツ な ギロンは できません。