△ 復習

・ある物理量 A の観測で ｜①（必ず）特定の測定値 λ が得られる
（作用素）　~~（作用素）~~　｜② 変化しない

~~（お互いが）変化しない~~ 状態 φ_λ を
（ベクトル）

A の固有状態 と呼ぶ

$$A \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$$

例）

運動量　$-i\frac{d}{dx} e^{ikx} = k e^{ikx}$

位置　$x\,\delta(x-x_0) = x_0\,\delta(x-x_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

☆ フーリエ級数

完全性

・一般の状態 $\psi(x)$

物理量

Aの観測で

Aの固有値のどれかが得られるので

仮定

1. $\psi(x) = \sum C_n \varphi_n(x)$ $\quad C_n \in \mathbb{C}$

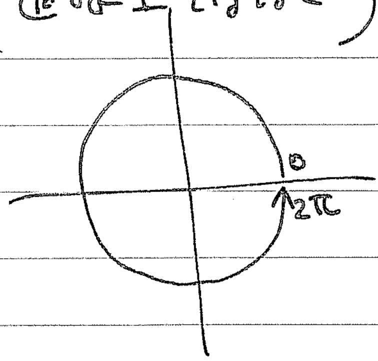
系 Aの固有状態は完全系をなす。

2. ~~Aの観測で $|C_n|^2$ の確率で~~

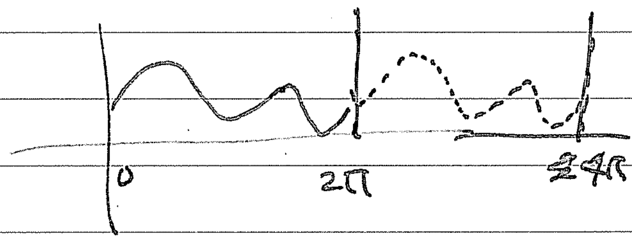
~~$\psi \to \varphi_n$ となる~~

② 円周上で考える $0 \le \theta < 2\pi$

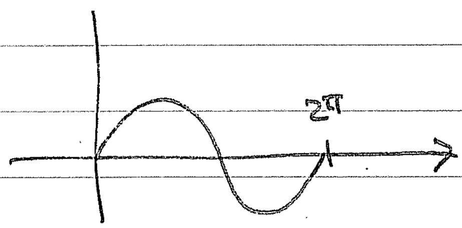
(直線上ではなく) $-\infty < x < \infty$



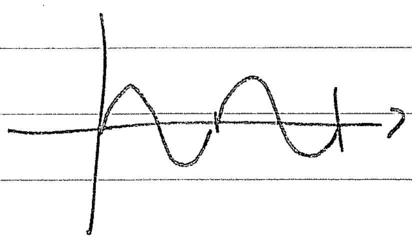
* 円周上の関数 〜 周期 2π の周期関数



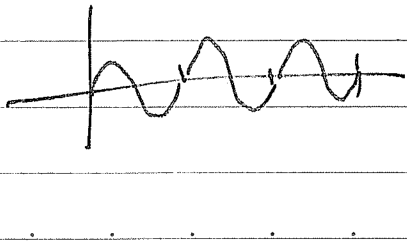
* なめらかな 円周上の ~~周期~~関数の話



$\sin\theta$



$\sin 2\theta$



$\sin 3\theta$

$$\left(\begin{array}{ll} \sin n\theta & n \in \mathbb{Z} \\ \cos n\theta & \end{array} \right)$$

円周上での
回転の
回転は
とびとび

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

命題

・円周上の値の関数 ψ は次の様に書ける

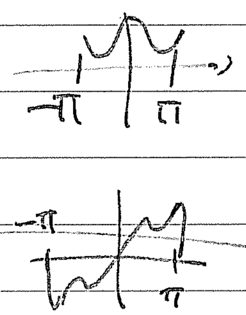
$$\psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

特に $c_n \in \mathbb{R}$ の時. $\psi(\theta) = \psi_e + i\psi_o$ とおくと

系

・円周上の値の $\left|\begin{array}{l} \text{偶関数 } \psi_e(\theta) = \psi_e(-\theta) \text{ と} \\ \text{奇関数 } \psi_o(-\theta) = -\psi(\theta) \text{ は} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \psi_e(\theta) = \sum a_n \cos n\theta \\ \psi_o(\theta) = \sum b_n \sin n\theta \end{cases}$$



[illegible]

$$z = e^{i\theta}$$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$ Taylor [illegible]

1月3日

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum e^{i\theta n}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\delta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left(\sum_n e^{i\theta n}\right)d\theta$$

$$= f(0)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_n e^{in\theta}\,d\theta = 1}$$

$$\because \begin{cases} n=0 \Rightarrow & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1 \\ n\neq 0 \Rightarrow & \begin{cases}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\,d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi}\sin n\theta\,d\theta = 0\end{cases}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta = \begin{cases}1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sum e^{in\theta}\,d\theta = f(0)}$$

$$z = e^{i\theta}$$

$$f(\theta) = F(\underset{\shortparallel}{z}) \qquad \theta = \frac{1}{i}\log z$$

$$F(z) = F(0) + zF'(0) + \frac{z^2}{2}F''(0) + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}F^{(m)}(0)$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\sum_n e^{in\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int \sum_n\sum_m \frac{F^{(m)}(0)}{m!} e^{i(n+m)\theta}$$

(3) 直交性

$\varphi_n(\theta) = e^{in\theta}$

$\varphi_n^*(\theta) = e^{-in\theta}$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_m^*(\theta)\,\varphi_n(\theta)\,d\theta = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}}$$

$\parallel$

(∵)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 1 & m-n=0 \\ 0 & m-n \neq 0 \end{cases}$$

④ 展開係数

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(\theta) &= \sum_n c_n e^{in\theta} \\ c_m &= \frac{1}{2\pi}\int \psi(\theta)\, e^{-im\theta}\, d\theta \end{aligned}}$$

$$\parallel$$

$$(\because) \quad \frac{1}{2\pi}\int \sum_n c_n e^{in\theta} e^{-im\theta}\, d\theta$$

$$= \sum_n c_n \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int e^{i(n-m)\theta}\, d\theta}_{\begin{cases} n-m=0 \Rightarrow 1 \\ n-m\neq 0 \Rightarrow 0 \end{cases}}$$

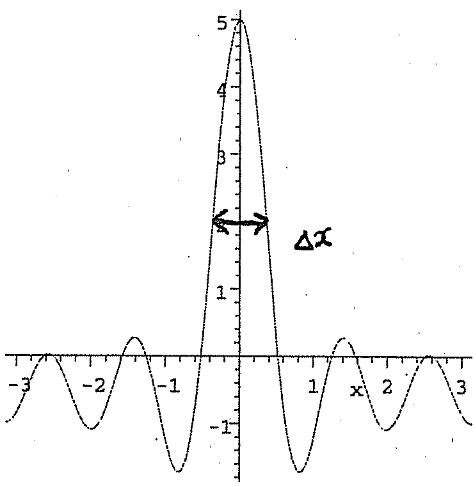
$$= c_m \quad //$$

✡ Fourier 級数

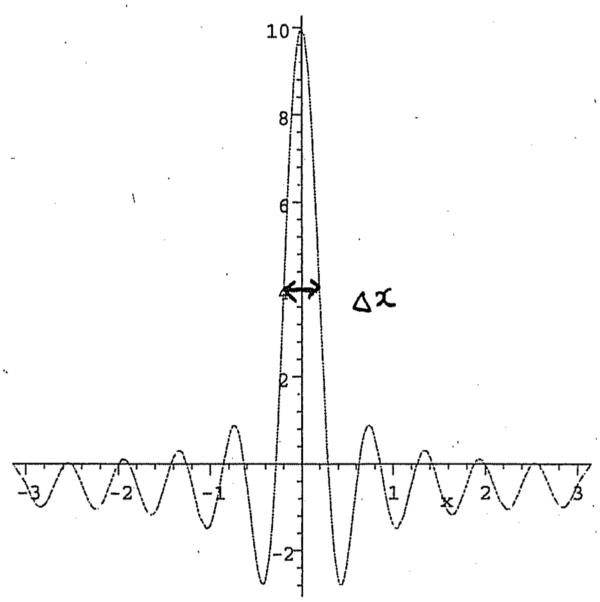
$k = 2\pi /$ 波長

: 波数

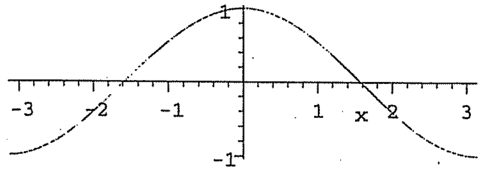
1. $\sum_{k=1}^{5} \cos(kx)$



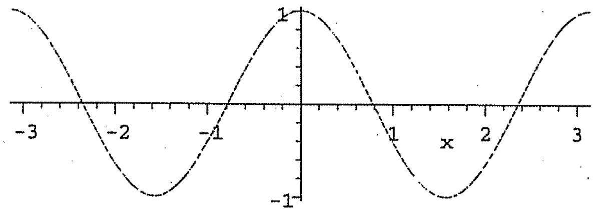
2. $\sum_{k=1}^{10} \cos(kx)$



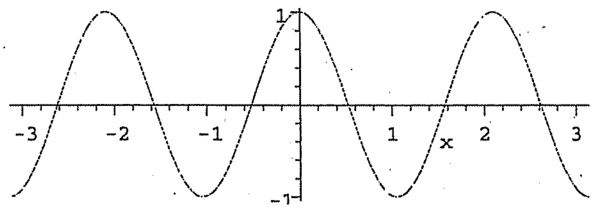
$k = 1$



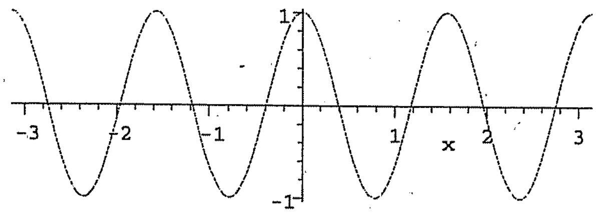
$k = 2$



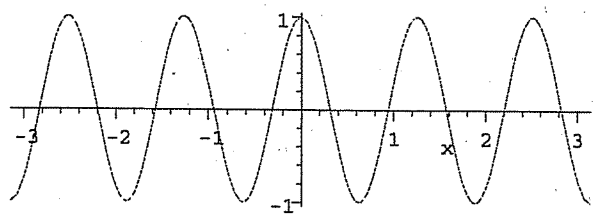
$k = 3$



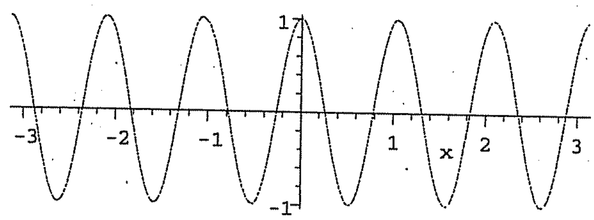
4



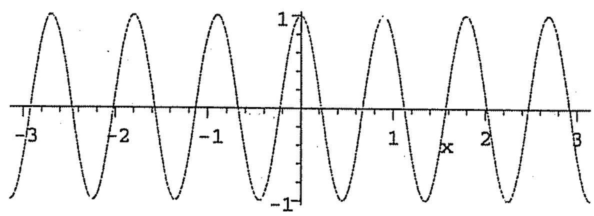
5



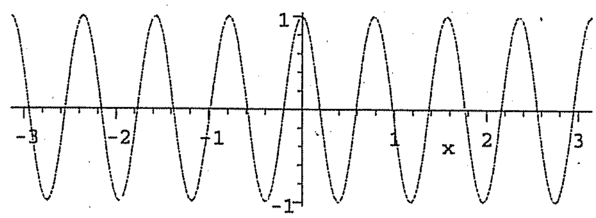
6



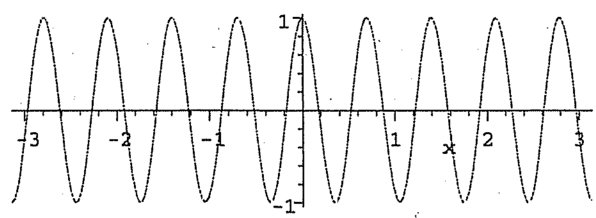
7



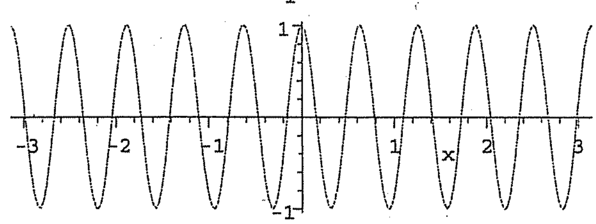
8



9



10



その他

$$\mathbb{L}^2 \equiv \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

1 ある関数列 $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \cdots \in \mathbf{L}^2$ と任意の数列 $C_1, C_2, \cdots \in \mathbf{C}$ を考える。$\sum_n |C_n|^2 < \infty$ となる任意の $\{C_n\}$ に対して

$$\Psi(x) \equiv \sum_n C_n \Phi_n(x),$$

が

(0). $\sum_n |C_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \, dx$

となるならば、

(1). $C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) \, \Psi(x) \, dx$

(2). $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) \, \Phi_m(x) \, dx = \delta_{n,m} \equiv \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

である事を示せ。

（実は皆、同等です。）

2

$$\Phi, \Psi \in \left\{ \Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\, \Psi(x) \,|^2 \, dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |\, \frac{d\Psi}{dx}(x) \,|^2 \, dx < \infty \right\},$$

に対して、運動量演算子 $i\frac{d}{dx}$, $(i \equiv \sqrt{-1})$ が Hermite である事、つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x) \left(i \frac{d\Psi}{dx}(x) \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{d\Phi}{dx}(x) \right)^* \Psi(x) \, dx$$

を示せ。（部分積分して、必要ない所が消える事を示せばよい）

3 Gauss 分布（正規分布）

$$\Psi(x) = c\, e^{-\frac{x^2}{2a}}, \qquad a, c \in \mathbf{R}$$

に関して

(1). c を適当に定めて規格化 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\, \Psi(x) \,|^2 \, dx = 1 \right)$ し、

(2). 不確定性関係 $\Delta x \Delta p = ?$ を計算せよ。

注. $(\Delta A)^2 \equiv \langle\, A^2 - \langle\, A \,\rangle^2 \,\rangle = \langle\, A^2 \,\rangle - \langle\, A \,\rangle^2$ は物理量 A の分散、

$\langle\, A \,\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \hat{A} \Psi(x) \, dx$ は A の平均値、

$\hat{x} \equiv x$ は位置演算子、$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}$ は運動量演算子である。

$\hat{A}$ の所を $\hat{x}$ や $\hat{p}$ にして Δx や Δp を計算する。