△ 復習. 11/9 2006

(0) Lorentz 変換

⇕

(1) 線型変換 ⟺ (1) ~~(?)~~ 時空の一様性
(特別な点はない)

(2) 世界間隔 不変性 ⟸ (2') 光速不変

(2'') 空間の等方性
(特別な方向はない)

(2''') (運動の相対性.) 略

(3) (恒等変換を含む) 略

[illegible]

☆ 線型性

[1] 1変数の場合

(1) $f(x) = ax + b$　　xの一次式　　$a, b \in \mathbb{R}$

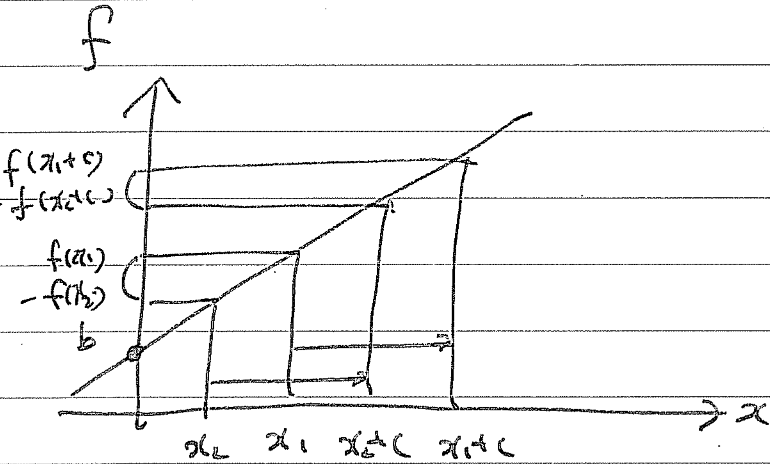
$\Downarrow$

(2) $f(x_1 + c) - f(x_2 + c) = f(x_1) - f(x_2)$

$\because$

$$
\begin{array}{rcl}
f(x_1+c) &=& a(x_1+\cancel{c}) + \cancel{b} \\
-)\ f(x_2+c) &=& a(x_2+\cancel{c}) + \cancel{b} \\
\hline
 && ax_1 - ax_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(x_1) &=& ax_1 + \cancel{b} \\
-)\ f(x_2) &=& ax_2 + \cancel{b} \\
\hline
 && ax_1 - ax_2
\end{array}
$$

$=$ 右辺　//



- 原点をずらしても同じ
- どこで実験しても同じ
- 空間の一様性

逆は?

命題 $f(x)$: 微分可能な(実数値)関数の場合

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

(証) (2)より

$$f(x_1+c)-f(x_1) = f(x_2+c)-f(x_2)$$

$c \neq 0$で割って $c \to 0$ とすると

$$\frac{f(x_1+c)-f(x_1)}{c} = \frac{f(x_2+c)-f(x_2)}{c}$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = a \quad x\text{によらない定数}$$

(∵ 左辺は x_1 のみの関数
右辺は x_2 〃
∴ 両者 x_1, x_2 によらない)

つまり $f'(x) = a$

$\Downarrow$

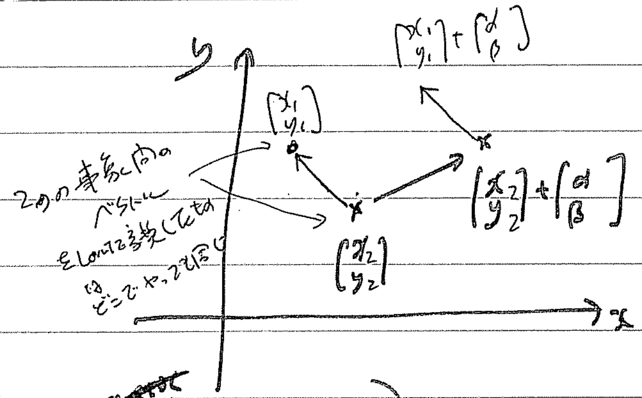
∴ $f(x) = ax + b$ (1) //

注 fの方も原点をずらし

$g(x) = f(x) - b$ とすると

$g(x) = ax$: 斉次一次式

② 2変数の場合



とずらしても同じ事
空間の一様性

($f(x)$ を $x'(x)$ と書く事にして)

(1) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ $\quad a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$

つまり

$$\begin{cases} x'(x, y) = ax + by + s \\ y'(x, y) = cx + dy + t \end{cases}$$

x, y の一次式

(2) $\begin{bmatrix} x_1 + \alpha \\ y_1 + \beta \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} x_2 + \alpha \\ y_2 + \beta \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}'$ 空間の一様性

つまり

$$\begin{cases} x'(x_1+\alpha, y_1+\beta) - x'(x_2+\alpha, y_2+\beta) = x'(x_1, y_1) - x'(x_2, y_2) \\ y'(\quad " \quad) - y'(\quad " \quad) = y'(\;"\;) - y'(\;"\;) \end{cases}$$

直接計算

$\because$ $\quad x'(x_1+\alpha, y_1+\beta) = a(x_1+\alpha) + b(y_1+\beta) + s$

$-)\ x'(x_2+\alpha, y_2+\beta) = \cdots$

$\vdots$

命題 $\begin{cases} x'(x,y) \\ y'(x,y) \end{cases}$: 偏微分可能な実関数の場合

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

∵

(1) $\begin{cases} x'(x,y) = ax+by+s \\ y'(x,y) = cx+dy+t \end{cases}$ $\left(a,b,c,d,\ s,t,\alpha,\beta \in \mathbb{R} \right)$

(2) $\begin{cases} x'(x_1+\alpha, y_1+\beta) - x'(x_2+\alpha, y_2+\beta) = x'(x_1,y_1) - x'(x_2,y_2) \\ y'(x_1+\alpha, y_1+\beta) - y'(x_2+\alpha, y_2+\beta) = y'(x_1,y_1) - y'(x_2,y_2) \end{cases}$

証明 (2)で $\beta=0$として $\alpha\neq0$で割ると

$$\frac{x'(x_1+\alpha, y_1) - x'(x_1,y_1)}{\alpha} = \frac{x'(x_2+\alpha, y_2) - x'(x_2,y_2)}{\alpha}$$

$\alpha=0$として $\beta\neq0$で割ると

$$\frac{x'(x_1, y_1+\beta) - x'(x_1,y_1)}{\beta} = \frac{x'(x_2, y_2+\beta) - x'(x_2,y_2)}{\beta}$$

・ $\alpha\to0$ や $\beta\to0$ とすると

$$\frac{\partial x'}{\partial x}(x_1,y_1) = \frac{\partial x'}{\partial x}(x_2,y_2) \qquad \frac{\partial x'}{\partial y}(x_1,y_1) = \frac{\partial x'}{\partial y}(x_2,y_2)$$

∴ $\dfrac{\partial x'}{\partial x}(x,y) = a \qquad \dfrac{\partial x'}{\partial y}(x,y) = b$

(a,b は x,y によらない定数)

積分すると　yの関数

∴ $x' = ax + B(y) \quad = \quad x' = by + A(x)$

∴ $B(y) - by = A(x) - ax = s$ (x,y によらない定数)

∴ $x' = ax+by+s$

同様に $y' = cx+dy+t$ $\Big\}$ (1)

//

逆 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ の方も原点をずらし

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ を新たに $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ とおくと

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 斉次一次式になる

線型変換.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{(2) 空間の一様性} \Longrightarrow \text{(1)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{と} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{の関係の線型性.} \end{array}}$

時空の一様性 $\Longrightarrow$ Lorentz変換は線型変換.

☆ 線型性

命題 $f(x)$ が 微分可能な (実数値) 関数の場合

(1) $f(x) = ax+b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ 任意の x_1, x_2 $c \in \mathbb{R}$ に対し

(2) $f(x_1+c) - f(x_2+c) = f(x_1) - f(x_2)$

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は直接計算に分かる.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す.

(2) より $f(x_1+c) - f(x_1) = f(x_2+c) - f(x_2)$

($\because$ 左辺は x_1 のみに依存し 右辺は x_2 のみに依存するので 両辺共 x_1, x_2 に依存しない)

これを $c \neq 0$ で割って $c \to 0$ とすると

$f'(x_1) = f'(x_2) = a$: x によらない定数

つまり $f'(x) = a$ となる

$\therefore$ $f(x) = ax+b$ //

問 以上の命題にならい以下の命題を証明せよ

命題 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ が偏微分可能な (実数値) 関数の場合

(1) $\begin{cases} f(x,y) = ax+by+s \\ g(x,y) = cx+dy+t \end{cases} \qquad \begin{matrix} a, b, c, d \\ s, t, \alpha, \beta \end{matrix} \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ 任意の x_1, x_2, y_1, y_2 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

(2) $\begin{cases} f(x_1+\alpha, y_1+\beta) - f(x_2+\alpha, y_2+\beta) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \\ g(x_1+\alpha, y_1+\beta) - g(x_2+\alpha, y_2+\beta) = g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2) \end{cases}$