◎ 復習　　Nov. 16 2006

(0) Lorentz変換 $\Longleftrightarrow$ (1) 線型性 $\Leftarrow$ 一様性

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

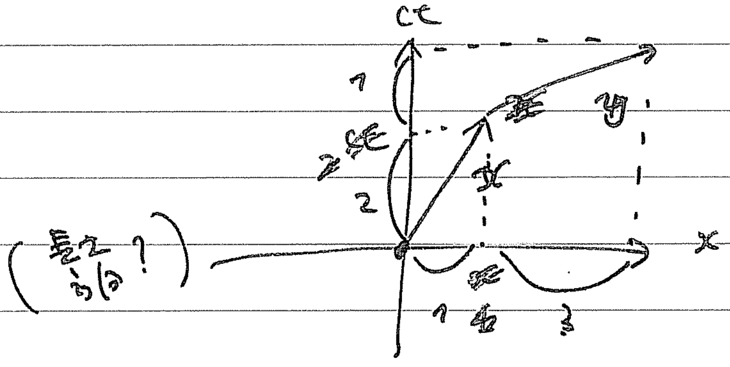
(2) 不変性 $\Leftarrow$ {光速不変, 等方性}
世界共通なc

(3) 略

今回 "数学的"一般化
重要な部分をとり出す

まとめ：重要な記号をとり出す.

(1) ベクトル空間



* ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

* ベクトルの集合

= ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$

性質

~~ベクトル空間の定義~~

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V \\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} \in V \end{cases}$$

注 これを ベクトル空間 Vの定義とする.

(2) Lorentz内積　$\cancel{x}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

普通は

~~普通の~~長さ　$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

~~普通の~~内積　$(x, y) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

世界内積

Lorentz長さ　$\|x\|^2 = x_1^2 - x_2^2$

Lorentz内積　$(x, y) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(注 一般の内積　$(x, y) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$　)

(対称行列)　$a, b, d \in \mathbb{R}$

性質

~~注~~ 内積の定義

$x, y \in V$

$(x, y) \in \mathbb{R}$

(前と後ろに関して ~~右について左について~~)

1. 線形性 (右について) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

$(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$

左も同様

2. 対称性　$(x, y) = (y, x)$

3. 非退化　任意の $x \in V$ に対し

$(x, y) = 0 \Longrightarrow y = 0$

(注 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすればよい)

(注 次の性質はない ~~普通の内積は~~ 持つ

4. 正定値　$(x, x) \geq 0$)

Lorentz内積はこれが欠ける。

注 これらを内積の定義とする(公理)(前4)

Minkowski 空間

$$
\begin{cases}
\text{ベクトル } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\
\text{Lorentz “内積” } (\ ,\ ) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\cancel{\boldsymbol{x}} & & \boldsymbol{y} & \longmapsto & \cancel{\boldsymbol{x}^T \eta}\ \boldsymbol{y}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto (ct_1, x_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

定義 Lorentz内積 のコピー をもつ ベクトル空間を Minkowski空間という

5 正規直交基底

例1 $\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ $(e_1, e_1) = 1 \qquad (e_1, e_2) = 0$

$(e_2, e_1) = 0 \qquad (e_2, e_2) = -1$

(自分とは ± 1, 他人とは 0) という内積となる
ベクトルの組 $\{e_1, e_2\}$ を 正規直交基底という

性質 任意のベクトル $x \in V$ が e_1 と e_2 の線型結合で書ける (*)

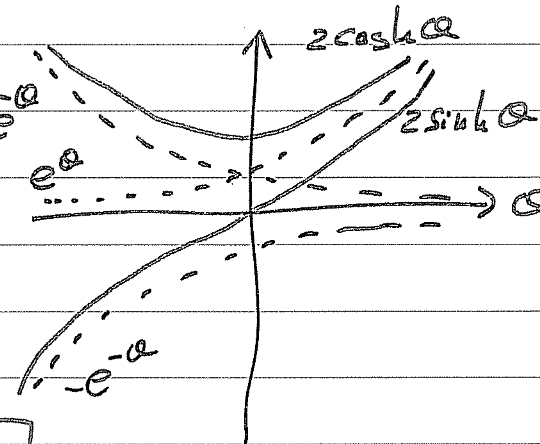
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1, e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

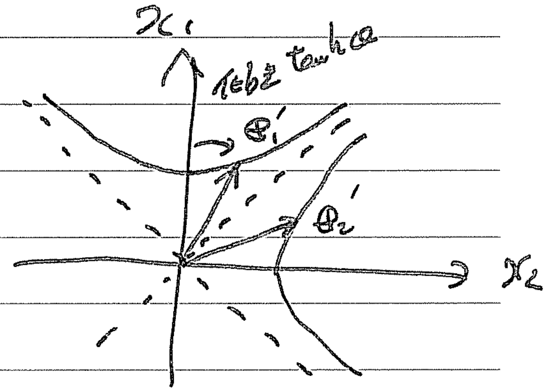
例 $\left\{ e_1' = \begin{bmatrix} \cosh\theta \\ \sinh\theta \end{bmatrix},\ e_2' = \begin{bmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{bmatrix} \right\}$

$\theta \in \mathbb{R}$

注 $\begin{cases} \cosh\theta = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ \sinh\theta = \dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \\ \tanh\theta = \sinh\theta / \cosh\theta \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} (e_1', e_1') = \boxed{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1} \\ (e_1', e_2') = 0 \quad \cdots \end{cases}$



∴ $\{e_1', e_2'\}$ に対して ⊛ が成立

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1' e_1' + x_2' e_2'$$
$$= [e_1', e_2'] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

逆行列

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

問 これが Lorentz 変換と同じであることを示せ
ただし $\beta = \tanh\theta$

4 Lorentz 変換

<u>示した事</u>

基底変換

$\{e_1, e_2\} \longrightarrow \{e_1', e_2'\}$ は Lorentz 変換

静止系　　　　運動系

<u>より一般に</u>

ミンコフスキー空間の

正規直交基底 $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ 慣性系

2つの基底変換 $\longleftrightarrow$ Lorentz 変換

✡ Minkowski 空間

以下 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする.

$\boxed{1}$ Lorentz 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ に対し.
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる場合
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ ならば $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) < 0$ である事を示せ.

$\boxed{2}$ 一般の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $ad - b^2 \neq 0$, $a, b, d \in \mathbb{R}$ に対し.

次の性質を確かめよ。

(1) 左成分と右成分に関して それぞれ 線型

(2) 対称 : $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(3) 非退化 : 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y} = 0$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ の (1), (2), (3) をみたす 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の値は
任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対する ノルム $\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ の値で決まる事を示せ。

ヒント $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2$ を考えてみよ.

$\boxed{4}$ $\boxed{2}$ の内積に対し.

(1) $\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = \varepsilon_1 & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0 \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = 0 & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = \varepsilon_2 \end{cases}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ となる 正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が存在する事を示せ。

(2) (1)の基底 を用いると
任意のベクトル $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に対し

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2$$

となる事を示せ.

ヒント $\begin{cases} \text{方法1} & a \neq 0 \text{ の場合}, d \neq 0 \text{ の場合}, a = d = 0 \text{ で } b \neq 0 \text{ に場合分けして} \\ & \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \text{ を具体的につくってみる} \\ \text{方法2} & \text{線型代数でやる行列の対角化 (固有値問題) を用いる} \end{cases}$