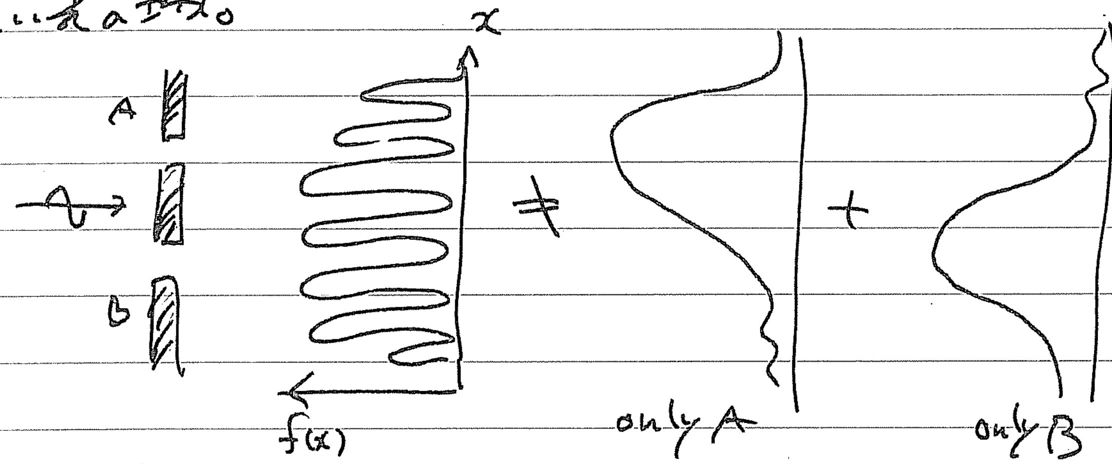
△ 復習 Dec 7, 2006

・不確定性原理

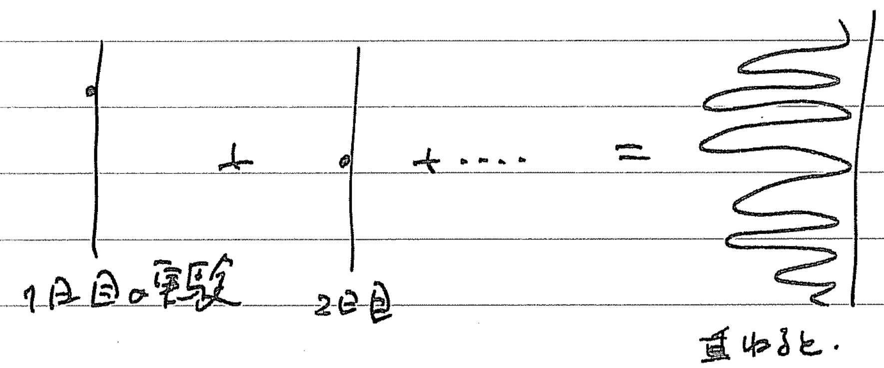
$\boxed{\text{光子や電子は軌道という概念をもたない}}$

△ Youngの干渉実験

・強い光の場合



・弱い光の場合：一点のみ感光



・一つの光子も干渉の情報を知っている

$\boxed{\begin{array}{l}\text{光子がある場所}\ x\ \text{に出現する確率}\ P(x)\ \text{は} \\ \text{干渉じまの強さ}\ f(x)\ \text{に比例する}\end{array}}$

$$P(x) = \frac{f(x)}{\int f(x)\,dx} \qquad \text{注}\ \int P(x)\,dx = 1$$

注　観測した時は　どこか一点に存在。
　　観測していない時は　そうとは限らない
　　　　　　　　　　　　そうではない。

※　出現確率　をいかに記述するか。
　　　　　　　の従う法則は？

今回　光が強い場合
　　　　↓
　　電磁気で近似できる

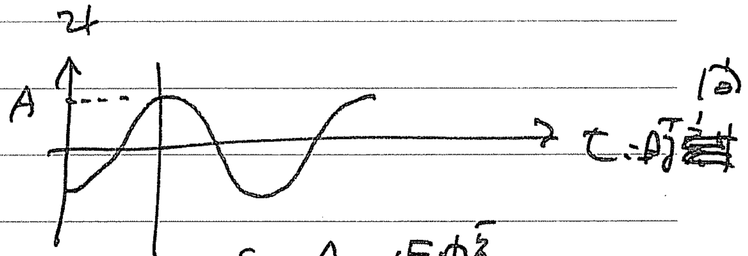
注　光は電磁波
　　波長の違いにより
　　　X線，紫外線，可視光，赤外線，マイクロ波　電波　etc.

☆ 重ね合わせの原理

(1) 電磁場.（単色光の場合）

* ある場所 x における電磁場

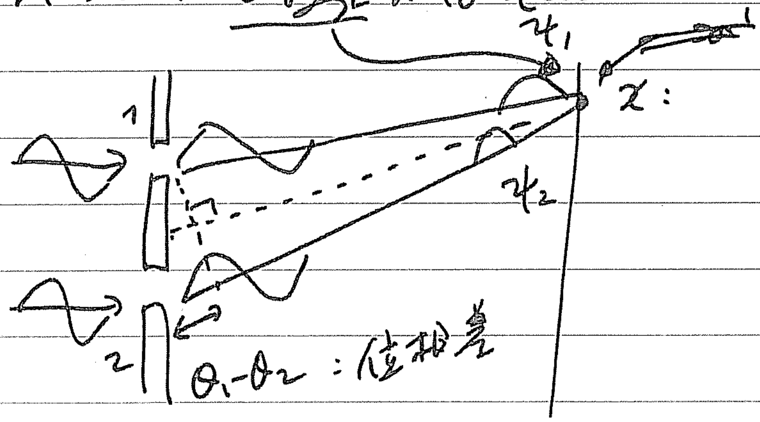
$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$



$\{$ A：振幅
ν：振動数

（1秒に $\frac{\omega}{2\pi}$ 回 振動）

* スクリーン上のある点における電磁場



$\theta_1 - \theta_2$：位相差

$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi n \Rightarrow$ 強め合う

$= \pi(2n+1) \Rightarrow$ 弱め合う

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\psi_i = A_i\cos(\omega t + \theta_i)$$

$i = 1, 2$

問　A と θ を $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ で表わせ

(2) 電磁場の強さ

理由は説明しない

<u>Fact</u>

スクリーンの像の強度 〜 電磁場のエネルギー

$$= \int dt \, |\psi(t)|^2$$

~~像~~ $\cancel{= \int dt \, |\psi_1 + \psi_2|^2}$

$\cancel{+ \int dt \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right)}$: ~~片方からの像の和~~

光子が場所 x に出現する確率 $\overset{\text{比例}}{\propto} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \, |\psi(t)|^2$ ← 1周期

1周期あたりの強度

$$\int dt \, |\psi_1 + \psi_2|^2 \neq \int dt \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right)$$

干渉像　　　　片方のスリットからの像の和

[3] 波動関数

▲ 電磁波からの類推より

（干渉を説明するために）

* 波動性：光子や電子の状態は電磁場 ψ の様なもので．

（統計性を 〃 ）

* 粒子性：位置の観測をした時の出現確率が ψ^2

* そこで次の公理を考える．

▲ 公理．

1. 系の状態は $\psi(x,t)$ で表わされる。　あとで説明

座標 x，時刻 t の複素数値関数。（波動関数 or 確率振幅）

2. $|\psi(x,t)|^2$ ：位置の観測をした時の"存在確率"の（密度）分布

注．$\int_V |\psi|^2 dx$ ：領域 V 内に観測される確率．

注．位置以外の観測に関する情報も持たせたい．

▲ 規格化条件．：どこかには必ずある．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \qquad (\text{if } \psi \neq 0)$$

注　本当は $= \infty$ となってしまう（重要）な状態もある．

干渉 させるために.

△ 重ね合わせの原理.

> 状態 ψ_1, ψ_2 の任意の線型結合
>
> $c_1\psi_1+c_2\psi_2$ も又 状態。 $c_i\in\mathbb{C}$

注 規格化するので. 係数の比 $\frac{c_1}{c_2}$ のみ意味をもつ.

注. $\psi\equiv0$ (恒等的にzero) は. 何もない状態。(普通は考えない)

系. 逆にどんな状態も. 他の2つの状態の重ね合わせとして表現できる。 ∵ 引けばよい

系. 自分自身と重ね合わせても 同じ状態。 ∵ 規格化するので.

△ "複素"関数である理由.

干渉は 2つの自由度 $\left(\begin{array}{l}\text{振幅の比}\\\text{位相差}\end{array}\right)$ で 決まった。

∴ 重ね合わせの係数の比 $\frac{c_1}{c_2}$ は $\in\mathbb{R}$ ではなく $\in\mathbb{C}$ なるべし!!

注. 重ね合わせる前は $\psi=|\psi|e^{i\arg\psi}$ の $|\psi|$のみ重要だった.

☆ 重ね合わせの原理

1 $\psi_i = A_i \cos(\omega t + \theta_i)$ $i=1,2$ に対し
$A_i, \theta_i, \omega, t \in \mathbb{R}$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ を
$= A\cos(\omega t + \theta)$ と表わした場合の
A を $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ で表わせ。

ヒント ベクトル $\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}$ or 複素数 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いると簡単です。

2 1で $A_1 = A_2 = a \neq 0$ の場合

(i) $\dfrac{\psi}{a} = \cos(\omega t + \theta_1) + \cos(\omega t + \theta_2)$ を

$= 2\cos\left(f(\omega t, \theta_1+\theta_2)\right)\cos\left(g(\omega t, \theta_1-\theta_2)\right)$

と表わせ。つまり f と g を求めよ。

(ii) $\theta_1 - \theta_2 = d\sin\theta$ とします。（注 d：スリット間距離 θ：スリットからスクリーン上の点への角度）

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{\psi}{a}\right)^2 dt = 0$$

となる条件を θ で表わせ。

☆ 不確定性原理

1 "光子の裁判" を読んで（論理の進め方などについて）考察せよ.