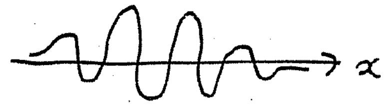
Dec 14 2006

△ 復習：量子力学の原理

1. $\psi(x,t)$ ：状態（波動関数）
   ：複素数値関数



2. $|\psi(x,t)|^2$ ：存在確率

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ ：規格化条件

4. $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ も状態

$\{\text{状態全体の集合}\} \simeq \{\underbrace{\text{複素}}_{1}\ \underbrace{\text{ベクトル空間}}_{4}\} / \underbrace{\mathbb{C}_{\neq 0}}_{3}$

注 無限次元になる

∵ 規格化可能な複素関数全体。
（2乗可積分）

先週まで：位置の観測 ⟶ （連続）無限次元になって難しい。

☆もっと簡単な観測として

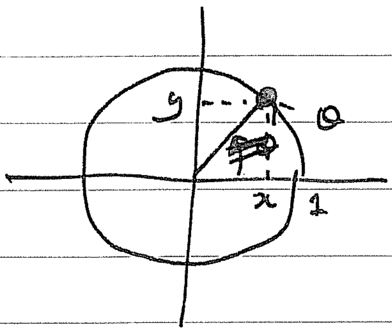
e.g. 電子の電荷の観測 ⟶ 1次元。（電荷の値は唯一）

今週：2次元の例。

☆ Hilbert 空間

[1] 複素関数

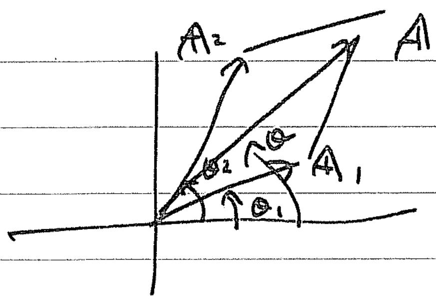
*) $\cos\theta$ を 円運動の一成分 と考えよう



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

* 例

$$\underbrace{A_1\begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{A_2\begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} = \underbrace{A\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$



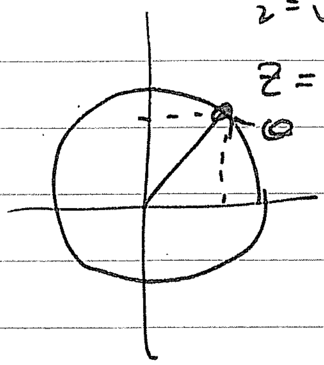
問 A を $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ で表わせ

② 複素関数の実部と考えよう

$i = \sqrt{-1}$

$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ と略記

Eulerの公式



実関数

$\psi(x) = f(x) + i\,g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$

$\psi^* = f - ig$

$|\psi|^2 = \psi^*\psi = f^2 + g^2$

(2) 2乗可積分関数

定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \overset{\text{有限}}{M} < \infty$$

となる $\psi(x)$ を 2乗可積分関数と呼ぶ

注　$0 < M < \infty$ なら 規格化できる

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{M}} \rightarrow \int |\tilde{\psi}|^2 dx = 1$$

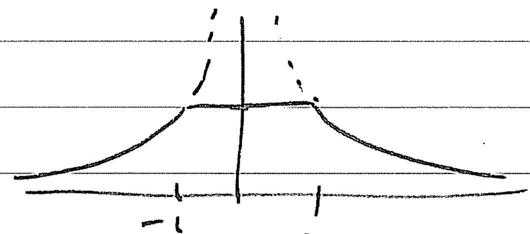
ダメな例

- 1
- $x, x^2, x^3, \cdots$
- $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \cdots$ $\leftarrow$ $\begin{cases} \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty \text{ だが} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \rightarrow \infty \end{cases}$
- $\cos x, \sin x$

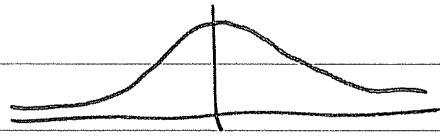
注　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ は $|e^{ix}|^2 = 1$ で 2乗可積ではないが重要

よい例

- 0
- $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ x^{-1} & |x| \geq 1 \end{cases}$



- e^{-x^2}



Gauss 分布
正規

問　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示せ（重積分を学習せよ）

2乗可積分関数全体の集合

$$\mathbb{L}^2 = \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

以上

命題 $\mathbb{L}^2$ はベクトル空間

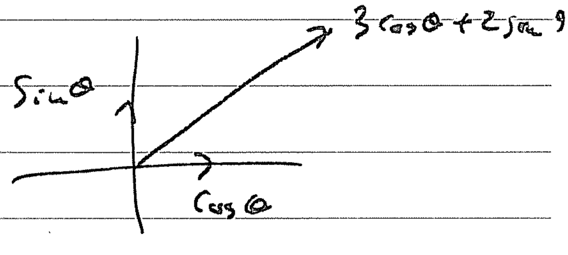
つまり $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{L}^2 \Longrightarrow \psi_1 + \psi_2 \in \mathbb{L}^2$

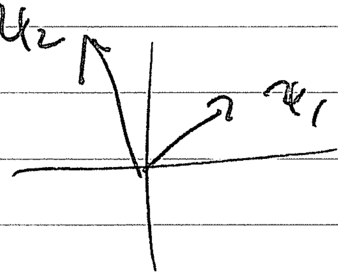
$\alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha \psi_1 \in \mathbb{L}^2$

(証) これを示せ

$$|\psi_1 + \psi_2|^2 = \cancel{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1} \le 2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$$

注 無限次元 : キライ無限次元





3.236

(3) 内積

$\psi, \phi \in L^2$

$$\boxed{\langle \phi | \psi \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^* \psi(x)\, dx}$$

注 $\phi = \psi$ とおくと

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|^2$$

内積の性質

~~Prop~~ $\phi, \psi, \psi_1, \psi_2 \in L^2$ $\alpha \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

(1) $\langle \phi | \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \phi | \psi_1 \rangle + \langle \phi | \psi_2 \rangle$

(2) $\langle \phi | \alpha \psi \rangle = \alpha \langle \phi | \psi \rangle$

(3) $\langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle$

(4) $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$

注 (5) $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff \psi = 0$

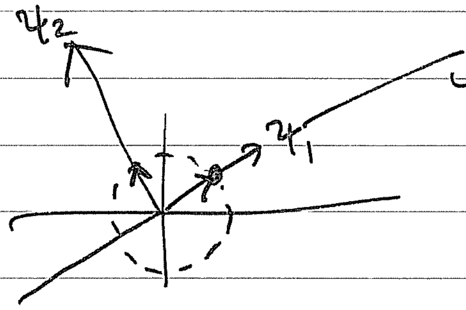
(6) 完備性 $\|\psi_n - \psi_m\| \to 0$ ならば $\lim \psi_n \in L^2$

以上の性質をみたす内積をもつベクトル空間を Hilbert 空間とよぶ

$\{$無限次元 複素 ベクトル空間$\}$

$\{$光子の状態全体の集合$\}$ = Hilbert空間 で長さの違いを無視したもの

~~ただし 長さ0を除いたもの~~



ℓ この線上の（0以外の）ベクトルは同じ状態を与える

✡ Hilbert空間.

二乗可積分関数全体の集合 を次の様に書く.

$$\mathbb{L}^2 \equiv \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

(実数 から 複素数 への写像)

(複素数を係数とする) つまり次

$\boxed{1}$ $\mathbb{L}^2$ は $\mathbb{C}$上 ベクトル空間である事を示せ。

(i) $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{L}^2 \implies \psi_1 + \psi_2 \in \mathbb{L}^2$

(ii) $\psi \in \mathbb{L}^2,\ \alpha \in \mathbb{C} \implies \alpha\psi \in \mathbb{L}^2$

$\boxed{2}$ $\mathbb{L}^2$ は

*は複素共役

$$\langle \Phi | \psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x) \psi(x)\, dx \qquad \Phi, \psi \in \mathbb{L}^2$$

を内積とする Hilbert空間になる事を示したい。そのために次を示せ。

$\left(\phi, \psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{L}^2,\ \alpha \in \mathbb{C} \right)$

(i) $\langle \phi | \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \phi | \psi_1 \rangle + \langle \phi | \psi_2 \rangle$

(ii) $\langle \phi | \alpha \psi \rangle = \alpha \langle \phi | \psi \rangle$

(iii) $\langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle$

(iv) $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示せ。

ヒント: 重積分を予習せよ.

Report. 5週分の問題から 3問以上解いて下さい。 〆切は 1月11日