

移動現象論 講義メモ

山本一良

名古屋大学工学部物理工学科

量子エネルギー工学コース

2000年度版

目次

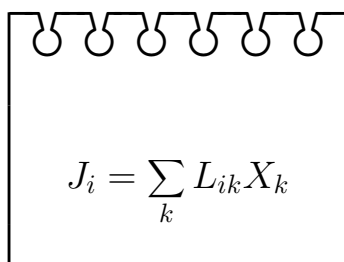
第 1 章 輸送係数	7
1.1 移動速度に関する記述・経験則	7
1.1.1 運動量輸送・粘性係数	8
1.1.2 熱エネルギー輸送・熱伝導係数	9
1.1.3 質量輸送・拡散係数	10
1.1.4 温度勾配による質量輸送・熱拡散係数	11
1.2 Simple Kinetic Theory による輸送係数	12
1.2.1 Maxwell-Boltzmann の速度分布	12
1.2.2 粘性係数	13
1.2.3 熱伝導係数	13
1.2.4 拡散係数	14
1.2.5 熱拡散係数	14
1.3 Chapman-Enskog Theory による輸送係数, I. 準備	15
1.3.1 Boltzmann 方程式	15
1.3.2 局所平衡分布に近い速度分布	16
1.3.3 衝突積分	18
1.3.4 特殊な分子モデルに対する衝突積分	20
1.4 Chapman-Enskog Theory による輸送係数, II. 粘性と熱伝導	21
1.4.1 粘性係数	21
1.4.2 熱伝導係数	23
1.5 Kihara Theory による輸送係数: 拡散と熱拡散	25
1.5.1 2 成分気体	25
1.5.2 拡散係数	26
1.5.3 同位体間の熱拡散	27
1.6 気体の輸送係数まとめ	29
1.6.1 粘性係数	29
1.6.2 熱伝導係数	29
1.6.3 拡散係数	29
1.6.4 混合気体の Wilke の半実験式	30
1.7 液体の輸送係数	30
1.7.1 粘性係数	30
1.7.2 熱伝導係数	31
1.7.3 拡散係数	31
第 2 章 Shell balances	33
2.1 Shell balance とは?	33
2.2 傾斜平板上の流下液膜の流れ	35

2.3	円筒内の流れ，電熱線の熱伝導	36
2.4	同心二重円筒間の流れ	38
2.5	流下液膜への拡散 (強制対流物質移動)	39
第 3 章	変化方程式	41
3.1	変化方程式 とは？	41
3.1.1	量 c に関する 3 種類の時間微分	41
3.2	連続の式	42
3.3	運動方程式	43
3.4	力学的エネルギー方程式	45
3.5	エネルギー方程式	46
3.6	多成分系での変化方程式	49
3.6.1	2 成分混合物連続の式	49
3.6.2	連続の式の濃度勾配による表現	50
3.6.3	Flux 表記による多成分変化方程式	51
3.6.4	輸送係数表記による多成分 flux	51
3.7	自然対流の運動方程式	53
3.8	多孔性固体中の流れ方程式	53
3.9	二相流の変化方程式	55
3.10	化学反応速度論	56
第 4 章	変化方程式の次元解析	57
4.1	連続・運動方程式	57
4.2	エネルギー方程式	58
4.3	2 成分・等温拡散方程式	60
4.4	無次元グループの意味	61
第 5 章	乱流	63
5.1	流れの安定性	63
5.2	乱流の運動方程式	65
5.3	乱流のエネルギー方程式	66
5.4	乱流の質量輸送方程式	67
5.5	乱流の発生・構造	68
第 6 章	ポテンシャル流	69
6.1	渦無し流	69
6.2	ポテンシャル流	70
6.3	渦	72
第 7 章	境界層理論	73
7.1	遅い粘性流の近似解法	73
7.2	境界層方程式	75
7.3	境界層の平均値方程式	76
7.4	内部境界層	78

第 8 章	管路流の損失と物体の抵抗	79
8.1	摩擦係数と抵抗係数	79
8.2	管内流れの摩擦係数	80
8.3	断面積変化, 外力のある管内流れの損失係数	81
8.4	球の周りの流れの摩擦係数	82
第 9 章	固液境界での熱流移動	83
9.1	熱伝達係数	83
9.2	管中強制対流の熱伝達係数	84
9.3	流れの中の物体からの強制対流熱伝達	86
9.4	自然対流熱伝達	86
付録 A	熱拡散塔研究	87
A.1	はじめに—沿革—	88
A.1.1	助走時代— 1974~1981 —	88
A.1.2	“同位体分離実験装置” 設置以後— 1981~1990 —	88
A.1.3	分離性能解析の高度化— 1991~ —(1993 年 9 月追加)	89
A.2	熱拡散同位体分離実験装置	89
A.3	2 次元詳細分離性能解析	93
A.3.1	流れ場解析と濃度分布解析	93
A.3.2	H ₂ -HT 分子間の α_T 概略評価	94
A.3.3	計算機性能への要求事項	94
A.4	1 次元簡単化分離性能解析	95
A.5	深冷壁熱拡散塔	97
A.6	今後の課題	98
A.7	同位体分離熱拡散塔関連発表論文	98

第1章 輸送係数

1.1 移動速度に関する記述・経験則



$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k$$

J_i : flux (フラックス): 単位時間に,
単位面積を通過してゆく移動量.

X_k : (熱力学的) ^{driving force} 推進力・駆動力

L_{ik} : 輸送係数.

$$L_{ik} = L_{ki} : \text{Onsager の } \overset{\text{Reciprocal Theorem}}{\text{相反定理}}.$$

この講義では, 主に $L_{ik} = \delta_{ik} \cdot L_k$ の場合を扱う.

- Newton の粘性法則

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y}$$

ν : 動粘性係数. : (μ/ρ)

τ_{yx} : せん断応力 (*shear stress*)

: 速度成分 v_x で, x 方向に移動する流体によって
 y 方向に移動する運動量流束.

- Fourier の熱伝導法則

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

k : 熱伝導係数

\mathbf{q} : 熱フラックス: 温度勾配に比例.

- Fick の拡散法則

$$\mathbf{J}_i^* = -D_i \nabla c_i$$

D_i : 拡散係数

\mathbf{J}_i^* : 化学種 i のモル・フラックス: 濃度勾配に比例.

1.1.1 運動量輸送・粘性係数

Transport Phenomena
p.4, Fig.1.1-1

面積 A の 2 平板 (間隔 Y), 相対速度 V で移動.
但し, 層流 (laminar flow)
⇒ この時に板にかかる力 F

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

⇒

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} && : \text{速度勾配} \\ &= -\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} && : \text{運動量勾配} \end{aligned}$$

- v_x : (位置 y における) x 方向速度
- τ_{yx} : (位置 y において) x 方向にかかるせん断応力 .
on a fluid surface of constant y by the fluid in the region of lesser y
- μ : 粘性係数

≪ 式の意味 ≫
 x 方向の運動量が, 流体を通して $\Rightarrow \tau_{yx}$ は, x 方向運動量の y 方向粘性 $flux$.
 y 方向に運ばれている.

単位面積あたりのせん断力が,
“局所的な速度勾配にマイナスをつけた値” に比例する流体.
(上の式参照)

⇒

Newton 流体 .
c.f. 非 Newton 流体.
〜 レオロジ
Transport Phenomena,
p.10~15.

≪ 単位 ≫

$$[\tau_{yx}]^{unit} \equiv \underbrace{[F/A]}_{[N/m^2]} : \text{単位面積あたりの力} \equiv \underbrace{[Pa]}_{[Pa]:\text{パスカル}}^{unit} \quad \text{[圧力]}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{N/m^2}_{\text{運動量 } flux} = \underbrace{N \cdot s}_{\text{運動量}} / \underbrace{(m^2 \cdot s)}_{\text{単位面積} \cdot \text{単位時間}}$$

$$\begin{aligned} [N] &= [kg \cdot m/s^2] & [Pa] &= [kg/(m \cdot s^2)] \\ [v_x] &= [m/s] & [\mu] &= [Pa \cdot s] & [\rho v_x] &= [kg/(m^2 \cdot s)] \\ [\rho] &= [kg/m^3] & [\nu] &= [m^2/s] & &= [N \cdot s/m^2] \end{aligned}$$

1.1.2 熱エネルギー輸送・熱伝導係数

Transport Phenomena
p.244, Fig.8.1-1

面積 A の 2 平板 (間隔 Y), 温度差 $\Delta T = T_1 - T_0$.
但し, 対流や輻射の影響を無くした状態で.
⇒ この時の熱流束 (heat flux) Q /(面積).

$$\frac{Q}{A} = k \frac{\Delta T}{Y} \Rightarrow$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad : \text{温度勾配}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad : \text{三次元表示}$$

\mathbf{q} : 熱流束ベクトル. (q_x, q_y, q_z).

∇T : 温度勾配. ($\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z$)

k : 熱伝導係数

Q : 熱流

Fourier's law of heat conduction

≪ 式の意味 ≫

伝導による熱流束 (の大きさ) は, 等方的 (isotropic) な媒質では, 熱
温度勾配に比例する. ⇒ は伝導によって, 最大温度勾配方
向へ流れる.

≪ 単位 ≫

$$[q] = [\text{W}/\text{m}^2] \quad [T] = [\text{K}] \quad [k] = [\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$$

1.1.3 質量輸送・拡散係数

Transport Phenomena

p.498-499, Tables 16.1-1~3
p.500, Fig.16.1-1

質量平均流束に対し

$$j_i = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) : \text{質量流束}$$

$$J_i = c_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) : \text{モル流束}$$

モル平均流束に対し

$$j_i^* = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^*) : \text{質量流束}$$

$$J_i^* = c_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^*) : \text{モル流束}$$

分子種 A が, A, B の 2 成分混合物のバルクの流れと相対的に移動する量.

但し, 基準 (質量平均速度, モル平均速度, 静止座標) をはっきりする.

⇒ この時の質量流束 (mass flux), モル流束 (molar flux).

⇒

$$j_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A : \text{質量分率勾配}$$

$$= -(c^2/\rho) M_A M_B D_{AB} \nabla x_A : \text{モル分率勾配}$$

$$J_A^* = -c D_{AB} \nabla x_A : \text{モル分率勾配}$$

$$= -(\rho^2/c M_A M_B) D_{AB} \nabla \omega_A : \text{質量分率勾配}$$

$$\mathbf{v} : \text{質量平均速度 } (1/\rho)(\rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B) = \omega_A \mathbf{v}_A + \omega_B \mathbf{v}_B.$$

$$\mathbf{v}^* : \text{モル平均速度 } (1/c)(c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B) = x_A \mathbf{v}_A + x_B \mathbf{v}_B.$$

$$\mathbf{v}_A : \text{静止座標系に対する } A \text{ 成分速度}$$

$$D_{AB} : \text{拡散係数}$$

Fick's first law of diffusion

《 式の意味 》

拡散による成分モル流束 (の大きさ) は, 成分モル濃度勾配に比例する.
 混合物のうちのある成分は, 拡散によって, 最大成分モル濃度勾配方向へ流れる.

《 単位 》

$$[J_A^*] = [\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$$

$$[c] = [\text{mol}/\text{m}^3]$$

$$[D_{AB}] = [\text{m}^2/\text{s}]$$

1.1.4 温度勾配による質量輸送・熱拡散係数

Transport Phenomena
p.574-575, Fig.18.5-2 p.568,
Footnote, p.569

A, B の 2 成分混合物を温度勾配下におくと, 一般に (条件によっては逆の場合もある), 重い分子種 A が低温側に, 軽い分子種 B が高温側に移動する現象を熱拡散と呼ぶ.

⇒ 熱拡散現象で生じた濃度勾配によって, 通常濃度拡散現象が起こり, これがつりあったところで, 定常状態になる.

熱拡散流束:
 $j_A^T = -D_A^T \nabla \ln T$
質量拡散流束:
 $j_A^x = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$

$$\begin{aligned} j_A^T &= -D_A^T \nabla \ln T && : \text{対数温度勾配} \\ &= -(c^2/\rho) M_A M_B D_{AB} \frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz} && : \text{温度勾配} \\ j_A^x &= -\rho D_{AB} \nabla \omega_A \\ &= -(c^2/\rho) M_A M_B D_{AB} \frac{dx_A}{dz} && : \text{質量分率勾配} \\ &&& : \text{モル分率勾配} \end{aligned}$$

k_T : 熱拡散比 (thermal diffusion ratio) $D^T \equiv k_T D_{AB}^x$.

α_T : 熱拡散ファクタ (thermal diffusion factor) $k_T \equiv \alpha_T x_A x_B$.

≪ 式の釣合 ≫

$$0 = j_A^T + j_A^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_A}{dz} = -\frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz}$$

≪ 式を解くと (suffix A は, 途中から省略) ≫

$$\frac{1}{x_A(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} = -\alpha_T \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}, \quad \boxed{\frac{x_2}{1-x_2} / \frac{x_1}{1-x_1} = (T_2/T_1)^{\alpha_T}}$$

≪ 単位 ≫

$$[k_T] = [-] \quad [\alpha_T] = [-] \quad [x_A] = [-]$$

1.2 Simple Kinetic Theory による輸送係数

参考書

- Maitland, G.C., Rigby, M., Smith, E.B., Wakeham, W.A.: "Intermolecular Forces", Clarendon Press, Oxford (1981).
- Chapman, S., Cowling, T.G.: "The Mathematical Theory of Non-uniform Gases", (3-rd ed.) Cambridge Univ. Press (1970). [1-st ed. (1939), 2-nd ed. (1951).]
- Hirschfelder, J.O., Curtiss, C.F., Bird, R.B.: "Molecular Theory of Gases and Liquids", Wiley (1954).
- 市村浩: "熱学演習 統計力学", (改訂版) 基礎物理学選書 19, 裳華房 (1993).

1.2.1 Maxwell-Boltzmann の速度分布

簡単のために, 気体分子は直径 d , 質量 m の弾性剛体球 (elastic hard sphere) とする.

Maxwell-Boltzmann の速度分布則

$$dn_v = 4\pi n (m/2\pi kT)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv$$

但し, k : Boltzmann constant.

n : 分子総数 (単位体積当り).

dn_v : 速度 v と $v + dv$ の間の分子数.

平均速度

$$\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$$

平均自由行程 (mean free path)

気体分子が次々に衝突する時, 衝突する間に移動する距離.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

(mean free path) = (単位時間当りの移動距離) / (単位時間当りの衝突数)

(単位時間当りの移動距離) = \bar{v} , (単位時間当りの衝突数) = (単位時間当り, 半径 d の板が sweep する体積の中にある粒子数) = $(\pi d^2 \bar{v} n)$, $\rightarrow \lambda = \bar{v} / \pi d^2 \bar{v} n$.

$\sqrt{2}$ の係数は?

上の議論は, 一つの粒子だけが移動しているときには正しいが, 全ての粒子が動いている時には, 衝突の仕方いろいろで, 正面衝突 (相対速度 $2\bar{v}$) から, 殆ど同方向で, かするだけ (相対速度 ~ 0) までである. 衝突相対速度の平均は, $\sqrt{2}\bar{v}$. 従って, 上の式で $\bar{v} \rightarrow \sqrt{2}\bar{v}$ とすればよい.

1.2.2 粘性係数

Transport Phenomena,
p.20, Fig.1.4-1

速度 x 方向運動量

$(y + \lambda)$ 平面 : $v_x + (\partial v_x / \partial y)\lambda$ $m[v_x + (\partial v_x / \partial y)\lambda]$
 $(y - \lambda)$ 平面 : $v_x - (\partial v_x / \partial y)\lambda$ $m[v_x - (\partial v_x / \partial y)\lambda]$

$(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する分子数: $n\bar{v}_x/6$,
 $(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する運動量: $(nm/6)\bar{v}_x[v_x + (\partial v_x / \partial y)\lambda]$,
 $(y - \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する運動量: $(nm/6)\bar{v}_x[v_x - (\partial v_x / \partial y)\lambda]$,

単位時間 } 当りの運動量の正味の輸送:
 単位面積 }
 F : frictional force.

$$F = -\frac{1}{6}nm\bar{v}_x \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\lambda \right] + \frac{1}{6}nm\bar{v}_x \left[v_x - \frac{\partial v_x}{\partial y}\lambda \right]$$

$$= -\frac{1}{3}nm\bar{v}_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \lambda$$

従って

$$\mu = (1/3)nm\bar{v}_x\lambda$$

$$= (1/3)\rho\bar{v}_x\lambda$$

$$= \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{mkT}}{d^2}$$

← 密度によらない.
 theoretically
 by Maxwell(1860).

1.2.3 熱伝導係数

Transport Phenomena,
p.254, Fig.8.3-1

運動エネルギー

$(y + \lambda)$ 平面 : $E + (\partial E / \partial y)\lambda$
 $(y - \lambda)$ 平面 : $E - (\partial E / \partial y)\lambda$

$(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する分子数: $n\bar{v}_x/6$,
 $(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する運動エネルギー: $(n/6)\bar{v}_x[E + (\partial E / \partial y)\lambda]$,
 $(y - \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する運動エネルギー: $(n/6)\bar{v}_x[E - (\partial E / \partial y)\lambda]$,

単位時間 } 当りの運動エネルギーの正味の輸送:
 単位面積 }
 $(dE/dy) = (dE/dT)(dT/dy) = c_v(dT/dy)$

$$q_y = -\frac{1}{6}n\bar{v}_x \left[E + \frac{\partial E}{\partial y}\lambda \right] + \frac{1}{6}n\bar{v}_x \left[E - \frac{\partial E}{\partial y}\lambda \right]$$

$$= -\frac{1}{3}n\bar{v}_x \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right) \lambda$$

$$= -\frac{1}{3}nc_v\bar{v}_x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \lambda$$

従って

$$k = (1/3)nc_v\bar{v}_x\lambda$$

$$= (1/3m)\rho c_v\bar{v}_x\lambda$$

$$= \frac{2c_v}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{kT/m}}{d^2}$$

← 密度によらない.
 theoretically
 by Maxwell(1860).

c_v は, 分子一個当りの熱容量. 単原子分子なら $dE/dT = d((3/2)kT)/dT = (3/2)k$. この時,
 $k = 1/(\pi^{3/2}d^2)\sqrt{k^3T/m}$. 更に, $k = \mu c_v/m = \mu C_v/M = \mu \hat{C}_v$

1.2.4 拡散係数

Transport Phenomena,
p.509, Fig.16.4-1

質量

$$(y + \lambda) \text{ 平面} : (nm) + (\partial(nm)/\partial y)\lambda$$

$$(y - \lambda) \text{ 平面} : (nm) - (\partial(nm)/\partial y)\lambda$$

$(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する分子数: $n\bar{v}_x/6$,

$(y + \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する質量: $(1/6)\bar{v}_x[(nm) + (\partial(nm)/\partial y)\lambda]$,

$(y - \lambda)$ 平面から y 平面へ移動する質量: $(1/6)\bar{v}_x[(nm) - (\partial(nm)/\partial y)\lambda]$,

単位時間 } 当りの質量の正味の輸送:
単位面積 }

$$\begin{aligned} j_A &= -\frac{1}{6}\bar{v}_x \left[nm + \frac{\partial(nm)}{\partial y}\lambda \right] + \frac{1}{6}\bar{v}_x \left[nm - \frac{\partial(nm)}{\partial y}\lambda \right] \\ &= -\frac{1}{3}\bar{v}_x \left(\frac{\partial(nm)}{\partial y} \right) \lambda \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} D_{AA} &= (1/3)\bar{v}_x\lambda \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}\pi d^2 n} \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k^3}{\pi^3 m_A}} \frac{T^{3/2}}{pd_A^2} \end{aligned}$$

← 圧力に反比例。

1.2.5 熱拡散係数

E.A.Mason,R.J.Munn,F.J.Smith:
Thermal diffusion in Gases,
Advances in Atomic & Molecular
Physics,
Vol.2, pp.33-91(1962).

“simple” 理論で最も成功した
例: by Fürth(1942).

Grew & Ibbs: *Thermal dif-*
fusion in Gases, Cambridge
(1952).p.12-15,p.118-120.

It is common practice in reviewing a subject to begin with a brief statement of the nature of the phenomena involved and their physical interpretation. This is not possible for thermal diffusion. Although it is easy to describe thermal diffusion phenomenologically, no one has succeeded in giving a “simple” physical explanation of thermal diffusion; the elementary theories proposed have been either incorrect in essential points or else almost as complicated as the rigorous Chapman-Enskog theory. The reason is that thermal diffusion is a secondary effect in the sense that its very existence depends on the *nature* of the molecular collisions, whereas the existence of the other transport properties, viscosity, heat conductivity, and ordinary diffusion, depends on the *occurrence* of collisions and only secondarily on their nature(Chapman,1962).

1.3 Chapman-Enskog Theory による輸送係数, I. 準備

参考書

前節の参考書に加えて

- K.E.Grew, T.L.Ibbs: "Thermal Diffusion in Gases", Cambridge(1952).
- 久保亮五 他: "(大学演習) 熱学・統計力学", 第 10 章, 裳華房 (1961)
- 木原太郎: "分子間力", 岩波全書 (1976).
- 橋爪夏樹: "熱・統計力学入門", 第 3 章 気体分子運動論, 岩波全書 (1981).
- 村上昭年 他: "工学者のための統計熱力学", 第 2 章, 朝倉書店 (1984).
- L.E.Reichl: "Modern Course in Statistical Physics", Chap.13(1980), 丸善 (1984).

1.3.1 Boltzmann 方程式

Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

- $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$: 一体分布関数, \mathbf{p} : 運動量.
- $\mathbf{v} \cdot (\partial f / \partial \mathbf{r}) \equiv v_x(\partial f / \partial x) + v_y(\partial f / \partial y) + v_z(\partial f / \partial z)$,
- \mathbf{F} : 粒子に働く外力.
- $(\partial f / \partial t)_{coll}$: 衝突による f の単位時間当りの変化率.

二体衝突散乱角

$$\chi(b, g) = \pi - 2b \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\sqrt{1 - (\varphi(r)/\frac{1}{2}m^*g^2) - (b^2/r^2)}},$$

$$\sqrt{1 - (\varphi(r_m)/\frac{1}{2}m^*g^2) - (b^2/r_m^2)} = 0$$

- b : 衝突径数 (*impact parameter*).
- g : 相対速度絶対値.
- $\varphi(r)$: 二体分子間ポテンシャル.
- r_m : 粒子と散乱中心との最短距離.
- $m^* \equiv m_i m_j / (m_i + m_j)$: 換算質量.
- χ : chi(カイ)

衝突項の導出

衝突

$(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)$
 によって, 運動量 \mathbf{p} を持つ分子数は減少. 逆に, 衝突 $(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ によって, 運動量 \mathbf{p} を持つ分子数は増加.

減少項 : $d\mathbf{r}d\mathbf{p} \int_0^\infty d\mathbf{p}_1 \int_0^\infty bdb \int_0^{2\pi} d\phi g f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t),$

増加項 : $d\mathbf{r}d\mathbf{p} \int_0^\infty d\mathbf{p}_1 \int_0^\infty bdb \int_0^{2\pi} d\phi g f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_1, t),$

$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int_0^\infty d\mathbf{p}_1 \int_0^\infty bdb \int_0^{2\pi} d\phi g \{ f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_1, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \}$

略記法 : $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int_0^\infty d\mathbf{p}_1 \int_0^\infty 2\pi bdb g \{ f' f'_1 - f f_1 \} \equiv -nJ(f f')$

一様平衡分布

f_E は、速度のみの関数で、場所と時間にはよらない。そこで、衝突項がゼロ $\rightarrow f'_E(\mathbf{v})f'_E(\mathbf{v}_1) - f_E(\mathbf{v})f_E(\mathbf{v}_1) = 0$.
 $\ln f_E(\mathbf{v})$ は、衝突不変量 (全分子数, 運動量の 3 成分, 運動エネルギー) の線形和.

 \Rightarrow

Maxwell-Boltzmann 分布

$$f_E(\mathbf{v}) = n(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mC^2/2kT),$$

$\mathbf{C} \equiv \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$: 特有速度.

$$mC^2/2 = (3/2)kT : \text{分子の熱エネルギー.}$$

局所平衡分布

f_L は、場所と時間の関数ではあるが、その依存性は n, \mathbf{v}, T を通して入っている。この時も同様に、衝突項がゼロ $\rightarrow f'_L(\mathbf{v})f'_L(\mathbf{v}_1) - f_L(\mathbf{v})f_L(\mathbf{v}_1) = 0$.
 $\ln f_L(\mathbf{v})$ は、衝突不変量 (全分子数, 運動量の 3 成分, 運動エネルギー) の線形和.

 \Rightarrow

局所平衡分布式

$$f_L(\mathbf{v}) = n(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mC^2/2kT),$$

但し, $n(\mathbf{r}, t), \mathbf{C}(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t)$.

そこで, 移流項 $\mathbf{v} \cdot \partial f / \partial \mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \partial f / \partial \mathbf{p}$ はゼロでない。また, 定常でもない。 $\partial f_L / \partial t \neq 0$.

1.3.2 局所平衡分布に近い速度分布

不可逆過程が起こっている時には、一体分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ の形は一様平衡分布 $f_E(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ から外れていなければならない。しかし、局所平衡分布 $f_L(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ からは、それほど外れない。そこで、

$$f = f_L(1 + \Phi)$$

$$\left. \begin{aligned} \int f_L d\mathbf{v} &= \int f d\mathbf{v} = n, \\ \frac{1}{n} \int f_L \mathbf{v} d\mathbf{v} &= \frac{1}{n} \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \\ \frac{1}{n} \int f_L \frac{1}{2} C^2 d\mathbf{v} &= \frac{1}{n} \int f \frac{1}{2} C^2 d\mathbf{v} = \frac{3}{2} kT, \end{aligned} \right\}$$

局所平衡分布の満足すべき式

$$\left. \begin{aligned} \int f_L \Phi d\mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{n} \int f_L \Phi \mathbf{v} d\mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{n} \int f_L \frac{1}{2} \Phi C^2 d\mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \Phi \text{ の満足すべき式}$$

衝突項の Φ 表現 分子速度 \mathbf{v} の任意関数 ϕ に作用する 1 次演算子 Z^*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} &= f^{(0)} \int_0^\infty d\mathbf{v}_1 \int_0^\infty 2\pi b db g f_1^{(0)} \{\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1\} \\ &\equiv -n f^{(0)} Z^* \Phi, \end{aligned}$$

$$\text{但し, } f = f_L(1 + \Phi) \equiv f^{(0)}(1 + \Phi).$$

特有速度から作られるテンソル

$$\frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3}C^2\mathbf{1}) \times \left(\frac{mC^2}{2kT} \text{の任意の関数}\right)$$

の各成分は, Φ の条件を満足.

左の任意関数として, 水素原子の波動関数の動径分布に用いられる Laguerre の多項式 $L_n^{(\alpha)}$ を採用し, $mC^2/2kT$ のべきで展開する. 気体分子運動論では, Sonine の多項式 $S_m^{(n)} \equiv L_n^{(m)}$ と呼ばれる.

Sonine Polynomial

$$\begin{aligned} S_m^{(n)}(x) &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (n+m)!}{(m+r)!(n-r)!r!} x^r, \\ S_m^{(0)} &= 1, \\ S_m^{(1)} &= m+1-x, \\ S_m^{(2)} &= (m+1)(m+2)/2 - (m+2)x + x^2/2. \\ \int_0^\infty e^{-x} S_m^{(p)}(x) S_m^{(q)}(x) x^m dx &= \frac{\Gamma(m+p+1)}{p!} \delta_{pq}. \end{aligned}$$

分子速度の関数内積

$$(A, B) \equiv \frac{1}{n} \int_0^\infty f^{(0)} A \cdot B d\mathbf{v},$$

$$(A, Z^* B) = (B, Z^* A),$$

$$(A, Z^* B) = (Z^* A, B),$$

$$(A, Z^* A) \geq 0 \quad (Z \text{ は正値対称})$$

正値 (positive definite)

A, B : vector or tensor

ψ : psi(プサイ), φ : phi(ファイ)

伝統的に, $m = 3/2, 5/2$ が用いられる. ここで,

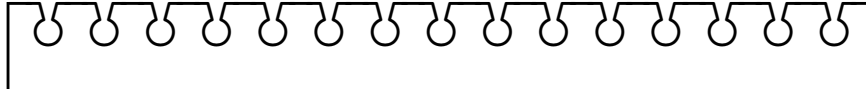
$$\begin{aligned} \psi^{(r)} &\equiv \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \mathbf{C} S_{3/2}^{(r)} \left(\frac{mC^2}{2kT}\right), \\ \varphi^{(r)} &\equiv \frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3}C^2\mathbf{1}) S_{5/2}^{(r)} \left(\frac{mC^2}{2kT}\right). \end{aligned}$$

を定義すると, 分子速度の直交関数系を作れる.

$$(\psi^{(r)}, \psi^{(s)}) = \frac{2}{\sqrt{\pi r!}} \Gamma\left(r + \frac{5}{2}\right) \delta_{rs}.$$

$$(\varphi^{(r)}, \varphi^{(s)}) = \frac{4}{3\sqrt{\pi r!}} \Gamma\left(r + \frac{7}{2}\right) \delta_{rs}.$$

1.3.3 衝突積分



$$\Omega^{(l,r)} = \left(\frac{kT}{2\pi m^*} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp(-g^{*2}) g^{*2r+3} \int (1 - \cos^l \chi) 2\pi b db dg^*$$

$$g^* \equiv \left(\frac{m^*}{2kT} \right)^{1/2} g,$$

$$l = 1, 2, \dots;$$

$$r = l, l+1, \dots.$$

m^* :換算質量.

Ω 積分はどのように出て来るか

$$\varphi^{(0)} \equiv \frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3}C^2\mathbf{1}).$$

の内積 $(\varphi^{(0)}, Z * \varphi^{(0)})$;

$$\psi^{(1)} \equiv \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \mathbf{C} \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right).$$

の内積 $(\psi^{(1)}, Z * \psi^{(1)})$;

は, 共に $4\Omega^{(2,2)}$ になる.

テンソル同士のスカラー積 $(\varphi^{(0)}, Z * \varphi^{(0)}) =$

$$\frac{1}{4n^2} \int \int \int f^{(0)} f_1^{(0)} \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 \times (\mathbf{C}\mathbf{C} + \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}'\mathbf{C}' - \mathbf{C}'_1\mathbf{C}'_1)^2 g(2\pi b db) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

ベクトル同士のスカラー積 $(\psi^{(1)}, Z * \psi^{(1)}) =$

$$\frac{1}{4n^2} \int \int \int f^{(0)} f_1^{(0)} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{5/2} \times (C^2\mathbf{C} + C_1^2\mathbf{C}_1 - C'^2\mathbf{C}' - C_1'^2\mathbf{C}'_1)^2 g(2\pi b db) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

計算のヒント

重心速度と相対速度

$$\mathbf{G} \equiv (\mathbf{C} + \mathbf{C}_1)/2, : \text{重心速度.}$$

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{C} - \mathbf{C}_1, : \text{相対速度.}$$

$$\mathbf{g}' \equiv \mathbf{C}' - \mathbf{C}'_1, : \text{相対速度.}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}', |\mathbf{g}| = |\mathbf{g}'|,$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} + \mathbf{g}/2, \mathbf{C}_1 = \mathbf{G} - \mathbf{g}/2,$$

速度ベクトルのテンソル積 etc.

Transport Phenomena, p.729.

$$\mathbf{C}\mathbf{C} : \mathbf{C}\mathbf{C} = C^4, \mathbf{1} : \mathbf{C}\mathbf{C} = C^2,$$

$$\mathbf{1} : \mathbf{1} = 3,$$

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}' = g^2 \cos \chi, \mathbf{g}\mathbf{g} : \mathbf{g}\mathbf{g} = g^4,$$

$$\mathbf{g}\mathbf{g}' : \mathbf{g}\mathbf{g}' = (gg' \cos \chi)^2 = g^4 \cos^2 \chi,$$

$$(\mathbf{g}\mathbf{g} - \mathbf{g}'\mathbf{g}') : (\mathbf{g}\mathbf{g} - \mathbf{g}'\mathbf{g}') = 2g^4(1 - \cos^2 \chi),$$

内積の変形

$$\begin{aligned} (A, Z * B) &= \frac{1}{n^2} \int \int \int f^{(0)} f_1^{(0)} A \cdot \\ &\quad \times (B + B_1 - B' - B'_1) g(2\pi b db) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 \\ &= \frac{1}{4n^2} \int \int \int f^{(0)} f_1^{(0)} (A + A_1 - A' - A'_1) \\ &\quad \times (B + B_1 - B' - B'_1) g(2\pi b db) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1, \end{aligned}$$

速度ベクトルの dyadic 積 (テンソル)

Transport Phenomena, p.726.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{C} + \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}'\mathbf{C}' - \mathbf{C}'_1\mathbf{C}'_1 \\ = (\mathbf{g}\mathbf{g} - \mathbf{g}'\mathbf{g}')/2. \end{aligned}$$

積分・変数変換

$$d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v} = d\mathbf{C}_1 d\mathbf{C} = d\mathbf{G} d\mathbf{g},$$

$$C^2 + C_1^2 = 2(G^2 + g^2/4).$$

球・極座標の角度積分 $F(C)$: scalar function.

$$\int F(C) d\mathbf{C} = 4\pi \int_0^\infty F(C) C^2 dC,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha C^2} C^r dC = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{(r-1)!!}{2^{r/2}} \alpha^{-(r+1)/2}, & r: \text{even}, r > 0 \\ \frac{1}{2} \alpha^{-(r+1)/2} (\frac{r-1}{2})!, & r: \text{odd}, r > 0 \end{cases}$$

計算式を確認すること!

$$\int \cdot d\mathbf{C} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \cdot C^2 dC \sin \theta d\theta d\phi$$

参考: 速度ベクトルの成分を含んだ積分

$$\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3), \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\int C_1^2 F(C) d\mathbf{C} = \int C_2^2 F(C) d\mathbf{C} = \int C_3^2 F(C) d\mathbf{C} = \frac{1}{3} \int C^2 F(C) d\mathbf{C}.$$

$$\int C_1^4 F(C) d\mathbf{C} = \frac{1}{5} \int C^4 F(C) d\mathbf{C}. \quad \int C_1^2 C_2^2 F(C) d\mathbf{C} = \frac{1}{15} \int C^4 F(C) d\mathbf{C}.$$

$$\int F(C) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) C_1 d\mathbf{C} = \frac{A_1}{3} \int F(C) C^2 d\mathbf{C}.$$

内積の衝突積分による表現

$$\begin{aligned} (\varphi^{(0)}, Z * \varphi^{(0)}) &= 4\Omega^{(2,2)} \\ (\varphi^{(1)}, Z * \varphi^{(0)}) &= 7\Omega^{(2,2)} - 2\Omega^{(2,3)} \\ (\varphi^{(1)}, Z * \varphi^{(1)}) &= (301/12)\Omega^{(2,2)} - 7\Omega^{(2,3)} + \Omega^{(2,4)} \\ (\psi^{(0)}, Z * \psi^{(0)}) &= 0, \text{ because } Z * \psi^{(0)} \equiv 0. \\ (\psi^{(1)}, Z * \psi^{(1)}) &= 4\Omega^{(2,2)} \\ (\psi^{(2)}, Z * \psi^{(1)}) &= 7\Omega^{(2,2)} - 2\Omega^{(2,3)} \\ (\psi^{(2)}, Z * \psi^{(2)}) &= (77/4)\Omega^{(2,2)} - 7\Omega^{(2,3)} + \Omega^{(2,4)} \end{aligned}$$

右の近似式に因れば,

$$\begin{aligned} (\varphi^{(1)}, Z * \varphi^{(0)}) &= (\psi^{(2)}, Z * \psi^{(1)}) \simeq 0, \\ (\varphi^{(1)}, Z * \varphi^{(1)}) &\simeq (49/3)\Omega^{(2,2)}, \\ (\psi^{(2)}, Z * \psi^{(2)}) &\simeq (21/2)\Omega^{(2,2)}. \end{aligned}$$

衝突積分漸化式

$$T \frac{d}{dT} \Omega^{(l,r)} = \Omega^{(l,r+1)} - (r + \frac{3}{2}) \Omega^{(l,r)}.$$

実際に, 定義に戻って確認すること.

Ω 積分の温度依存性が小さければ, 左辺はゼロとみなせて, 高次の Ω 積分の近似式が求められる.

$$\begin{aligned} \Omega^{(1,2)} &\simeq \frac{5}{2} \Omega^{(1,1)}, \\ \Omega^{(1,3)} &\simeq \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \Omega^{(1,1)}, \\ \Omega^{(2,3)} &\simeq \frac{7}{2} \Omega^{(2,2)}, \\ \Omega^{(2,4)} &\simeq \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \Omega^{(2,2)}, \end{aligned}$$

1.3.4 特殊な分子モデルに対する衝突積分

剛体球モデル

$$U(r) = \begin{cases} \infty & (r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

$$\Omega^{(l,r)} = \frac{r_0^2}{4} \left[2 - \frac{1 + (-1)^l}{l+1} \right] (r+1)! \left(\frac{\pi kT}{2m^*} \right)^{1/2}$$

$$\chi = \pi - 2 \sin^{-1} \frac{b}{r_0},$$

$$\cos \chi = \frac{2b^2}{r_0^2} - 1,$$

$$\int_0^\infty (1 - \cos^l \chi) 2\pi b db \\ = \pi r_0^2 \left[1 - \frac{1 + (-1)^l}{2l+2} \right].$$

Inverse Power-law モデル

$$U(r) = \kappa_{12}/(\nu-1)r^{\nu-1}, \quad F(r) = \kappa_{12}/r^\nu.$$

$$\Omega^{(l,r)} = \frac{1}{2} A_l(\nu) \left(\frac{\kappa_{12}}{2kT} \right)^{2/(\nu-1)} \left(\frac{\pi kT}{2m^*} \right)^{1/2} \\ \times \Gamma \left(r + 2 - \frac{2}{\nu-1} \right).$$

$$\chi = \pi -$$

$$2 \int_0^{b/R} \left\{ 1 - v^2 - \frac{2}{\nu-1} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\nu-1} \right\}^{\frac{-1}{2}} dv,$$

b/R : unique positive solution of

$$1 - v^2 - \frac{2}{\nu-1} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\nu-1} = 0.$$

$$A_l(\nu) \equiv \int_0^\infty (1 - \cos^l \chi) v_0 dv_0.$$

Lennard-Jones (12-6) Potential モデル

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right].$$

$$\Omega^{(l,r)} = 2 \left(\frac{U_0 r_0^{12}}{2kT} \right)^{1/6} \left(\frac{\pi kT}{2m^*} \right)^{1/2} F_r^l(\zeta),$$

$$\text{where } \zeta \equiv 2U_0/kT.$$

Lennard-Jones potential (*Transport Phenomena*, p.22) は、低温の極限で逆6乗の引力ポテンシャルに、高温の極限で逆12乗の斥力ポテンシャルに一致。関数 F_r^l は、数値積分で数表化されている。

剛体球モデルからのずれとして表現した衝突積分

$$\Omega^{(l,s)*} \equiv \frac{[\Omega^{(l,s)}]}{[\Omega^{(l,s)}]_{rig.sph}} \equiv \frac{\Omega^{(l,s)} \sqrt{2\pi m^*/kT}}{\frac{1}{2}(s+1)! \left[1 - \frac{1+(-1)^l}{1+l} \right] \pi r_0^2}.$$

$$\mathbf{A}^* \equiv \Omega^{(2,2)*}/\Omega^{(1,1)*}, \quad \mathbf{B}^* \equiv \{5\Omega^{(1,2)*} - 4\Omega^{(1,3)*}\}/\Omega^{(1,1)*}, \quad \mathbf{C}^* \equiv \Omega^{(1,2)*}/\Omega^{(1,1)*}.$$

1.4 Chapman-Enskog Theory による輸送係数, II. 粘性と熱伝導

1.4.1 粘性係数

Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = \int \int (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\mathbf{c}_1$$

左辺: f として $f^{(0)}$ (Maxwell 分布) を代入.右辺: $f = f^{(0)}(1 + \Phi)$, $\Phi = \Phi(\mathbf{C})$. $\partial f / \partial t = 0$: 粘性摩擦による温度上昇無視.

$$\begin{aligned} c_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} &= -C_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial C_x} \cdot \frac{\partial C_x}{\partial v_x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= -C_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial C_x} \frac{\partial v_x}{\partial z} = f^{(0)} \frac{m C_x C_z}{kT} \frac{\partial v_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

$$\Phi \equiv -\frac{1}{n} \frac{m C_x C_z}{2kT} B \left(\frac{m C^2}{2kT} \right) \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

圧力テンソルの xz 成分

$$\begin{aligned} P_{xz} &= P_{zx} = m \int f C_x C_z d\mathbf{c} \\ &= m \int f^{(0)} \Phi C_x C_z d\mathbf{c} \\ &= -\frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{2kT}{n} \int f^{(0)} \left(\frac{m C_x C_z}{2kT} \right)^2 B d\mathbf{c}. \end{aligned}$$

$$\text{粘性係数の定義} \quad P_{xz} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

粘性係数の B による表現

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2kT}{n} \int f^{(0)} \left(\frac{m C_x C_z}{2kT} \right)^2 B d\mathbf{c} \\ &= \frac{2kT}{15n} \int f^{(0)} \left(\frac{m C^2}{2kT} \right)^2 B d\mathbf{c} \end{aligned}$$

温度や密度の様な気体を考える.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_x(z), 0, 0), \quad x \text{ 軸に平行な流れ.} \\ f^{(0)} &= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m C^2}{2\pi kT} \right), \\ \mathbf{C} &\equiv \mathbf{c} - \mathbf{v}. \end{aligned}$$

$$\frac{m C_x C_z}{kT} \frac{\partial v_x}{\partial z} = -n Z * \Phi,$$

$$Z * \left[\frac{m C_x C_z}{2kT} B \left(\frac{m C^2}{2kT} \right) \right] = 2 \frac{m C_x C_z}{2kT}$$

注意 この式は, 下の式の xz 成分:

$$\begin{aligned} Z * \left[\frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) B \right] \\ = 2 \frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) \equiv 2\varphi^{(0)} \end{aligned}$$

方針 $\varphi^{(r)}$ で展開し, その係数を決める.

$$\frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) B \equiv \sum_{r=0}^{\infty} b_r \varphi^{(r)}.$$

粘性係数の B による表現 の両辺へ

$$\frac{2}{3} C^4 = (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) : (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1})$$

を乗じると

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} C^4 \mu &= \frac{2kT}{15n} \int f^{(0)} \left(\frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{m}{2kT} (\mathbf{C}\mathbf{C} - \frac{1}{3} C^2 \mathbf{1}) B \right) C^4 d\mathbf{c} \\ &= \frac{2kT}{15n} C^4 (\varphi^{(0)}, \sum_{r=0}^{\infty} b_r \varphi^{(r)}) = \frac{2kT}{15n} C^4 b_0 \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right). \end{aligned}$$

粘性係数

$$\mu = \frac{1}{2} kT b_0.$$

b_0 のみから決まる!!

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(n + 1) = n!$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2,$$

$$\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4, \Gamma(7/2) = 15\sqrt{\pi}/8.$$

b_0 の決定 前述注意の式:

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r Z * \varphi^{(r)} = 2\varphi^{(0)}.$$

の辺々に $\varphi^{(s)}$ を乗じて積分:

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r [\varphi^{(s)}, \varphi^{(r)}]$$

$$= \begin{cases} 2(\varphi^{(s)}, \varphi^{(r)}) = 5 & (s = 0) \\ 0 & (s \neq 0) \end{cases}$$

$[\varphi^{(s)}, \varphi^{(r)}] \equiv (\varphi^{(s)}, Z * \varphi^{(r)})$

b_r を定める無限連立方程式

$$\begin{bmatrix} \langle 0, 0 \rangle & \langle 0, 1 \rangle & \langle 0, 2 \rangle & \cdots \\ \langle 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \cdots \\ \langle 2, 0 \rangle & \langle 2, 1 \rangle & \langle 2, 2 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

但し,

$$\langle s, r \rangle \equiv [\varphi^{(s)}, \varphi^{(r)}] \equiv (\varphi^{(s)}, Z * \varphi^{(r)})$$

1行1列をとると

$$\langle 0, 0 \rangle b_0 = 5 \implies b_0 = 5/4\Omega^{(2,2)}$$

粘性係数 μ の第1近似

$$[\mu]_1 = \frac{5kT}{8\Omega^{(2,2)}}$$

$$= \frac{5}{16} \left(\frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*} (T^*)}$$

2行2列をとると

$$b_0 = \frac{5}{4\Omega^{(2,2)}} \left[1 - \frac{\langle 0, 1 \rangle^2}{\langle 0, 0 \rangle \langle 1, 1 \rangle} \right]^{-1}$$

粘性係数 μ の第2近似

$$[\mu]_2 = \frac{5kT}{8\Omega^{(2,2)}} \left[1 + \frac{3}{49} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right]$$

$$= [\mu]_1 \left\{ 1 + \frac{3}{49} \left(4\mathbf{E}^* - \frac{7}{2} \right)^2 \right\}$$

1st-order Chapman-Cowling Approx.

参考

$$\frac{b_1}{b_0} \simeq -\frac{\langle 1, 0 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \simeq \frac{6}{49} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)$$

注意 以下の近似式を使用.

$$1/(1 - x) \simeq 1 + x, \langle 1, 1 \rangle \simeq \frac{49}{3} \Omega^{(2,2)}$$

Second-order Kihara Approximation

1.4.2 熱伝導係数

Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \int \int (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\mathbf{c}_1$$

左辺: f として $f^{(0)}$ (Maxwell 分布) を代入.右辺: $f = f^{(0)}(1 + \Phi)$, $\Phi = \Phi(\mathbf{C})$. $\partial f / \partial t = 0$: 熱の流れは定常に近い.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} &= f_0 \mathbf{C} \cdot \left(\frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial \ln T} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial \ln n} \cdot \frac{\partial \ln n}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ &= f_0 \left(\frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial \ln T} - \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial \ln n} \right) \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \\ &= f_0 \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\Phi \equiv -\frac{1}{n} \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} A \left(\frac{mC^2}{2kT} \right).$$

熱エネルギー・フラックス \mathbf{q}

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \int f \frac{m}{2} C^2 \mathbf{C} d\mathbf{c} = \frac{m}{2} \int f^{(0)} \Phi C^2 \mathbf{C} d\mathbf{c} \\ &= \frac{m}{2n} \int f^{(0)} C^2 \mathbf{C} \mathbf{C} A d\mathbf{c} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \\ &= -\frac{m}{6n} \int f^{(0)} C^4 A d\mathbf{c} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

$$\text{熱伝導係数の定義} \quad \mathbf{q} = -k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}.$$

熱伝導係数の A による表現

$$\begin{aligned} k &= \frac{m}{6nT} \int f^{(0)} C^4 A d\mathbf{c} \\ &= \frac{2k^2 T}{3mn} \int f^{(0)} \left(\frac{mC^2}{2kT} \right) \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) A d\mathbf{c} \end{aligned}$$

静止した, 内部自由度のない単成分気体を考える.

温度 T は場所の関数. 圧力は一様. 密度は T に反比例.

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mC^2}{2kT} \right), \\ \mathbf{C} &\equiv \mathbf{c} - \mathbf{v}. \end{aligned}$$

$$\int f^{(0)} \mathbf{C} \mathbf{C} A d\mathbf{c} = 0, (\Phi \text{ への条件より})$$

$$\left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} = -n Z * \Phi,$$

$$Z * \left[\mathbf{C} A \left(\frac{mC^2}{2kT} \right) \right] = \mathbf{C} \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right)$$

注意 この式は, 下の式と同値:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r Z * \psi^{(r)} = \psi^{(1)}.$$

方針 $\psi^{(r)}$ で展開し, その係数を定める.

$$\left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \mathbf{C} A \equiv - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \psi^{(r)} = - \sum_{r=1}^{\infty} a_r \psi^{(r)}.$$

熱伝導係数の A による表現 の両辺へ

$$C^2 = \mathbf{C} \mathbf{C}$$

を乗じると

$$\begin{aligned} C^2 k &= \frac{2k^2 T}{3mn} \int f^{(0)} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{C} A C^2 d\mathbf{c} \\ &= \frac{2k^2 T}{3mn} C^2(\psi^{(1)}), \sum_{r=1}^{\infty} a_r \psi^{(r)} = \frac{2k^2 T}{3mn} C^2 a_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right). \end{aligned}$$

熱伝導係数

$$k = \frac{5\mathbf{k}^2 T}{2m} a_1.$$

a_1 のみから決まる!!

μ と k との関係

$$\begin{aligned} [k]_1 &= \frac{3\mathbf{k}}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{m} [\mu]_1 \\ &= \frac{5}{2} \frac{c_v}{m} [\mu]_1 \end{aligned}$$

Simple kinetic theory では現れなかった係数 (5/2) が出た。
Transport Phenomena, p.256. 参照.

a_1 の決定 前述注意の式:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r Z * \psi^{(r)} = \psi^{(1)}.$$

の辺々に $\psi^{(s)}$ を乗じて積分:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r [\psi^{(s)}, \psi^{(r)}]$$

$$= \begin{cases} (\psi^{(s)}, \psi^{(r)}) = \frac{15}{4} & (s=1) \\ 0 & (s \neq 1) \end{cases}$$

$[\psi^{(s)}, \psi^{(r)}] \equiv (\psi^{(s)}, Z * \psi^{(r)})$

a_r を定める無限連立方程式

$$\begin{bmatrix} \langle 1; 1 \rangle & \langle 1; 2 \rangle & \langle 1; 3 \rangle & \cdots \\ \langle 2; 1 \rangle & \langle 2; 2 \rangle & \langle 2; 3 \rangle & \cdots \\ \langle 3; 1 \rangle & \langle 3; 2 \rangle & \langle 3; 3 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

但し,

$$\langle s; r \rangle \equiv [\psi^{(s)}, \psi^{(r)}] \equiv (\psi^{(s)}, Z * \psi^{(r)})$$

1行1列をとると

$$\langle 1; 1 \rangle a_1 = \frac{15}{4} \implies a_1 = \frac{15}{16\Omega^{(2,2)}}$$

熱伝導係数 k の第1近似

$$\begin{aligned} [k]_1 &= \frac{3\mathbf{k}}{2} \frac{25\mathbf{k}T}{16m} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}} \\ &= \frac{75}{64} \left(\frac{\mathbf{k}^3 T}{m\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*} (T^*)} \end{aligned}$$

2行2列をとると

$$a_1 = \frac{15}{16\Omega^{(2,2)}} \left[1 + \frac{\langle 1; 2 \rangle^2}{\langle 1; 1 \rangle \langle 2; 2 \rangle} \right]$$

熱伝導係数 k の第2近似

$$\begin{aligned} [k]_2 &= \frac{75\mathbf{k}^2 T}{32m\Omega^{(2,2)}} \left[1 + \frac{2}{21} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right] \\ &= [k]_1 \left\{ 1 + \frac{2}{21} \left(4\mathbf{E}^* - \frac{7}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

1st-order Chapman-Cowling Approx.

参考

$$\frac{a_2}{a_1} \simeq -\frac{\langle 1; 2 \rangle}{\langle 2; 2 \rangle} \simeq \frac{4}{21} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)$$

注意 以下の近似式を使用.

$$1/(1-x) \simeq 1+x, \langle 2; 2 \rangle \simeq \frac{21}{2} \Omega^{(2,2)}$$

Second-order Kihara Approximation

1.5 Kihara Theory による輸送係数: 拡散と熱拡散

(A,B)2成分混合気体を考える。Boltzmann 方程式から出発して、粘性・熱伝導のような解析をするのは、混合気体に対しては複雑で骨が折れるので、ここでは、木原による半ば直観的な導出法を示す。

参考文献

- KIHARA, Taro: "The Chapman-Enskog and Kihara Approximations for Isotopic Thermal diffusion in Gases", J. Statistical Physics, 13[2] 137-143, (1975).
- FERZIGER, J.H., KAPER, H.G.: "Mathematical Theory of Transport Processes in Gases", (1972), North-Holland Pub. Comp. (多成分系の議論が詳しい)
- WOODS, L.C.: "An Introduction to the Kinetic Theory of Gases and Magnetoplasmas", (1993), Oxford Univ. Press. (熱拡散の近似的取扱あり)

1.5.1 2成分気体

速度分布関数

$$\frac{\partial f_A}{\partial t} + \mathbf{c}_A \frac{\partial f_A}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial_e f_A}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial_e f_A}{\partial t} \right)_B$$

$$\frac{\partial f_B}{\partial t} + \mathbf{c}_B \frac{\partial f_B}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial_e f_B}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial_e f_B}{\partial t} \right)_B$$

$$n_A(\mathbf{r}, t) \equiv \int f_A(\mathbf{c}_A, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c}_A,$$

$$\mathbf{v}_A \equiv \frac{1}{n_A} \int \mathbf{v}_A f_A d\mathbf{c}_A, \quad (\text{Bも同様.})$$

$(\partial_e f_A / \partial t)_A$: A分子が、他のA分子と衝突 (encounter) することによる f_A の変化.

$(\partial_e f_A / \partial t)_B$: A分子が、B分子と衝突することによる f_A の変化.

温度・圧力一様の場合

$$n_A(\mathbf{r}) + n_B(\mathbf{r}) \equiv n = \text{一様.}$$

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \equiv -D \left[\frac{1}{n_A} \frac{\partial n_A}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{n_B} \frac{\partial n_B}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \equiv -D \left[\frac{n^2}{n_A n_B} \frac{\partial (n_A/n)}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

温度が一様でない場合への拡張

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \equiv -\frac{n^2}{n_A n_B} \left[D \frac{\partial (n_A/n)}{\partial \mathbf{r}} + D_T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

$$\equiv -\frac{n^2}{n_A n_B} D \left[\frac{\partial (n_A/n)}{\partial \mathbf{r}} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

- D : 拡散係数 (常に正).
(Diffusion coefficient)
- D_T : 熱拡散係数 (正負何れも可).
(Thermal diffusion coefficient)
- k_T : 熱拡散比. (D_T/D)
(Thermal diffusion ratio)
- α_T : 熱拡散ファクタ.
(Thermal diffusion factor)

$$k_T \equiv x_1 x_2 \alpha_T$$

注意

A分子を重い成分とすると、一般には低温側へ移動し、 k_T は正.

1.5.2 拡散係数

基礎方程式

$$\frac{\partial f_A}{\partial t} + \mathbf{c}_A \frac{\partial f_A}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial_e f_A}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial_e f_A}{\partial t} \right)_B$$

左辺に代入する速度分布 : Maxwellian,

$$n_A \rightarrow n_A(\mathbf{r}).$$

$$f_A(\mathbf{c}_A) = n_A(\mathbf{r}) \left(\frac{m_A}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_A \mathbf{c}_A^2}{2kT}\right).$$

右辺に代入する速度分布 : Maxwellian,

$\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ のまわり; $\mathbf{c}_A \rightarrow \mathbf{c}_A - \mathbf{v}_A$.

$$f_A(\mathbf{c}_A) = f_A^{(0)}(\mathbf{c}_A) \left[1 + \frac{m_A}{kT} \mathbf{c}_A \cdot \mathbf{v}_A \right],$$

$$f_B(\mathbf{c}_B) = f_B^{(0)}(\mathbf{c}_B) \left[1 + \frac{m_B}{kT} \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{v}_B \right],$$

左辺計算

$$(\text{左辺}) = \mathbf{c}_A \cdot \frac{\partial \ln n_A}{\partial \mathbf{r}} f_A.$$

$$\begin{aligned} \int m_A \mathbf{c}_A (\text{左辺}) d\mathbf{c}_A &= \frac{\partial \ln n_A}{\partial \mathbf{r}} \int m_A \mathbf{c}_A^2 f_A d\mathbf{c}_A \\ &= \frac{\partial \ln n_A}{\partial \mathbf{r}} [3n_A kT] \\ &= 3kT \frac{\partial n_A}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

注意

これは, “A 分子の運動量 $m_A \mathbf{c}_A$ の, 分子間衝突による変化” を単位時間, 単位体積あたりに積分したものに相当.

右辺計算

A 分子の運動量変化には, 同種分子間の衝突は, 直接には寄与しない. f_A と f_B との形に関して間接的に影響するだけ.

$$(\text{右辺}) = \int \int \int f_A(\mathbf{c}_A) f_B(\mathbf{c}_B) (m_A \mathbf{c}'_A - m_A \mathbf{c}_A) |\mathbf{c}_B - \mathbf{c}_A| d\sigma d\mathbf{c}_A d\mathbf{c}_B.$$

$\mathbf{c}_A, \mathbf{c}_B$: 衝突前速度.
 $\mathbf{c}'_A, \mathbf{c}'_B$: 衝突後速度.
 $d\sigma$: AB 間衝突の微分断面面積.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_A &= \mathbf{G} - \frac{m_B \mathbf{g}}{m_A + m_B} \\ \mathbf{c}_B &= \mathbf{G} + \frac{m_A \mathbf{g}}{m_A + m_B} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{c}_B - \mathbf{c}_A \\ m^* &= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \end{aligned}$$

$$d\mathbf{c}_A d\mathbf{c}_B = d\mathbf{g} d\mathbf{G}$$

$$\begin{aligned} kT \frac{\partial n_A}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{n_A n_B}{3kT} \int \int \left(\frac{m^*}{2kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m^* g^2}{2kT}\right) \\ &\quad \times m^* \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) m^* (\mathbf{g} - \mathbf{g}') g d\sigma d\mathbf{g} \\ &= -\frac{16}{3} n_A n_B \Omega^{(1,1)} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \end{aligned}$$

拡散係数定義

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B &\equiv \\ -D &\left[\frac{n^2}{n_A n_B} \frac{\partial (n_A/n)}{\partial \mathbf{r}} \right] \end{aligned}$$

拡散係数第1近似

$$\begin{aligned} [D]_1 &= \frac{3}{16m^*} \frac{kT}{n\Omega^{(1,1)}} \\ &= \frac{3}{16n} \left(\frac{2kT}{\pi m^*} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2 \Omega^{(1,1)*}} \end{aligned}$$

拡散係数第2近似

$$\begin{aligned} [D]_2 &= [D]_1 \left[1 + \frac{2}{5 + \Omega^{(2,2)}/\Omega^{(1,1)}} \left(\frac{\Omega^{(1,2)}}{\Omega^{(1,1)}} - \frac{5}{2} \right)^2 \right] \\ &= [D]_1 \left[1 + \frac{1}{8} \frac{(6\mathbf{C}^* - 5)^2}{(2\mathbf{A}^* + 5)} \right] \end{aligned}$$

1.5.3 同位体間の熱拡散

熱拡散現象は温度勾配の存在する場に生ずるから，その解析のためには，熱伝導係数を求めた時の速度分布関数が利用できる．更に，同位体間の相違は質量だけで，分子間力については同じとすれば，扱いが容易．

同位体間の衝突断面積

$$\begin{aligned} & (2m^*)^{1/2} \Omega_{AB}^{(l,r)} \\ &= m_A^{1/2} \Omega_{AA}^{(l,r)} \\ &= m_B^{1/2} \Omega_{BB}^{(l,r)} \end{aligned}$$

簡単のため $\Omega_{AB}^{(l,r)} = \Omega^{(l,r)}$
ここでは $m_A > m_B$

温度勾配のある際の分子の速度分布

$$\begin{aligned} f &= f^{(0)} [1 + \Phi] \equiv f^{(0)} \left[1 - \frac{1}{n} \{ \mathbf{C} \mathbf{A} \} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &\equiv f^{(0)} \left[1 - \frac{1}{n} \left\{ - \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^{\infty} a_r \psi^{(r)} \right\} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &\simeq f^{(0)} \left[1 + \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} a_1 \psi^{(1)} \right\} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &\equiv f^{(0)} \left[1 + \frac{a_1}{n} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{2kT}{m} \right)^{-1/2} \mathbf{C} S_{3/2}^{(1)} \left(\frac{mC^2}{2kT} \right) \right\} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &\equiv f^{(0)} \left[1 + \frac{a_1}{n} \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &= f^{(0)} \left[1 + \frac{15}{16n\Omega^{(2,2)}} \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right] \end{aligned}$$

速度分布の第1近似

全ての分子が成分 A の時: $f_A(\mathbf{c}_A)$

$$= f_A^{(0)}(\mathbf{c}_A) \left[1 + \frac{m_A}{kT} \mathbf{c}_A \cdot \mathbf{v}_A + \frac{15}{16n\Omega^{(2,2)}} \left(\frac{5}{2} - \frac{m_A c_A^2}{2kT} \right) \left(\frac{m_A}{2m^*} \right)^{1/2} \mathbf{c}_A \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

全ての分子が成分 B の時: $f_B(\mathbf{c}_B)$

$$= f_B^{(0)}(\mathbf{c}_B) \left[1 + \frac{m_B}{kT} \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{v}_B + \frac{15}{16n\Omega^{(2,2)}} \left(\frac{5}{2} - \frac{m_B c_B^2}{2kT} \right) \left(\frac{m_B}{2m^*} \right)^{1/2} \mathbf{c}_B \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

両成分間の運動量の移行が平均として消える条件

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int \int f_A(\mathbf{c}_A) f_B(\mathbf{c}_B) (m_B \mathbf{c}'_B - m_B \mathbf{c}_B) |\mathbf{c}_B - \mathbf{c}_A| d\sigma d\mathbf{c}_A d\mathbf{c}_B \\ &\rightarrow 0 = m^* \int \int \int f_A(\mathbf{c}_A) f_B(\mathbf{c}_B) (\mathbf{g} - \mathbf{g}') g d\sigma g d\mathbf{G} \end{aligned}$$

熱拡散ファクタ定義

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B &\equiv \\ -D\alpha_T &\frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 8 \left(\frac{m^*}{kT} \right)^{1/2} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \Omega^{(1,1)} \\ &= -3 \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \left\{ \frac{15}{16n\Omega^{(2,2)}} \left(\frac{kT}{m^*} \right)^{1/2} \right\} \\ &\quad \times (2\Omega^{(1,2)} - 5\Omega^{(1,1)}) \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

熱拡散ファクタ木原第1近似

$$\begin{aligned} [\alpha_T]_1 &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \frac{15}{8} \frac{2\Omega^{(1,2)} - 5\Omega^{(1,1)}}{\Omega^{(2,2)}} \\ &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \frac{15}{16} \frac{(6\mathbf{C}^* - 5)}{\mathbf{A}^*} \end{aligned}$$

Inverse Power-law モデルの熱拡散ファクタ

$$\begin{aligned}
 [\alpha_0]_1 &= \frac{15}{8} \frac{2\Omega^{(1,2)} - 5\Omega^{(1,1)}}{\Omega^{(2,2)}} \\
 &= \frac{15}{8} \frac{A_1(\nu)}{A_2(\nu)} \frac{2\Gamma(4 - \frac{2}{\nu-1}) - 5\Gamma(3 - \frac{2}{\nu-1})}{\Gamma(4 - \frac{2}{\nu-1})}
 \end{aligned}$$

剛体球モデルの熱拡散ファクタ

$$\begin{aligned}
 [\alpha_0]_1 &= \frac{15}{8} \frac{2\Omega^{(1,2)} - 5\Omega^{(1,1)}}{\Omega^{(2,2)}} \\
 &= \frac{15}{8} \frac{2 \cdot 2 \cdot 3! - 5 \cdot 2 \cdot 2!}{(2 - \frac{2}{3})3!} \\
 &= \frac{15}{8} \frac{2 \times 3 - 5 \times 1}{2} \\
 &= \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

2成分混合気体の熱拡散ファクタ

$$[\alpha_T]_1 = (6\mathbf{C}_{12}^* - 5) \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{Q_1 x_1^2 + Q_{12} x_1 x_2 + Q_2 x_2^2}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2m_2}{m_1 + m_2}} \frac{\Omega^{(2,2)*}}{\Omega^{(1,1)*}} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^2 - \frac{8m_1 m_2 \mathbf{A}_{12}^* - 15m_2(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2)^2}, \\
 Q_1 &= \frac{2}{m_2(m_1 + m_2)} \sqrt{\frac{2m_2}{m_1 + m_2}} \frac{\Omega^{(2,2)*}}{\Omega^{(1,1)*}} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^2 [3m_2^2 + m_1^2 + \frac{8}{5} m_1 m_2 \mathbf{A}_{12}^*], \\
 Q_{12} &= 15 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{32m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \mathbf{A}_{12}^* + \frac{8}{5} \frac{(m_1 + m_2)}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{\Omega_{11}^{(2,2)*}}{\Omega_{12}^{(1,1)*}} \frac{\Omega_{22}^{(2,2)*}}{\Omega_{12}^{(1,1)*}} \left(\frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{12}^2}\right)^2
 \end{aligned}$$

注意 S_2, Q_2 は, S_1, Q_1 の表式において, suffix の 1 と 2 とを入れ換えることで得られる.

分子間衝突パラメータ

$$\begin{aligned}
 \text{衝突時分子中心間距離: } \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\
 \text{分子間ポテンシャル深さ: } \epsilon_{12} &= \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}
 \end{aligned}$$

$\nu = 5$ (逆4乗ポテンシャル;
Maxwell model) では, 分子が

$$\Gamma(7/2) - \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = 0$$

となって, 熱拡散ファクタはゼロになる. そのため Maxwell が見逃していた熱拡散の現象は, S.Chapman(1916), D.Enskog(1917) によって理論的に明らかにされた.

剛体球ポテンシャルでは,

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1,1)} : \Omega^{(1,2)} : \Omega^{(2,2)} \\
 = 1 : 3 : 2
 \end{aligned}$$

注意 剛体球ポテンシャル:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^* = \mathbf{C}^* = 1$$

$\nu = 5$ ポテンシャル:

$$\mathbf{B}^* = \frac{5}{4}, \quad \mathbf{C}^* = \frac{5}{6}.$$

注意

同位体であっても, 水素のように同位体間の質量が大きく異なる場合には, 左の式を用いる必要がある.

1.6 気体の輸送係数まとめ

1.6.1 粘性係数

$$\mu = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{mkT}}{d^2}$$

$$\mu = \frac{5}{16\pi^{1/2}} \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)}$$

Trans. Phenom. p.23

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu}$$

$$\begin{aligned} \mu &: \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}} \\ T &: \text{K} \\ \sigma &: \text{\AA} \end{aligned}$$

1.6.2 熱伝導係数

$$k = \frac{2c_v}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{kT/m}}{d^2}$$

$$k = \frac{75}{64\pi^{1/2}} \frac{\sqrt{k^3 T/m}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)}$$

Trans. Phenom. p.255

$$k = 1.9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

$$\begin{aligned} k &: \frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{s}\cdot\text{K}} \\ T &: \text{K} \\ \sigma &: \text{\AA} \end{aligned}$$

1.6.3 拡散係数

$$D_{AA} = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{k^3 T^3/m_A}}{pd_A^2}$$

$$D_{AB} = \frac{3}{16n\pi^{1/2}} \frac{\sqrt{2kT/m^*}}{\sigma_{AB}^2 \Omega_{AB}^{(1,1)*}(T_{AB}^*)}$$

Trans. Phenom. p.511

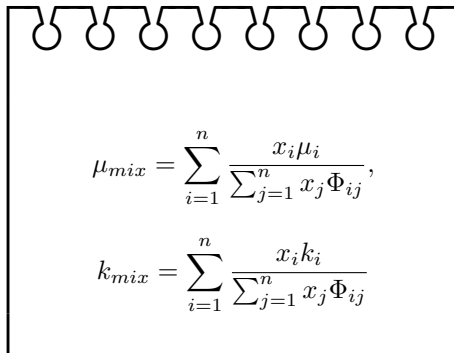
$$D_{AB} = 0.0018583 \frac{\sqrt{T^3(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B})}}{p\sigma^2 \Omega_{D,AB}}$$

$$\begin{aligned} D &: \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \\ T &: \text{K} \\ \sigma &: \text{\AA} \\ p &: \text{atm} \end{aligned}$$

注意 Lennard-Jones (12-6) 分子間ポテンシャル: *Transport Phenomena*, p.744-746

$$\sigma, \epsilon/k : \text{p.744-745.} \quad \Omega_\mu = \Omega_k \equiv \Omega^{(2,2)*}: \text{p.746} \quad \Omega_{D,AB} \equiv \Omega^{(1,1)*}: \text{p.746.}$$

1.6.4 混合気体の Wilke の半実験式



$$\mu_{mix} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}},$$

$$k_{mix} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i k_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}}$$

Transport Phenomena, p.24, p.258.

$$\Phi_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2$$

注意 Φ_{ij} の式は、粘性も熱伝導度も同じ。

1.7 液体の輸送係数

液体では分子間の距離が短く、従って分子間力の強い影響を受けるが、現状では輸送係数をまともに評価できるほどには分子間力の知識がない。液体の輸送係数は、測定値に頼ることが多い。

1.7.1 粘性係数

Eyring と共同研究者の動力学理論

Transport Phenomena p.27, Fig.1.5-1

液体中の各粒子は常に運動しているものの、密に充填されているので、運動は最近接粒子群で囲まれた籠の中の振動として理解される。

振動中に中間的な不安定な活性化複合体を形成し、その分解過程が速度過程 (rate process) と仮定。

- $\Delta \tilde{G}_0^\ddagger$: 静止時の籠のバリアの高さ
- : (活性化複合体の活性化自由エネルギー)
- \mathbf{k}, \mathbf{h} : Boltzmann and Planck constants
- k : 隣接の空孔へジャンプする速度定数
- R, T : 気体定数, 温度

τ_{yx} 印加時の活性化自由エネルギー

$$\Delta \tilde{G}^\ddagger = \Delta \tilde{G}_0^\ddagger \pm \left(\frac{a}{\delta}\right) \frac{\tau_{yx} \tilde{V}}{2}$$

k_f : 剪断応力に対抗してジャンプ: - sign

k_b : 剪断応力の方向にジャンプ: + sign

$$\frac{\tau_{yx}}{\mu} = -\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta} (k_f - k_b)$$

液体粘性の Arrhenius 式表現

$$\mu = \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{\mathbf{h}R}{\tilde{V}} \exp \frac{\Delta \tilde{G}^\ddagger}{RT}$$

- a : 隣接の空孔への距離
- δ : 液体の隣接層間の距離
- \tilde{V} : 液体のモル体積

注意 粘性は温度上昇と共に減少。粘性の対数 $\propto 1/T$ 。

1.7.2 熱伝導係数

Bridgman の理論 (1923)

Transport Phenomena p.260

液体中の各粒子は 3 次元格子状に配列しており, 更に, エネルギーは一つの格子面から隣接格子面へ音速 v_s で移送される, と仮定.

- \tilde{N} : Avogadro's number
 - \tilde{V}/\tilde{N} : 分子 1 個当りの体積
 - $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$: 格子の中心間隔
 - a : 衝突 1 回でのエネルギー移動距離
- $$k = \frac{1}{3} \rho \hat{C}_v \bar{u} \lambda = \rho \hat{C}_v \bar{u} a$$

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v &\simeq 3(\tilde{N}/\tilde{V}) \mathbf{k} \\ \bar{u} &\leftarrow v_s \\ a &\leftarrow (\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3} \end{aligned}$$

Bridgman's equation

$$k = 3 \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}} \right)^{2/3} \mathbf{k} v_s$$

注意 係数 3 は少々大きすぎ, 2.8 程度が実測値と合うんだってさ. Eyring *et al.*(1941).

1.7.3 拡散係数

Transport Phenomena p.513. 静止した媒質 B(粘性 μ_B) 中を半径 R_A の単一粒子が拡散.

Nernst-Einstein eq. $D_{AB} = \mathbf{k} T \frac{u_A}{F_A}$

注意 u_A/F_A : 単位力が印加された粒子の到達定常速度: mobility

流体力学的理論

$$F_A = 6\pi\mu_B u_A R_A \left(\frac{2\mu_B + R_A \beta_{AB}}{3\mu_B + R_A \beta_{AB}} \right)$$

注意 β_{AB} : 滑り摩擦係数

- $\beta_{AB} \rightarrow \infty$ 拡散粒子表面で滑らない.
- $\beta_{AB} \rightarrow 0$ 拡散粒子表面で付着しない.

$\beta_{AB} = \infty \rightarrow$ Stokes-Einstein eq.

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{\mathbf{k}T} = \frac{1}{6\pi R_A}$$

$\beta_{AB} = 0 \rightarrow$ Self-Diffusion

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{\mathbf{k}T} = \frac{1}{4\pi R_A}$$

$$\frac{D_{AA}\mu_A}{\mathbf{k}T} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}_A} \right)^{1/3}$$

Eyring rate theory

$$\frac{D_{AA}\mu_A}{\mathbf{k}T} = \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}_A} \right)^{1/3}$$

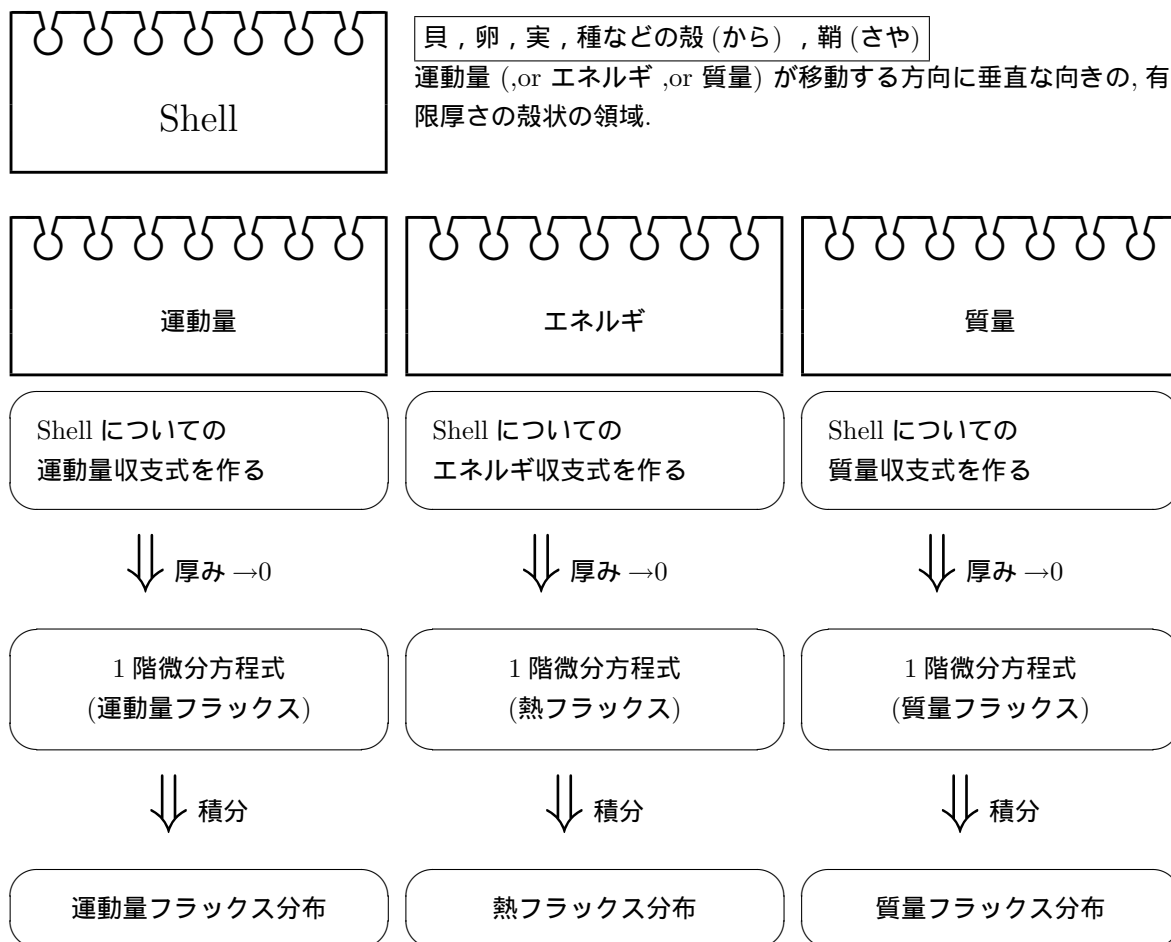
注意 係数 2π だけ異なるが流力理論が better.

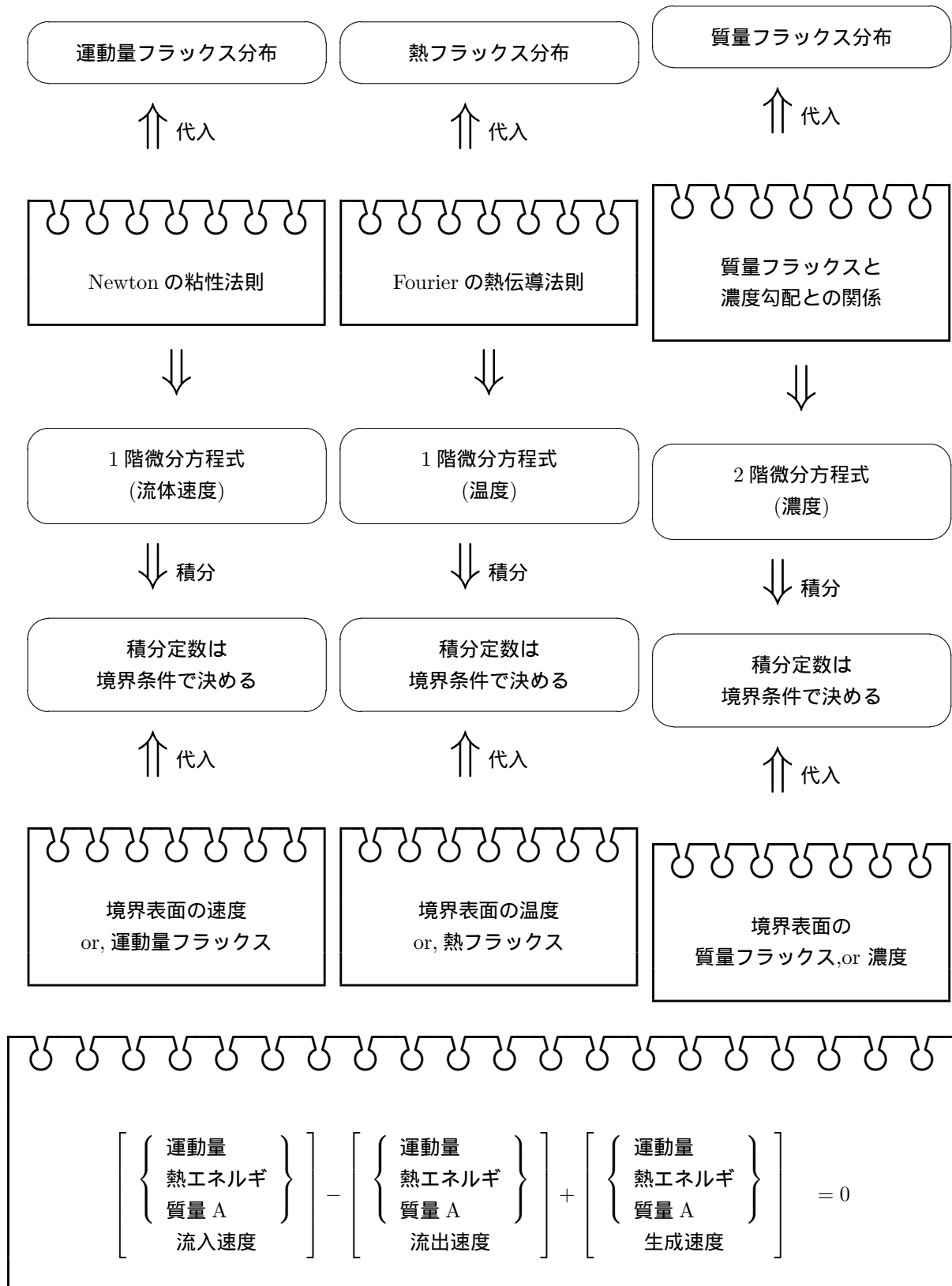
参考書

- 戸田, 松田, 樋渡, 和達: “液体の構造と性質”, 岩波書店 (1976).
- J.-P.Hansen, I.R.McDonald: “Theory of Simple Liquids”, 2-nd ed., Academic Press(1986).
- M.P.Allen, D.J.Tildesley: “Computer Simulation of Liquids”, Oxford Univ. Press(1989).

第2章 Shell balances

2.1 Shell balance とは？





2.2 傾斜平板上の流下液膜の流れ

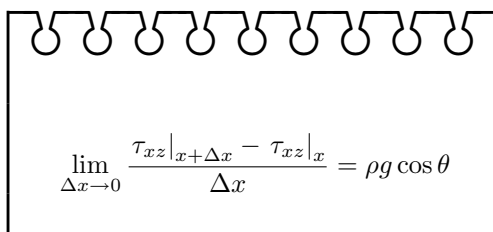
Transport Phenomena,
p.36, Fig.2.2-2

運動量輸送 by 流れ : 流れ方向: z 軸
 運動量輸送 by 粘性 : 速度勾配方向: x 軸
 流体にかかる重力: : 重力方向 垂直からの角度 θ

粘性, 密度一定の流体が, 速度 $v_z(x)$ (z によらない) で流下している. x 方向しか速度勾配が無いから, せん断応力 $\tau_{xz}(x)$ も z によらない. 流体の幅 $W, z = 0, L$ で囲まれた Δx の領域の運動量収支を考える.

	in	out
z-momentum(viscous)	$(LW)(\tau_{xz}) _x$	$(LW)(\tau_{xz}) _{x+\Delta x}$
z-momentum(flow)	$(W\Delta xv_z)(\rho v_z) _{z=0}$	$(W\Delta xv_z)(\rho v_z) _{z=L}$
gravity force	$(LW\Delta x)(\rho g \cos \theta)$	

Total $0 = (LW)(\tau_{xz})|_x - (LW)(\tau_{xz})|_{x+\Delta x} + (LW\Delta x)(\rho g \cos \theta)$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x} = \rho g \cos \theta$$

定義

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \cos \theta$$

$$\downarrow$$

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \theta + C_1$$

境界条件

liquid-gas 界面 ($x=0$) で
 $\tau_{xz} = 0$
 $C_1 \rightarrow 0$
 $\tau_{xz} = \rho g x \cos \theta$

Newton 流体

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$$

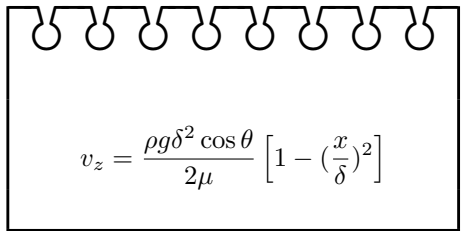
$$\downarrow$$

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos \theta}{\mu}\right)x$$

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right)x^2 + C_2$$

境界条件

liquid-solid 界面 ($x=\delta$) で
 $v_z = 0$
 \downarrow
 $C_2 = (\rho g \cos \theta / 2\mu)\delta^2$



$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

最大速度 ($x = 0$) $v_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu}$

平均速度 $\langle v_z \rangle \equiv \int_0^\delta v_z dx / \int_0^\delta dx = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{3\mu}$

体積流量 $Q \equiv \int_0^L \int_0^\delta v_z dx dy = W \cdot \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^3 \cos \theta}{3\mu} W$

フィルムの厚み = δ (because of the relations above)

固体表面にかかる力の z 成分 = $\int_0^L \int_0^\delta \tau_{xz}|_{x=\delta} dy dz = \rho g \delta \cdot L \cdot W \cos \theta$
 = フィルム全体にかかる重力の z 成分

適用限界 $Re \equiv 4\delta \langle v_z \rangle \rho / \mu < 4$ to 25 (laminar w/o rippling), $Re > 1000$ to 2000 (turbulent).

2.3 円筒内の流れ，電熱線の熱伝導

円筒内流れ

<i>Trans. Phenom.</i> , p.43, Fig.2.3-1	半径: R 長さ: L (very long) no "end effect"
定常状態の，密度一定 ρ (非圧縮性) の流体の， $z = 0, L$ で囲まれた，半径 r の厚さ Δr の円筒型 shell 領域の運動量収支を考える．	
r -momentum in (viscous)	$(2\pi r L)(\tau_{rz}) _r$
r -momentum out (viscous)	$(2\pi r L)(\tau_{rz}) _{r+\Delta r}$
z -momentum in (flow)	$(2\pi r \Delta r v_z)(\rho v_z) _{z=0}$
z -momentum out (flow)	$(2\pi r \Delta r v_z)(\rho v_z) _{z=L}$
gravity force	$(2\pi r \Delta r L)\rho g$
pressure force ($z=0$)	$(2\pi r \Delta r)p_0$
pressure force ($z=L$)	$-(2\pi r \Delta r)p_L$

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r\tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r\tau_{rz})|_r}{\Delta r}$$

$$= \left(\frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g\right)r$$

$$\mathcal{P} \equiv p - \rho g z$$

↓

$$\tau_{rz} = \frac{C_1}{r} + \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right)r$$

境界条件
 $r=0$ で τ_{rz} : 有限
 $C_1 \rightarrow 0$

Newton 流体

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L}\right)r,$$

$$v_z = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}\right)r^2 + C_2$$

境界条件
 liquid-solid 界面: $v_z = 0 (r=R)$
 (no slip 条件)

$$C_2 = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}$$

熱線熱伝導

<i>Trans. Phenom.</i> , p.269, Fig.9.2-1	半径: R , 長さ: L 発熱密度: S_e 電気伝導度: $k_e (1/(\Omega \text{cm}))$ 電流密度: $I (\text{A/cm}^2)$ 発熱密度一定 $S_e = I^2/k_e$ の熱線の， $z = 0, L$ で囲 まれた，半径 r の厚さ Δr の円筒型 shell 領域の熱 収支を考える．
th. energy in	$(2\pi r L)(q _r)$
th. energy out	$(2\pi(r + \Delta r)L)(q _{r+\Delta r})$
energy production	$(2\pi r \Delta r L)S_e$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(rq|_{r+\Delta r}) - (rq|_r)}{\Delta r}$$

$$= \frac{d}{dr}(rq_r) = S_e r \propto r$$

$$q_r = \frac{S_e r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

Fourier の法則
 $q_r = -k \frac{dT}{dr}$

境界条件
 $r=0$ で q_r : 有限
 $C_1 \rightarrow 0$

$$-k \frac{dT}{dr} = \frac{S_e r}{2},$$

$$T = -\frac{S_e r^2}{4k} + C_2$$

境界条件
 gas-solid 界面: $T = T_0 (r=R)$ → $C_2 = T_0 + \frac{S_e R^2}{4k}$

粘性係数 μ , 熱伝導係数 k は，共に，温度などに因らず一定，と仮定している．

円筒内流れ速度分布

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

最大速度 ($r=0$)

$$v_{z,max} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}$$

平均速度

$$\langle v_z \rangle \equiv \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} r dr d\theta} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{8\mu L}$$

体積流量

$$Q \equiv \pi R^2 \times \langle v_z \rangle = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^4}{8\mu L}$$

濡れ表面へかかる力の z 成分

$$\begin{aligned} F_z &\equiv (2\pi r L) \left(-\mu \frac{dv_z}{dr} \right) \Big|_{r=R} \\ &= \pi R^2 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) \\ &= \pi R^2 (p_0 - p_L) + \pi R^2 L \rho g \end{aligned}$$

適用限界 $\text{Re} \equiv 2R\langle v_z \rangle \rho / \mu < 2100$. (laminar)

Hagen-Poiseuille の法則

流れによって生ずる圧力降下，ならびに，重力加速度による力と，体積流量率との関係．圧力降下，ならびに，重力加速度によって，円筒にかかる力は，粘性力 F_z と釣り合う．

熱線内温度分布

$$T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4kL} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

最大温度上昇 ($r=0$)

$$T_{max} - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}$$

平均温度上昇

$$\begin{aligned} \langle T \rangle - T_0 &\equiv \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (T(r) - T_0) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} r dr d\theta} \\ &= \frac{S_e R^2}{8k} = \frac{1}{2} (T_{max} - T_0) \end{aligned}$$

L 全体表面での熱流量

$$\begin{aligned} Q|_{r=R} &\equiv 2\pi RL \cdot q_r|_{r=R} \\ &= 2\pi RL \cdot \frac{S_e R}{2} = \pi R^2 L \cdot S_e \end{aligned}$$

electrical dissipation で生ずる全ての熱は，定常状態では，壁を通過する総熱量と等しい．

円筒内流れと熱線熱伝導とは，適当な量を選べば，微分方程式並びに境界条件とが相い等しくなる．この時，二つの物理システムは“analogous”である，と言う．

2.4 同心二重円筒間の流れ

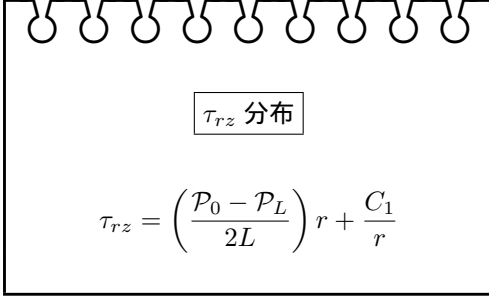
Transport Phenomena,
p.51, Fig.2.4-1

円筒形の薄い shell を考えると, 円筒内の流れと同じ微分方程式を得る .

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)r, \quad \text{where } \mathcal{P} \equiv p + \rho gz.$$

非圧縮流体が, 同心二重円筒間の環形の領域を上昇. 内側円筒の外半径は κR .

注意 圧力と重力は同じ向き. Fig.2.3-1 と z 軸の向きは逆.



τ_{rz} 分布

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right)r + \frac{C_1}{r}$$

C_1 の決め方

固定壁 $r = R, \kappa R$ での運動量 flux の情報がないので, C_1 はすぐには決まらない. 未知の点 $r = \lambda R$ で速度は最大となり, この時運動量 flux はゼロ. そこで,

$$C_1 = -(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)(\lambda R)^2/2L$$

$$\tau_{rz} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2L} \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \left(\frac{R}{r}\right) \right] \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = -\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2\mu L} \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \left(\frac{R}{r}\right) \right]$$

積分

$$v_z = -\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2 \right]$$

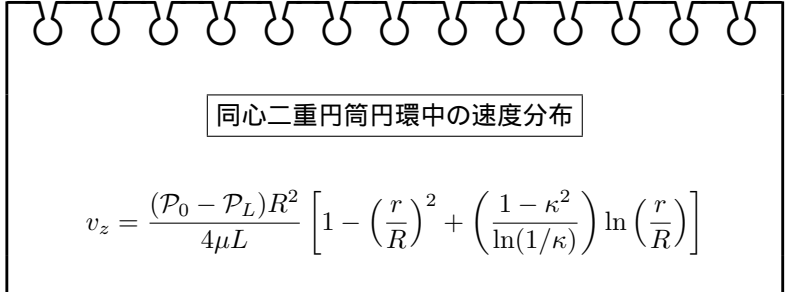
境界条件

$$v_z = 0$$

at $r = \kappa R$,
at $r = R$.

$$C_2 = -1,$$

$$2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)}.$$



同心二重円筒円環中の速度分布

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)}\right) \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

最大速度 ($r = \lambda R$)

$$v_{z,max} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\right) \left[1 - \ln\left(\frac{1 - \kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\right) \right] \right\}$$

平均速度

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{8\mu L} \left[\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right]$$

注意

$\kappa \rightarrow 0$ の極限で円筒内の流れの場合と同じになる .

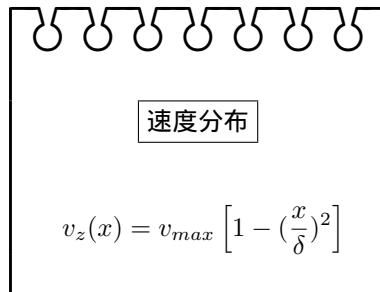
体積流量, 固体表面 (濡れ表面) にかかる力に関しても同様 .

2.5 流下液膜への拡散 (強制対流物質移動)

Transport Phenomena,
p.537, Fig.17.5-1

気体 A が、層流落下液膜 B に吸収される。

A の B への溶解度: 小 \rightarrow A を吸収しても B の粘性の変化は小。
 A の B への拡散速度: 小 \rightarrow A の B への浸透距離: 液膜厚さに較べて小。
 A 成分輸送 by 流れ : 液膜流下方向: z 軸
 A 成分輸送 by 拡散 : 濃度勾配方向: x 軸



速度分布

$$v_z(x) = v_{max} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

A のモル濃度 c_A は、 x 方向だけでなく z 方向にも変化するから、流体の幅 $W, \Delta z, \Delta x$ で囲まれた領域の物質収支を考える。(Molar flux: N_A)

$$N_{Az}|_z W \Delta x - N_{Az}|_{z+\Delta z} W \Delta x + N_{Ax}|_x W \Delta z - N_{Ax}|_{x+\Delta x} W \Delta z = 0$$

$$\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = 0$$

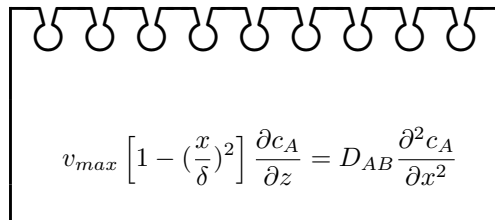
Eq.(17.0-1) の適切な簡単化.

$$N_{Az} = \left\{ \begin{array}{l} \text{固定座標に} \\ \text{関する flux} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -cD_{AB}(\partial x_A / \partial z) \\ \text{拡散による} \\ \text{flux} \end{array} \right\} + x_A(N_{Az} + N_{Bz})$$

z 方向には等濃度, 微分 $\rightarrow 0$

$$N_{Ax} = -cD_{AB}(\partial x_A / \partial x)$$

x 方向にはバルク流 なし



$$v_{max} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}$$

境界条件

$$\begin{aligned} z = 0 & : c_A = 0 \\ x = 0 & : c_A = c_{A0} \\ x = \delta & : (\partial c_A / \partial x) = 0 \end{aligned}$$

接触時間 L/v_{max} : 小の近似
 A の浸透距離: 小 \rightarrow A の吸収は、殆ど液体速度 v_{max} の場所で起こる. $\rightarrow v_z(x)$ の x -dependence 無視. v_{max} で置き換える.

$$v_{max} \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}$$

境界条件の変更

$$x = \infty (\text{not } \delta) : c_A = 0$$

変数分離法で解ける

誤差関数

Transport Phenomena,
p.125 §4.1-1(突然動いた壁近傍流れ)
p.353 §11.1-1(熱伝導)

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \text{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/v_{max}}}$$

誤差関数と余誤差関数

$$\text{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\text{erfc}(\eta) \equiv 1 - \text{erf}(\eta)$$

$$\begin{aligned}
 \text{表面局所的質量 flux } N_{Ax}(z)|_{x=0} &= -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_{x=0} = c_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB} v_{max}}{\pi z}} \\
 \text{気体から液へ移動する A 全モル量 } W_A &\equiv \int_0^W \int_0^L N_{Ax}|_{x=0} dz dy = WLc_{A0} \sqrt{\frac{4D_{AB} v_{max}}{\pi L}} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (W\delta v_{max}) \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta c_A|_{z=L} dx \right)
 \end{aligned}$$

“exposure time” $t_{exp} \equiv L/v_{max}$

質量移動率 $\propto \sqrt{D_{AB}/t_{exp}}$.

拡散・熱伝導に関する参考書

- J.Cranck: “The Mathematics of Diffusion”, (2-nd ed.) Oxford Univ. Press,(1975).
- H.S.Carslaw & J.C.Jaeger: “Conduction of Heat in Solids”, (2-nd ed.) Oxford Univ. Press,(1959).

拡散型の偏微分方程式の解き方に関しては以下の参考書が有用 .

- 日野 幹雄: “流体力学”, p.222~, 朝倉書店 (1992).

第3章 変化方程式

3.1 変化方程式 とは？

簡単な系

Shell balance による解法

一般的な系

質量, 運動量, エネルギー, 化学種の保存式の一般形 (Equations of Change) から始めるのが, 早く, 簡単で, 安全.

変化方程式：種々の保存式

保存量	式の名前	
質量	Equation of Continuity	連続の式
運動量	Equation of Motion	運動方程式
エネルギー	Equation of Energy	エネルギー方程式
化学種	Equation of Continuity for each chemical species	各化学種に対する 連続の式

鴨長明・方丈記

行く川の流れば絶えずして, しかも旧の水にあら^{うたかた}ず. 淀みに浮かぶ^{うたかた} 泡沫, かつ消え, かつ結びて, 久しく留まりたる例し無し.

3.1.1 量 c に関する 3 種類の時間微分

c : 例えば, 川の中の魚の密度, 川面^{かわも}に浮かぶ^{うたかた} 泡沫^{うたかた} の密度. 時間と場所の関数: $c(x, y, z; t)$.

時間偏微分

$$\frac{\partial c}{\partial t}$$

(The Partial Time Derivative)

場所 (x, y, z) を固定して, 時間 (t) のみの偏微分.

橋の上の固定位置から, 川の中の魚 or 泡沫の密度の時間変化を見る.

(Total Time Derivative)

場所 (x, y, z) を移動しつつ, 密度変化を見る.

時間全微分

$$\frac{dc}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla c,$$

但し, $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \equiv (d\mathbf{r}/dt)$: 移動する観測点の速度成分.

(Substantial Time Derivative, or Lagrange's Derivative)

実質微分

$$\frac{Dc}{Dt}$$

流れに乗った筏 or 泡沫の上から, 密度変化を見る. 移動する観測点の速度は流れ \mathbf{v} と同じ. 流れに従った微分. 時間全微分の特特殊形.

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c,$$

$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$: 局所流速ベクトル.

流れている流体において, $(\partial c / \partial t) \neq 0$ の時, $(Dc / Dt) = 0$ となり得るか. 逆に, $(\partial c / \partial t) = 0$ の時, $(Dc / Dt) \neq 0$ となり得るか. 説明せよ.

3.2 連続の式

Transport Phenomena,
p.74, Fig.3.1-1

空間に固定された, stationary (*i.e.*, not moving) な体積要素, $\Delta x \Delta y \Delta z$. の質量収支を考える.

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] \\ (\text{蓄積速度}) &+ \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] \\ &+ \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \end{aligned}$$

連続の式 $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right)$$

式の意味 質量流速 $\rho \mathbf{v}$ の変化に起因する密度変化速度を固定点で記述する式.

ベクトル表記

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$$

$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \equiv \text{div } \rho \mathbf{v}$: $\rho \mathbf{v}$ の発散

空間に固定された微小体積要素中の密度の増加速度 (左辺) は, 単位体積当りの質量流速の正味の流れ込み速度 (右辺) に等しい.

∇ の次元: $1/\text{長さ}$.

式変形 $\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} =$

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \text{ or } \frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

式の意味: 流れに乗って観測した密度変化. 密度一定: $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$.

3.3 運動方程式

Transport Phenomena,
p.76, Fig.3.2-1

空間に固定された, stationary (*i.e.*, not moving) な体積要素,
 $\Delta x \Delta y \Delta z$. の運動量収支を (ベクトル式となるから, x 成分を先ず) 考える.

$$\text{運動量の流れ} = \left\{ \begin{array}{l} \text{convection:} \\ \text{移流・対流による流れ} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{molecular transfer:} \\ \text{速度勾配によるもの} \end{array} \right\}.$$

正味の convective x 運動量流れ

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z [(\rho v_x v_x)|_x - (\rho v_x v_x)|_{x+\Delta x}] \\ &+ \Delta x \Delta z [(\rho v_y v_x)|_y - (\rho v_y v_x)|_{y+\Delta y}] \\ &+ \Delta x \Delta y [(\rho v_z v_x)|_z - (\rho v_z v_x)|_{z+\Delta z}] \end{aligned}$$

正味の molecular x 運動量流れ

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z [\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}] \\ &+ \Delta x \Delta z [\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}] \\ &+ \Delta x \Delta y [\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}] \end{aligned}$$

解釈 ρv_x -convective balance.

注意 τ_{yx} : y 面への粘性力によって生ずる x 方向せん断応力 (shear or tangential stress).

系に働く力

x 方向圧力 =

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x})$$

x 方向重力 = $\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$

運動方程式 (x 成分) $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = & - \left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial z} \right) \\ & - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

式の意味 運動量流速 $\rho \mathbf{v}\mathbf{v}$, 粘性力 τ , 圧力, 体積力の変化に起因する運動量変化速度を, 固定点で記述する式.

y, z 成分に関しても同様の式が成立.

$$\rho \mathbf{v} = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z), \mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$$

運動方程式: ベクトル表記

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho \mathbf{g}$$

(蓄積速度)(移流)(圧力)(粘性移行)(重力)

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) \equiv \mathbf{grad} p : p \text{ の勾配}$$

τ : 応力テンソル; 9成分 \rightarrow 対称: 6成分

$\rho \mathbf{v}\mathbf{v}$: $\rho \mathbf{v}$ と \mathbf{v} との dyadic product (9成分)

$[\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\mathbf{v}]$: $\rho \mathbf{v}\mathbf{v}$ の発散と analogous

単位体積当りの, 運動量流速の正味の消失速度.

$[\nabla \cdot \tau]$: vector.

注意 $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$: 質量消失速度 by 流れ (scalar). $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\mathbf{v}]$: 運動量消失速度 by 流れ (vector).

連続の式を用いて式変形

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$$

式の意味
 (質量 × 加速度) = (圧力) + (粘性力) + (重力).
 Newton の運動第 2 法則.

証明すべき式

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]$$

Hint *Transport Phenomena*, p.723~p.731.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v}(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

$$[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] = [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] + \mathbf{v}(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}), \quad (\text{A.4-30})$$

注意 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv \sum_i \delta_i (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i,$

$$[\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = \sum_i \sum_k \delta_k \rho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad (\text{A.4-27})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i \equiv v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z}.$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$$

Newton 流体の応力テンソル

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zz} &= -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

注意 厳密には, $(2/3)\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \rightarrow ((2/3)\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v})$, κ : bulk viscosity, 通常 0 と仮定.

特殊な場合の運動方程式

constant ρ , constant μ

zero μ

constant $\rho \rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$

zero $\mu \rightarrow [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] = 0$

Navier-Stokes Equation

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

Euler Equation

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

参考書 今井 功: “流体力学 (前編)”, 裳華房 (1973).

3.4 力学的エネルギー方程式

運動方程式: ヴェクトル表記

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$$

or, $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$

両辺に局所流速ベクトル \mathbf{v} を乗じる.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

→ スカラ方程式: 下流へ流れる流体要素の単位質量当りの運動エネルギーの変化を記述.

or,

力学的エネルギー方程式 — Bernoulli 方程式の基礎式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v})$$

単位体積当りの運動エネルギー増加率 = パルク流れによる運動エネルギーの正味の増加率

圧力の寄与
p.726(A.3-20)

$-(\nabla \cdot p\mathbf{v})$
体積要素周囲の圧力でなされる仕事

$-p(-\nabla \cdot \mathbf{v})$
内部エネルギーへの可逆変化率

粘性力の寄与
p.731(A.4-32)

$-(\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$
体積要素へ粘性力でなされる仕事

$-(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$
内部エネルギーへの不可逆変化率

重力の寄与

$+\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$
体積要素へ重力でなされる仕事

↓
通常の Newton 流体では, 常に正
現実の流体では, 必ずエネルギーが失われる.

粘性散逸項

$$0 \leq (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \equiv \mu \Phi_v$$

$$= \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right]^2$$

この項が無ければ, 運動, 内部, ポテンシャル・エネルギーは, 可換. 可逆.

温度変化を伴う項

$p(\nabla \cdot \mathbf{v})$: sudden expansion, or compression.
 $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$: high-speed flow system.

3.5 エネルギー方程式

Transport Phenomena,
p.311.

空間に固定された, stationary (*i.e.*, not moving) な体積要素, $\Delta x \Delta y \Delta z$ のエネルギー収支を考える. (スカラ式となるから, x 成分だけ etc. を特別に考える必要は無い.)

エネルギー保存の法則

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{内部・運動} \\ \text{エネルギーの蓄積} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{移流・対流} \\ \text{による蓄積} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{伝導による} \\ \text{正味の熱の蓄積} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{周囲へ系のする} \\ \text{正味の仕事率} \end{array} \right\}.$$

- 運動エネルギー** : $\frac{1}{2} \rho v^2$
観測される流体の速度に依存.
- 内部エネルギー** : $\hat{U}(T, \rho)$
観測されない分子の速度, 相互作用に依存.
- ポテンシャル・エネルギー**
上の式では, explicit には現れない.

内部・運動エネルギーの蓄積速度

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

正味の convective 内部・運動エネルギー流れ

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z \left[v_x \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_x - v_x \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{x+\Delta x} \right] \\ &+ \Delta x \Delta z \left[v_y \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_y - v_y \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{y+\Delta y} \right] \\ &+ \Delta x \Delta y \left[v_z \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_z - v_z \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{z+\Delta z} \right] \end{aligned}$$

正味の伝導エネルギー流れ

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z [q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}] \\ &+ \Delta x \Delta z [q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}] \\ &+ \Delta x \Delta y [q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}] \end{aligned}$$

注意 $\mathbf{q} \equiv (q_x, q_y, q_z)$
: 熱フラックス・ベクトル

系にする仕事率
(力) × (力方向速度)

重力に抗してする仕事 (体積力)

$$= -\rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$$

静圧に抗してする仕事 (表面力)

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z [(pv_x)|_{x+\Delta x} - (pv_x)|_x] \\ &+ \Delta x \Delta z [(pv_y)|_{y+\Delta y} - (pv_y)|_y] \\ &+ \Delta x \Delta y [(pv_z)|_{z+\Delta z} - (pv_z)|_z] \end{aligned}$$

粘性に抗してする仕事 (表面力)

$$\begin{aligned} &= \Delta y \Delta z \left\{ (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) \Big|_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) \Big|_x \right\} \\ &+ \Delta x \Delta z \left\{ (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \Big|_{y+\Delta y} - (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \Big|_y \right\} \\ &+ \Delta x \Delta y \left\{ (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \Big|_{z+\Delta z} - (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \Big|_z \right\} \end{aligned}$$

エネルギー方程式 (成分表示) $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2) = & \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x (\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y} v_y (\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} v_z (\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2) \right) & \\ - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) & \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} p v_x + \frac{\partial}{\partial y} p v_y + \frac{\partial}{\partial z} p v_z \right) & \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \right) & \end{aligned}$$

エネルギー方程式: ベクトル表記

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$$

(蓄積速度) (移流) (伝導) (重力) (圧力) (粘性力)

式の整理 $\frac{\partial}{\partial t} \rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) + (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \frac{\partial \rho}{\partial t}$, 注意 合成関数の微分

$$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)) = (\nabla (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \cdot \rho \mathbf{v}) + (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}),$$
 注意 (A.3-20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)) = & \\ (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \right)}_{\text{連続の式で 0}} + \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)) \right] \equiv \rho \frac{D}{Dt} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) & \end{aligned}$$

内部・運動 $\rho \frac{D}{Dt} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]),$

運動エネルギー $\rho \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} v^2) = p (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}),$

熱エネルギー方程式 $\rho \frac{D}{Dt} (\hat{U}) = - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{q})}_{\text{伝導}} - \underbrace{p (\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{膨張・圧縮 (可逆)}} - \underbrace{(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})}_{\text{粘性散逸 (不可逆)}} .$

ポテンシャル・エネルギー

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla\hat{\Phi}$$

全エネルギー方程式

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \equiv -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla\hat{\Phi}) = -\rho \frac{D\hat{\Phi}}{Dt} + \rho \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t},$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\hat{U} + \hat{\Phi} + \frac{1}{2}v^2 \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]),$$

内部エネルギーから温度・熱容量へ

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{V}} \right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} dT$$

$$= \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] d\hat{V} + \hat{C}_v dT$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt}.$$

注意 単位質量当りの体積 \hat{V} は、連続の式で消去。

$$\rho \frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

温度によるエネルギー方程式 $\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}).$

温度によるエネルギー方程式, そのII $\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}).$

Newton 流体, constant k $\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -k\nabla^2 T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\Phi_v.$

特殊な場合のエネルギー方程式

粘性散逸項無視.

理想気体 $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \frac{p}{T}$

理想気体 $\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -k\nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{v})$

定圧気体 $d\hat{U} = -pd\hat{V} + \hat{C}_p dT$

密度が温度に依らない場合 $\frac{Dp}{Dt} = 0.$

種々の場合 $\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -k\nabla^2 T$

固体 $\rho \rightarrow \text{constant}, \mathbf{v} = 0.$

注意 式の形は同じだが、左のような全く異なった状況を記述していることに注意.

熱源項 粘性散逸: $\mu\Phi_v$, 化学的: S_c , 電気的: S_e , 原子核的: S_n .

3.6 多成分系での変化方程式

3.6.1 2成分混合物連続の式

Transport Phenomena,
p.555.

空間に固定された, stationary (*i.e.*, not moving) な体積要素,
 $\Delta x \Delta y \Delta z$. の物質 A の収支を考える. 物質 A が, 速度 r_A g/cm³ で生成され
れるとする.

成分 A の Mass Balance

質量変化速度 : $\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$.

面 $x, x + \Delta x$ を

通過する量 : $\Delta y \Delta z \{ n_{Ax}|_x - n_{Ax}|_{x+\Delta x} \}$

成分 A の生成 : $r_A \Delta x \Delta y \Delta z$.

成分 A に対する連続方程式

(mass concentration 表記による)

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right) = r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_A) = \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}_A) = r_A$$

注意 $\mathbf{n}_A \equiv (n_{Ax}, n_{Ay}, n_{Az}) = \rho_A \mathbf{v}_A$

成分 B に対する連続方程式

(mass concentration 表記による)

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \left(\frac{\partial n_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{By}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Bz}}{\partial z} \right) = r_B$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_B) = r_B$$

注意 $\mathbf{n}_B \equiv (n_{Bx}, n_{By}, n_{Bz}) = \rho_B \mathbf{v}_B$

$$\rho \equiv \rho_A + \rho_B \text{ (Tab.16.1-1)}$$

両成分に対する連続方程式

(mass concentration 表記による)

$$\frac{\partial(\rho_A + \rho_B)}{\partial t} + (\nabla \cdot (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)) = \underbrace{r_A + r_B}_{\text{質量保存}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$$

注意 $\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B \equiv \rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B \equiv \rho \mathbf{v}$ (T16.1-3)

モル表記による連続の式書き換え

$$\rho_A [\text{g}/\text{cm}^3] \implies c_A [\text{mol}/\text{cm}^3]$$

$$r_A [\text{g}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})] \implies R_A [\text{mol}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})]$$

$$\mathbf{n}_A [\text{g}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})] \implies \mathbf{N}_A [\text{mol}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})]$$

各成分に対する連続方程式

(molar concentration 表記による)

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{N}_A) = R_A, \quad \frac{\partial c_B}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{N}_B) = R_B$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)) = \underbrace{R_A + R_B}_{\text{常に0とは限らない}}$$

$$\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = c \mathbf{v}^* : \text{molar flux}$$

$$\mathbf{v}^* \equiv \frac{1}{c} (c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B)$$

$$\equiv x_A \mathbf{v}_A + x_B \mathbf{v}_B : \text{molar fraction 表記}$$

混合物に対する連続方程式

(molar flux 表記による)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\nabla \cdot c \mathbf{v}^*) = R_A + R_B$$

3.6.2 連続の式の濃度勾配による表現

成分 A の \mathbf{v} に対する flux(質量平均流速 \mathbf{v} 表記)

質量 flux : $\mathbf{j}_A \equiv \rho_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v})$.

モル flux : $\mathbf{J}_A \equiv c_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v})$.

質量 flux : $\mathbf{n}_A \equiv \rho_A \mathbf{v}_A$

$\equiv \mathbf{j}_A + \rho_A \mathbf{v}$

$\equiv \mathbf{j}_A + \frac{\rho_A}{\rho}(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$

Fick の拡散法則 : $\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$

Fick の拡散法則 : $\mathbf{J}_A = -\rho D_{AB} \nabla x_A$

成分 A に対する連続方程式

(質量平均流速 表記による)

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_A) = r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot (\mathbf{j}_A + \rho_A \mathbf{v})) = r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}) = -(\nabla \cdot \mathbf{j}_A) + r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \rho D_{AB} \nabla \omega_A) + r_A$$

注意 *Transport Phenomena*, p.502 Table 16.2-

1

成分 A の \mathbf{v}^* に対する flux(モル平均流速 \mathbf{v}^* 表記)

質量 flux : $\mathbf{j}_A^* \equiv \rho_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}^*)$.

モル flux : $\mathbf{J}_A^* \equiv c_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}^*)$.

質量 flux : $\mathbf{N}_A \equiv c_A \mathbf{v}_A$

$\equiv \mathbf{J}_A^* + c_A \mathbf{v}^*$

$\equiv \mathbf{J}_A^* + \frac{c_A}{c}(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$

Fick の拡散法則 : $\mathbf{J}_A^* = -c D_{AB} \nabla x_A$

成分 A に対する連続方程式

(モル平均流速 表記による)

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{N}_A) = R_A$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot (\mathbf{J}_A^* + c_A \mathbf{v}^*)) = R_A$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A \mathbf{v}^*) = -(\nabla \cdot \mathbf{J}_A^*) + R_A$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A \mathbf{v}^*) = (\nabla \cdot c D_{AB} \nabla x_A) + R_A$$

特殊な場合の 2 成分連続の式

const. ρ, D_{AB} ← 等温・等圧の希薄溶液

$$(\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}) = \underbrace{\rho_A (\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{密度一定で 0}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A)$$

const. c, D_{AB} ← 等温・等圧の低密度気体

$$(\nabla \cdot c_A \mathbf{v}^*) = \underbrace{c_A (\nabla \cdot \mathbf{v}^*)}_{(c_A/c)(R_A+R_B)} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla c_A)$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A) \equiv \frac{D \rho_A}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) \equiv \frac{D c_A}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 c_A + R_A$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla c_A) = D_{AB} \nabla^2 c_A + R_A + \frac{c_A}{c} (R_A + R_B)$$

流速ゼロ, 反応生成なし: 固体, 静止流体 ($\mathbf{v} = 0$). 等モル拡散 ($\mathbf{v}^* = 0$).注意 $r_A = 0, R_A = 0$ の時, エネルギー方程式と同じ形. → 相似. $\rho_A \equiv c_A M_A$

エネルギー方程式 $\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -k \nabla^2 T$

Fick の拡散第 2 則 (Diff.Eq.) $\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A$

3.6.3 Flux 表記による多成分変化方程式

連続	$\frac{D}{Dt}\rho_i = -\rho_i(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}_i) + r_i, \quad i = 1, 2 \dots n.$
$\frac{D}{Dt}$ 表示	運動
	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -[\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}] + \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{g}_i$
エネルギー	$\rho \frac{D}{Dt} \left\{ \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right\} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{g}_i)$

圧力テンソル

$\pi \equiv \tau + p\delta$
 $(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \rightarrow (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{g}_i)$
 \mathbf{q} : 質量平均速度 \mathbf{v} に対する多成分エネルギー・フラックス.

連続	$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i = -(\nabla \cdot \{\rho_i \mathbf{v} + \mathbf{j}_i\}) + r_i, \quad i = 1, 2 \dots n.$
$\frac{\partial}{\partial t}$ 表示	運動
	$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \boldsymbol{\pi}\}] + \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{g}_i$
エネルギー	$\frac{\partial}{\partial t}\rho \left\{ \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right\} = -(\nabla \cdot \{\rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \mathbf{v} + \mathbf{q} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]\}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{g}_i)$

その他必要事項

1. 状態方程式
 $p = P(\rho, T, x_i)$
 $\hat{U} = \hat{U}(\rho, T, x_i)$
2. chemical kinetics
3. flux と勾配, 輸送係数との関係
4. 輸送係数 (ρ, T, x_i)

空間に固定された座標系に対する flux

質量	$\mathbf{n}_i = \rho_i \mathbf{v} + \mathbf{j}_i = \rho \omega_i \mathbf{v} + \mathbf{j}_i$
運動量	$\Phi = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \boldsymbol{\pi}$
エネルギー	$\mathbf{e} = \rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \mathbf{v} + \mathbf{q} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]$

(注意) 外力なし反応なしの1次元, 定常状態では上記の flux は一定.

連続	$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i = -(\nabla \cdot \mathbf{n}_i) + r_i, \quad i = 1, 2 \dots n.$
運動	$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \Phi] + \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{g}_i$
エネルギー	$\frac{\partial}{\partial t}\rho \left\{ \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right\} = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{g}_i)$

3.6.4 輸送係数表記による多成分 flux

質量 flux : Newton 流体の粘性テンソル

$$\boldsymbol{\tau} \text{ (2階テンソル)} = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) + \left(\frac{2}{3} - \kappa\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta$$

注意 $\delta \equiv (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$: 単位テンソル. δ_i : 単位ベクトル.

dyadic product

$$\nabla \mathbf{v} \equiv \sum_{i,j} \delta_i \delta_j \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

$$(\nabla \mathbf{v})^\dagger \equiv \sum_{i,j} \delta_i \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$$

unit dyads

$$\delta_2 \delta_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

etc.

Tensor, Dyad の演算については, *Transport Phenomena*, p.726~ の §A.4 を参照のこと.

エネルギー・フラックス

$$\mathbf{q} = \underbrace{\mathbf{q}^c}_{\text{伝導}} + \underbrace{\mathbf{q}^d}_{\text{相互拡散}} + \underbrace{\mathbf{q}^x}_{\text{Dufour 効果}}$$

$$\mathbf{q}^c = -k\nabla T$$

$$\mathbf{q}^d = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{H}_i}{M_i} \mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^n \bar{H}_i \mathbf{J}_i$$

\bar{H}_i : i種の部分モル・エンタルピ

\mathbf{q}^x : 極めて複雑, 通常無視可

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} + \mathbf{q} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] \\ &\simeq -k\nabla T + \sum_{i=1}^n \bar{H}_i \mathbf{J}_i + \rho \mathbf{v} + \rho \hat{U} \mathbf{v} \\ &= -k\nabla T + \sum_{i=1}^n \bar{H}_i \mathbf{J}_i + \rho \hat{H} \mathbf{v} \\ &= -k\nabla T + \sum_{i=1}^n \bar{H}_i \mathbf{J}_i + \sum_{i=1}^n c_i \bar{H} \mathbf{v} \\ &\equiv -k\nabla T + \sum_{i=1}^n \bar{H}_i \mathbf{N}_i \end{aligned}$$

質量フラックス

$$\mathbf{j}_i = \underbrace{\mathbf{j}_i^x}_{\text{通常拡散}} + \underbrace{\mathbf{j}_i^p}_{\text{圧力拡散}} + \underbrace{\mathbf{j}_i^g}_{\text{強制拡散}} + \underbrace{\mathbf{j}_i^T}_{\text{熱拡散}}$$

$$\mathbf{j}_i^x = \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j \sum_{k=1, k \neq j}^n \left(\frac{\partial \bar{G}_j}{\partial x_k} \right)_{T,p,x_s; s \neq j,k} \nabla x_k \right]$$

$$\mathbf{j}_i^p = \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j M_j \left(\frac{\bar{V}_j}{M_j} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla p \right]$$

$$\mathbf{j}_i^g = -\frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j M_j \left(\mathbf{g}_j - \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{\rho} \mathbf{g}_k \right) \right]$$

$$\mathbf{j}_i^T = -D_i^T \nabla \ln T$$

多成分系拡散係数

$D_{ij}^{(n)}$ is not usually equal to $D_{ji}^{(n)}$, when $n > 2$.

$$D_{ii}^{(n)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n D_i^T = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n \{ M_i M_h D_{ih}^{(n)} - M_i M_k D_{ik}^{(n)} \} = 0.$$

\bar{G}_j : 部分モル自由エンタルピ

(Gibbs free energy)

\bar{V}_j : 部分モル体積

質量フラックス : 理想気体

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i^x &= \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j \sum_{k=1, k \neq j}^n \left(\frac{-RT}{x_j} \right) \nabla x_k \right] \\ &= -\frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \sum_{k=1, k \neq j}^n \nabla x_k \\ &= \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \nabla x_j \\ \mathbf{j}_i^p &= \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j M_j \frac{RT}{p} \left(\frac{1}{M_j} - \frac{1}{M} \right) \nabla p \right] \\ &= \frac{c^2}{\rho} \frac{\nabla p}{p} M_i \sum_{j=1}^n M_j D_{ij}^{(n)} \left[x_j \left(1 - \frac{M_j}{M} \right) \right] \end{aligned}$$

Stefan-Maxwell 式

$$\begin{aligned} \nabla x_i &= \sum_{j=1}^n \frac{c_i c_j}{c^2 D_{ij}} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{c D_{ij}} (x_i \mathbf{N}_j - x_j \mathbf{N}_i) \end{aligned}$$

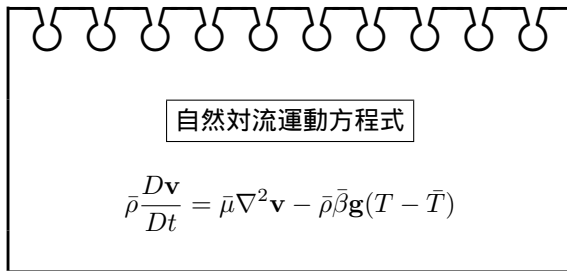
$$\begin{aligned} \frac{D_{12}^{(n=3)}}{D_{12}} &= \\ &1 + \frac{x_3 [(M_3/M_2)D_{13} - D_{12}]}{x_1 D_{23} + x_2 D_{13} + x_3 D_{12}} \end{aligned}$$

3.7 自然対流の運動方程式

Navier-Stokes Equation

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

この式は, ρ, μ が constant で導かれたものであるが, 密度が一様でないことによって生じる効果を運動方程式の浮力の項にのみ取り入れる近似を Boussinesq 近似と呼び, 自然対流の解析に用いられる.



自然対流運動方程式

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \bar{\mu} \nabla^2 \mathbf{v} - \bar{\rho} \bar{\beta} \mathbf{g} (T - \bar{T})$$

温度・濃度が一様でない時の運動方程式

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \bar{\mu} \nabla^2 \mathbf{v} - \bar{\rho} \bar{\beta} \mathbf{g} (T - \bar{T}) - \bar{\rho} \bar{\zeta} \mathbf{g} (x_A - \bar{x}_A)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots \\ &= \bar{\rho} - \bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) + \dots \end{aligned}$$

但し, $\beta \equiv$ 体膨張係数

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{(1/\rho)} \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right)_p \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

更に, $\nabla p = \bar{\rho} \mathbf{g}$ を仮定する. この $\bar{\rho}$ は, 代表温度 \bar{T} で評価された密度であって, 平均密度を表すわけではない.

但し, 上にバーのついた量は, \bar{T} で評価することを示す. この温度を, 代表温度, または基準温度と呼ぶが, この決め方には注意を要する.

$$\zeta \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_A} \right)_T$$

組成で密度が変化する割合を示す量

3.8 多孔性固体中の流れ方程式

参考書

- M.Kaviany: "Principles of Heat Transfer in Porous Media", (1991), Springer.

連続の式

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}_s)$$

- ρ : 多孔性固体中の流体の密度
- ϵ : 多孔性固体の空隙率
- \mathbf{v} : 多孔性固体中の流体の実際の速度
- $\mathbf{v}_s \equiv \epsilon \mathbf{v}$: 空塔速度: superficial velocity

多孔性固体単位体積当り固体部分が流体に及ぼす力

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu}{\kappa} \mathbf{v}_s, \quad \kappa: \text{透過係数 (permeability)}$$

Darcy の法則

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g})$$

運動方程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) (\mathbf{v}_s / \epsilon) = -\nabla(\epsilon p) - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s] + \rho \epsilon \mathbf{g} + \mathbf{F}_s$$

空隙率・密度・粘性が一定

$$\frac{\rho}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \frac{\rho}{\epsilon^2} (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\nabla p + \frac{\mu}{\epsilon} \nabla^2 \mathbf{v}_s + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}$$

粘性力 (直角座標): $(\tau_s)_{ij} =$

$$-\epsilon \mu \left[\frac{\partial (v_{si})}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_{sj})}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \epsilon \mu (\nabla \cdot \frac{\mathbf{v}_s}{\epsilon})$$

\mathbf{F}_s : 多孔性固体単位体積が流体に及ぼす力.

$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_s / \epsilon$: 単位体積流体が固体より受ける力.

注意 Darcy の式は, 透過係数の定義と速度分布一様の式 $0 = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}$ から導かれる.
一方, 多孔性固体の固体部分が, 平均的に直径 d_p の球で充填されている, と仮定.

層流: Blake-Kozeny 式

$$\mathbf{F} = -\frac{150\mu}{d_p^2} \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \mathbf{v}_s$$

$$\text{従って } \kappa = \frac{d_p^2}{150\mu} \frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon)^2}$$

乱流: Burke-Plummer 式

$$\mathbf{F} = -\frac{1.75\rho}{d_p} \frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} |\mathbf{v}_s| \mathbf{v}_s$$

層流式 + 乱流式 = Ergun の式.

熱エネルギーは, 流体部分のみならず固体部分にも伝わるから, 両方のエネルギー式が必要. 添え字 sol は, 固体部分を表す.

Q : 固体単位体積から流体に伝わる熱.

$$Q = ha(T_{sol} - T)$$

a : 多孔性固体単位体積当りの固体と流体の接触面積

h : 熱伝達係数.

空隙率・密度・熱伝導率が一定時のエネルギー方程式

$$\rho \epsilon \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \hat{C}_p (\mathbf{v}_s \cdot \nabla T) = -k \epsilon \nabla^2 T - \frac{1}{\epsilon} [\boldsymbol{\tau}_s : \nabla \mathbf{v}_s] + Q$$

$$\rho_{sol} (1-\epsilon) \hat{C}_{p,sol} \frac{\partial T_{sol}}{\partial t} = -k_{sol} (1-\epsilon) \nabla^2 T_{sol} - Q$$

空隙率・密度・熱伝導率が一定で, 固体と流体の温度が等しい時のエネルギー方程式

$$\left[\rho \epsilon \hat{C}_p + \rho_{sol} (1-\epsilon) \hat{C}_{p,sol} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \hat{C}_p (\mathbf{v}_s \cdot \nabla T) = -k_e \nabla^2 T - \frac{1}{\epsilon} [\boldsymbol{\tau}_s : \nabla \mathbf{v}_s]$$

$$\mathbf{q}_e \equiv k_e \nabla T,$$

k_e : 有効熱伝導率

空隙率・密度・拡散係数が一定時の濃度変化の式

$$\epsilon \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}_s) = D \epsilon \nabla^2 \rho_A + r_A + J_A$$

J_A : 固体単位体積から流体に移動する A の質量.

r_A : 多孔性固体単位体積当り化学反応で生成する成分 A の質量

3.9 二相流の変化方程式

参考書

- 秋山 守: “原子力熱工学”, 東京大学出版会 (1978).
- 安達 ^{ひろみち} 公道: “二相流力学の基礎”, pp.123, 理工学社 (1991).
- 日本流体力学会= 編集: “混相流体の力学”, 朝倉書店 (1991).
- 日本原子力学会熱流動部会 編: “気液二相流の数値解析”, 朝倉書店 (1993).
- M.Kaviany: “Principles of Convective Heat Transfer”, Springer, (1994).

流動様式 (Flow Pattern)

垂直沸騰流路の流動は温度上昇に伴い, 液単相流から次のように変化する.

気泡流 連続した液相中に分散した小気泡が流れる.

スラグ流 流路断面全体を満たすような大きな砲弾状の気泡と小気泡を含む液相部分が交互に存在.

フロス流 形の整わない大小多数の気泡が激しくかき回され液相内を流れる. churn turbulent 流.

環状噴霧流 壁面上に液膜が存在し, 流路断面中央部 (core) には多数の液滴をを伴う気相が流れる.

噴霧流 環状噴霧流が発達して壁面上の液膜が消失.

液欠乏噴霧流 過熱蒸気の単相流.

流動様式は流路の姿勢, 形状, 寸法をはじめ, 気液の物性値, 流量, 圧力等多くの因子の影響を受ける. 与えられた条件での流動様式を予測するには, 経験的に得られたフローマップによる.

二相流基本量

クオリティ

(気相質量流量/全質量流量)

$$x = \rho_g v_g A_g / (\rho_g v_g A_g + \rho_l v_l A_l)$$

ボイド率 (気相の占める流路中斷面積/全流路斷面積)

$$\alpha = A_g / (A_g + A_l)$$

速度比 (気相流速/液相流速)
スリップ比とも呼ぶ.

$$S = v_g / v_l = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{x}{1 - x} \frac{\rho_l}{\rho_g}$$

圧力損失と摩擦損失 θ : 上昇流 90°, 水平: 0

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_g \alpha v_g + \rho_l (1 - \alpha) v_l \}}_{\text{時間的变化: 慣性項}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \{ \rho_g \alpha v_g^2 + \rho_l (1 - \alpha) v_l^2 \}}_{\text{相変化体積変化: 加速損失項}} + \underbrace{F_w}_{\text{摩擦損失項}} + \underbrace{\{ \rho_g \alpha v_g + \rho_l (1 - \alpha) v_l \} g \sin \theta}_{\text{水頭損失項}} = - \frac{\partial P}{\partial z}$$

摩擦損失については, 変数 (両相の流速とボイド率) と物性値から直接求めることができず, 構成式を用いる. Lockhart-Martinelli モデルが広く利用される.

沸騰危機 沸騰モードが急激に変化し熱伝達特性が劣化すること. この沸騰危機が生じる熱流束を限界熱流束と呼ぶ.

バーンアウト 核沸騰 (nuclear boiling) から膜沸騰に向けての沸騰遷移による. DNB (Departure from NB), CHF (Critical Heat Flux)

ドライアウト 高クオリティ下で液相の欠乏による.

3.10 化学反応速度論

参考書

- J.I.Steinfeld, J.S.Francisco, W.L.Hase: "Chemical Kinetics and Dynamics", Prentice-Hall,(1989).
- 富永博夫, 河本邦仁: "反応速度論", (1994), 昭晃堂.

Stoichiometric Eq.(化学量論式)

$$aA + bB \longrightarrow cC + dD$$

a, b : Reactants のモル数
 c, d : Products のモル数
 $[X]$: X の濃度

反応率 (Rate of Reaction): R

$$R = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt}$$

$$R = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$$

反応次数

$$R = k[A]^m[B]^n$$

k : rate constant(反応速度定数)
 m : Reactant A に関する反応次数
 n : Reactant B に関する反応次数

Molecularity

いくつの Reactants が反応に寄与するか

Unimolecular : 1 分子のみ
 Bimolecular : 2 分子の反応
 Termolecular : 3 分子の反応

0 次反応例

1 次反応例

2 次反応例

$$\begin{array}{lll}
 \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^0 & \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^1 & \frac{d[A]}{dt} = -2k[A]^2 \\
 [A]_t = [A]_0 - kt & [A]_t = [A]_0 \exp(-kt) & \frac{1}{[A]_t} = \frac{1}{[A]_0} - 2kt
 \end{array}$$

平衡移行関係

例

$$H_2 + I_2 \rightleftharpoons 2HI$$

k_f : 右向き反応速度定数
 k_b : 左向き反応速度定数
 $K_{eq} \equiv k_f/k_b = \frac{[HI]_{eq}^2}{[H_2]_{eq}[I_2]_{eq}}$
: 平衡定数

$$\begin{aligned}
 \frac{d[HI]}{dt} &= 2k_f[H_2][I_2] - 2k_r[HI]^2 \\
 &= 2k_f \left\{ [H_2][I_2] - \frac{1}{K_{eq}} [HI]^2 \right\} \\
 \frac{d[H_2]}{dt} &= -k_f[H_2][I_2] + k_r[HI]^2 \\
 \frac{d[I_2]}{dt} &= -k_f[H_2][I_2] + k_r[HI]^2
 \end{aligned}$$

第4章 変化方程式の次元解析

4.1 連続・運動方程式

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">通常流れシステム *</div> <p>代表長さ : D 代表速度 : V 代表時間 : D/V 代表圧力 : p_0 or, ρV^2</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">自然対流システム **</div> <p>代表速度 : $\mu/\rho D$ 代表時間 : $\rho D^2/\mu$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">無次元数</div> <p>$\mathbf{r}^* \equiv (x^*, y^*, z^*) = \mathbf{r}/D$ $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/V, \quad \mathbf{v}^{**} = \rho \mathbf{v} D / \mu$ $t^* = tV/D, \quad t^{**} = t\mu/\rho D^2$ $p^* = (p - p_0)/p_0, \text{ or, } (p - p_0)/\rho V^2$</p> <p>$\nabla^* \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = D\nabla, \quad \frac{D}{Dt^*} = \left(\frac{D}{V} \right) \frac{D}{Dt}$ $\nabla^{*2} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}, \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}, \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right) = D^2\nabla^2$</p>
---	---

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">const ρ, μ, Newton 流体の変化方程式</div> <p>連続 : $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ 運動 : $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$</p>	$(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0, \quad \frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} =$ $-\nabla^* p^* + \left[\frac{\mu}{\rho V D} \right] \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \left[\frac{gD}{V^2} \right] \frac{\mathbf{g}}{g}$
--	---

\downarrow 代入

$\left(\frac{1}{D} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* V \right) = 0, \quad \rho \left(\frac{V}{D} \right) \frac{D\mathbf{v}^* V}{Dt^*} =$ $-\left(\frac{1}{D} \nabla^* p \rho V^2 \right) + \mu \frac{1}{D^2} \nabla^{*2} (\mathbf{v}^* V) + \rho \mathbf{g}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $\text{Re} = \left[\frac{\rho V D}{\mu} \right]$ Reynolds number $\text{Fr} = \left[\frac{V^2}{gD} \right]$ Froude number </div>
---	---

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">無次元運動方程式</div> $\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g}$	<p>幾何学的相似 : $\left. \begin{array}{l} \text{無次元初期条件} \\ \text{無次元境界条件} \end{array} \right\} \text{同一}$ の場で, 無次元グループ Re, Fr が同一.</p> <p style="text-align: center;">\downarrow</p> <p>力学的相似 : $\left. \begin{array}{l} \text{無次元速度分布} \\ \text{無次元圧力分布} \end{array} \right\} \text{同一}$</p>
--	--

4.2 エネルギー方程式

流れシステム

代表温度 : T_0 代表温度差 : ΔT
 $\equiv T_1 - T_0$

無次元数

 $T^* = (T - T_0)/T_0$,
or, $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$.const ρ, μ , Newton 流体の変化方程式連続 : $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ 運動 : $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g}$ 強制対流運動 : $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \beta \mathbf{g} (T - \bar{T})$ 自然対流エネルギー : $\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v$ 強制対流 $(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0$,

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^{*2} T^* + \frac{\text{Br}}{\text{RePr}} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

自然対流 $(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^{**}) = 0$,

$$\frac{D\mathbf{v}^{**}}{Dt^{**}} = \nabla^{*2} \mathbf{v}^{**} - T^* \mathbf{Gr} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

$$\frac{DT^*}{Dt^{**}} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^{*2} T^*$$

無次元グループ

$$\text{Pr} = \left[\frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right] \text{ Prandtl number}$$

$$\text{Br} = \left[\frac{\mu V^2}{k \Delta T} \right] \text{ Brinkman number}$$

$$\text{Ec} \equiv \frac{\text{Br}}{\text{Pr}} = \left[\frac{V^2}{\hat{C}_p \Delta T} \right] \text{ Eckert number}$$

$$\text{Gr} = \left[\frac{g \rho^2 \beta \Delta T D^3}{\mu^2} \right] \text{ Grashof number}$$

注意 強制対流と自然対流では無次元化の基準が異なる。
自然対流では粘性散逸項無視。

発熱流体の自然対流に対する変化方程式

$$\boxed{\text{連続}} : (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

$$\boxed{\text{運動}} : \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \beta g (T - \bar{T}) \quad \boxed{\text{自然対流}}$$

$$\boxed{\text{エネルギー}} : \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \rho E_0, \quad E_0 : \text{単位密度発熱量}$$

流れシステム

代表温度 : T_0
 代表温度差 : ΔT
 定義不可能

無次元温度

$$T^* = (T - T_0)/T_0, \\ T^{**} \equiv T^*/\text{DaIV}.$$

$$\boxed{\text{無次元化, I}} \quad (\nabla^* \cdot \mathbf{v}^{**}) = 0,$$

$$\frac{D\mathbf{v}^{**}}{Dt^*} = \nabla^{*2} \mathbf{v}^{**} - T^* \mathbf{Ga} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{Pr}} [\nabla^{*2} T^* + \text{DaIV}]$$

$$\boxed{\text{無次元化, II}} \quad (\nabla^* \cdot \mathbf{v}^{**}) = 0,$$

$$\frac{D\mathbf{v}^{**}}{Dt^{**}} = \nabla^{*2} \mathbf{v}^{**} - T^{**} \mathbf{GaDaIV} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

$$\frac{DT^{**}}{Dt^{**}} = \frac{1}{\text{Pr}} [\nabla^{*2} T^{**} + 1]$$

注意 熱伝達: $Q \equiv h_m A \Delta T_{max}$, $A \equiv D^2$, $Q \equiv \rho E_0 D^3$, $\Delta T_{max} \equiv T_0 \cdot \text{DaIV} \cdot T_{max}^{**} \rightarrow h_m = k / (DT_{max}^{**}) \rightarrow \text{Nu}_m \equiv h_m \cdot D / k = 1 / T_{max}^{**}$.

無次元グループ

$$\text{Pr} = \left[\frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right] \quad \text{Prandtl number}$$

$$\text{Gr} = \left[\frac{g \rho^2 \beta \Delta T D^3}{\mu^2} \right] \quad \text{Grashof number}$$

$$\text{Ga} = \left[\frac{g \rho^2 \beta T_0 D^3}{\mu^2} \right] \quad \text{Galileo number}$$

$$\text{DaIV} = \left[\frac{\rho D^2 E_0}{k T_0} \right] \quad \text{Damköhler group IV}$$

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{GaDaIV} = \left[\frac{g \rho^3 D^5 E_0}{\mu^2 k T_0} \right] \quad \text{新定義}$$

4.3 2成分・等温拡散方程式

拡散システム

代表濃度 : x_{A0}
 代表濃度差 : Δx_A
 $\equiv x_{A1} - x_{A0}$

無次元数

$$x_A^* = \frac{(x_A - x_{A0})}{(x_{A1} - x_{A0})}$$

連続 : $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$

連続: 成分 A : $\frac{Dx_A}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 x_A$

運動 : $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g}$ 強制対流

運動 : $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \zeta \mathbf{g} (x_A - x_{A0})$ 自然対流

強制対流 $(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0,$

$$\frac{Dx_A^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{ReSc}} \nabla^{*2} x_A^*$$

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

自然対流 $(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^{**}) = 0,$

$$\frac{Dx_A^*}{Dt^{**}} = \frac{1}{\text{Sc}} \nabla^{*2} x_A^*$$

$$\frac{D\mathbf{v}^{**}}{Dt^{**}} = \nabla^{*2} \mathbf{v}^{**} - x_A^* \text{Gr}_{AB} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

無次元グループ

$$\text{Sc} = \left[\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right] \text{ Schmidt number}$$

$$\text{Pe} \equiv \text{Re} \cdot \text{Sc} = \left[\frac{VD}{D_{AB}} \right] \text{ Peclet number}$$

$$\text{Gr}_{AB} = \left[\frac{g \rho^2 \zeta \Delta x_A D^3}{\mu^2} \right] \text{ Grashof number}$$

for mass transfer

4.4 無次元グループの意味

$\mathbf{Re} = \left[\frac{\rho V^2 / D}{\mu V / D^2} \right] = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}}$ $\mathbf{Fr} = \left[\frac{\rho V^2 / D}{\rho g} \right] = \frac{\text{慣性力}}{\text{重力}}$ $\frac{\mathbf{Gr}}{\mathbf{Re}^2} = \left[\frac{\rho g \beta \Delta T}{\rho V^2 / D} \right] = \frac{\text{浮力}}{\text{慣性力}}$ $\mathbf{PrRe} = \left[\frac{\rho \hat{C}_p V \Delta T / D}{k \Delta T / D^2} \right] = \frac{\text{対流熱輸送}}{\text{伝導熱輸送}}$ $\mathbf{Br} = \left[\frac{\mu (V/D)^2}{k \Delta T / D^2} \right] = \frac{\text{粘性散逸熱発生}}{\text{伝導熱輸送}}$ $\mathbf{Pr} = \left[\frac{\mu \hat{C}_p}{k} \right] = \frac{\text{運動量拡散率}}{\text{熱拡散率}}$	$\mathbf{Sc} = \left[\frac{\mu / \rho}{D_{AB}} \right] = \frac{\text{動粘性係数}}{\text{分子拡散率}}$ $\mathbf{Pe} \equiv \mathbf{Re} \cdot \mathbf{Sc} = \left[\frac{VD}{D_{AB}} \right] = \frac{\text{バルク質量輸送}}{\text{拡散質量輸送}}$ $\mathbf{Gr}_{AB} = \left[\frac{g \rho^2 \zeta \Delta x_A D^3}{\mu^2} \right] = \frac{(\text{浮力})(\text{慣性力})}{(\text{粘性力})^2}$ $\frac{\mathbf{Ga}}{\mathbf{Re}} = \left[\frac{\rho g}{\mu V / D^2} \right] = \frac{\text{重力}}{\text{粘性力}}$ $\mathbf{DaIV} = \left[\frac{\rho D^2 E_0}{k T_0} \right] = \frac{\text{発生熱}}{\text{伝導熱輸送}}$ $\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Re}} = \left[\frac{(\rho g)(\rho D^2 E_0)}{(\mu V / D^2)(k T_0)} \right] = \frac{(\text{重力})(\text{発生熱})}{(\text{粘性力})(\text{伝導熱輸送})}$
---	--

参考書 McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology, vol.4,
pp.200~216, Dimensionless groups,(1977).

第5章 乱流

5.1 流れの安定性

無次元運動方程式

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g}$$

無次元グループ

$$\text{Re} = \left[\frac{\rho V D}{\mu} \right] \quad \text{Reynolds number}$$

$$\text{Fr} = \left[\frac{V^2}{g D} \right] \quad \text{Froude number}$$

粘性流

Re の値がある程度以上に大
 → 外部からの攪乱に対して不安定
 → 流れは崩れて他の形の流れに移行

流れの安定性

一つの粘性流が現実存在する条件
 → 外部からの攪乱に対して安定
 → 安定性の限界を見いだす問題
 → 流体力学的安定性問題

円管中流れの乱流移行:歴史

1839. Hagen 流速がある限界を超えると水流が振動を始める。この移行が、管直径・速度・水温に関係することを解明。

1883. Reynolds 流れの安定性に関する最初の組織的実験研究。移行が、無次元数 Re のみに関係することを解明。

1923. Taylor 同軸円筒間の Couette 流れの安定性に関する実験と理論的研究。両者が一致した初の例。

臨界レイノルズ数

$$\text{Re} = \left[\frac{\rho V D}{\mu} \right] \quad \text{Reynolds number}$$

Reynolds 実験	$\text{Re}_c \simeq 2100$
微小攪乱線形理論	$\text{Re}_c = \infty$
助走流軸対称攪乱	$\text{Re}_c = 19900$

層流
(Hagen-Poiseuille 流)

$$\frac{v_z}{v_{z,max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,max}} = \frac{1}{2}$$

圧力降下 \propto 体積流量率

乱流
($10^4 < \mathbf{Re} < 10^5$)

$$\frac{\bar{v}_z}{v_{z,max}} = \left[1 - \frac{r}{R}\right]^{\frac{1}{7}}$$

$$\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,max}} = \frac{4}{5}$$

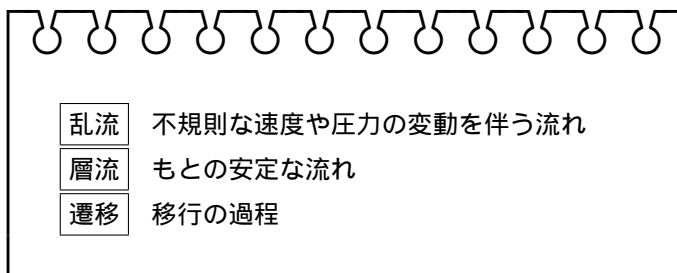
圧力降下 \propto (体積流量率) $^{\frac{7}{4}}$



円管中流れ
 $\mathbf{Re} < 2100$, **層流**

乱流は円管中のすべての領域に及ぶわけではない。

- laminar sublayer near tube wall
- buffer zone
- region of fully developed turbulence



乱流 不規則な速度や圧力の変動を伴う流れ
層流 もとの安定な流れ
遷移 移行の過程

不安定な層流

乱流に遷移しない場合

1. 複雑な空間構造を持つ流れ
2. 周期的な変動を持つ流れ, etc.

何段階かの移行後, 乱流になる。

Benard 対流

下側の方が温度の高い水平 2 平面の間にかかる自然対流。独特の六角形構造。無次元量 $\mathbf{Ra} \equiv \mathbf{Gr} \cdot \mathbf{Pr}$ で対流の起こる条件が記述される (上下境界とも固体の場合, $\mathbf{Ra} > 1708$, 上側が自由表面の場合 $\mathbf{Ra} > 1108$)。二種類の密度の異なる流体が平面状の境界で接していて, 重い方が上にある時, 軽い方の流体の下に潜り込もうとして起こる不安定を Rayleigh-Taylor instability と呼ぶ。

Taylor の流れ

異なった角速度で回転する, 無限に長い同心 2 円筒間の粘性流れ。Navier-Stokes 式の解: Couette 流 (cf. *Trans.Phén.*p.94) は, ある範囲でのみ存在。臨界テイラー数を超えると, 軸方向に周期的な構造を持つ第二の層流に遷移。更には, より細かな空間的構造の第三の層流に移行するか, 非軸対称な螺旋流, 振動流になり, 何段階かを経て乱流に遷移。Poiseuille 流の場合の瞬間的とは対照的。

参考書

- S.Chandrasekhar: "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford(1961).
- 巽 友正: "流体力学", 16 章 (流れの安定性), 17 章 (乱流). 培風館 (1982).

5.2 乱流の運動方程式

時間平均速度

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

$$\bar{v}_z \equiv \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v_z dt, \quad \text{時間平均速度}$$

v'_z : **速度の攪乱 (fluctuation)**

$$\bar{v}'_z \equiv 0, \quad \overline{v'^2_z} \neq 0$$

乱流の強さ

$$\sqrt{\overline{v'^2_z}} / \langle \bar{v}_z \rangle$$

管内流の場合 1 ~ 10%

乱流式の導出

(constant ρ , Newton 流体, 非圧縮流)

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad p = \bar{p} + p'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$$

x-成分

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{v}_x = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x + \rho g_x$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{v}_x \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{v}_y \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{v}_z \bar{v}_x \right)$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{v}'_x \bar{v}'_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{v}'_y \bar{v}'_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{v}'_z \bar{v}'_x \right)$$

時間平均連続の式

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

時間平均運動方程式

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(l)}] - [\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}] + \rho \mathbf{g}$$

Reynolds stress

$$\{\tau_{ij}^{(t)}\} \equiv \{\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j\}$$

Reynolds stress の表現 (semi-empirical)
(turbulent momentum flux, eddy transport of momentum)

Boussinesq 渦粘性

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

$\mu^{(t)}$: 乱流粘性係数,
or, eddy viscosity

Prandtl's Mixing Length

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

l : mixing length, $l = \kappa_1 y$

von Kármán's 相似仮説

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho \kappa_2^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

κ_2 : 0.40, 0.36

壁近傍領域の Deissler 実験式 $\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho n^2 \bar{v}_x y \{1 - \exp(-n^2 \bar{v}_x y / \nu)\} d\bar{v}_x / dy, (n=0.124)$

5.3 乱流のエネルギー方程式

$$T = \bar{T} + T'$$

時間平均温度 $\bar{T} \equiv \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} T dt$

温度の攪乱 (fluctuation): T'

$$\bar{T}' \equiv 0, \quad \{\overline{v'_i T'}\} \neq 0$$

乱流式の導出

(constant ρ, μ, k, \hat{C}_p)

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad T = \bar{T} + T'$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \hat{C}_p T \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \bar{v}_x \bar{T} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \bar{v}_y \bar{T} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \bar{v}_z \bar{T} \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \overline{v'_x T'} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \overline{v'_y T'} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \overline{v'_z T'} \right) \\ & + k \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}'_y}{\partial x} \right) + \dots \right] \\ & + \mu \left[2 \frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \bar{v}'_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}'_y}{\partial x} + \dots \right] \end{aligned}$$

乱流エネルギー・フラックス

$$\mathbf{q}^{(t)} \equiv \rho \hat{C}_p (\overline{v'_x T'}, \overline{v'_y T'}, \overline{v'_z T'})$$

乱流エネルギー散逸関数

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(t)} \equiv & \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_j}{\partial x_i}} \right) \end{aligned}$$

時間平均エネルギー方程式

$$\rho \hat{C}_p \frac{D \bar{T}}{D t} = -(\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}^{(l)}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}^{(t)}) + \mu \bar{\Phi}_v^{(l)} + \mu \bar{\Phi}_v^{(t)}$$

$$\mathbf{q}^{(l)} = -k \nabla \bar{T}$$

$\bar{\Phi}_v^{(l)}$: 粘性散逸関数, \bar{v}_i instead of v_i .

乱流エネルギー・フラックスの表現 (semi-empirical)

渦熱伝導率

$$\bar{q}_y^{(t)} = -k^{(t)} \frac{d\bar{T}}{dy}$$

$k^{(t)}$: 乱流熱伝導係数,
or, eddy conductivity

Prandtl, Taylor 混合距離

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy}$$

$$\nu^{(t)} \equiv \mu^{(t)} / \rho \simeq \alpha^{(t)} \equiv k^{(t)} / \rho \hat{C}_p$$

von Kármán's 相似仮説

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p \kappa_2^2 \left| \frac{d\bar{v}_x/dy}{(d^2 \bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{T}}{dy}$$

$$\nu^{(t)} / \alpha^{(t)} = 0.5 \text{ (ジェット流, 伴流), } \\ 0.7 \sim 0.9 \text{ (管内流)}$$

壁近傍領域の Deissler 実験式 $\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p n^2 \bar{v}_x y \{1 - \exp(-n^2 \bar{v}_x y / \nu)\} d\bar{T} / dy, (n=0.124)$

5.4 乱流の質量輸送方程式

$c_A = \bar{c}_A + c'_A$

時間平均濃度 $\bar{c}_A \equiv \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} c_A dt$

濃度の攪乱 (fluctuation) : c'_A

$\bar{c}'_A \equiv 0, \quad \{\overline{v'_i c'_A}\} \neq 0$

n-次反応の乱流式の導出
(constant ρ, D_{AB}, T)

$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad c_A = \bar{c}_A + c'_A$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) + D_{AB} \nabla^2 c_A - \begin{cases} k_1''' c_A \\ k_2''' c_A^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial t} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_x \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_y \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z \bar{c}_A \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_x c'_A} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_y c'_A} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z c'_A} \right) \\ & + D_{AB} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial z^2} \right) \\ & - \begin{cases} k_1''' \bar{c}_A \\ k_2''' (\bar{c}_A^2 + \overline{c_A'^2}) \end{cases} \end{aligned}$$

乱流運動量・フラックス

$\{\tau_{ij}^{(t)}\} \equiv \{\overline{v'_i v'_j}\}$: テンソル

乱流質量フラックス

$\bar{J}_i^{(t)} \equiv \overline{v'_i c'_A}$: ヴェクトル

時間平均 A 成分連続の式

$$\frac{D\bar{c}_A}{Dt} = -(\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_A^{(l)}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_A^{(t)}) - \begin{cases} k_1''' \bar{c}_A \\ k_2''' (\bar{c}_A^2 + \overline{c_A'^2}) \end{cases}$$

$\mathbf{J}_A^{(l)} = -D_{AB} \nabla \bar{c}_A$
D/Dt operator: $\bar{\mathbf{v}}$ instead of \mathbf{v} .

乱流質量・フラックスの表現 (semi-empirical)

渦拡散率

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -D_{AB}^{(t)} \frac{d\bar{c}_A}{dy}$$

$D_{AB}^{(t)}$: 乱流拡散係数,
or, eddy diffusivity

Prandtl, Taylor 混合距離

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{c}_A}{dy}$$

$D_{AB}^{(t)} \simeq \alpha^{(t)} \equiv k^{(t)} / \rho \hat{C}_p$:
熱・物質移動のアナロジ

von Kármán's 相似仮説

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -\kappa_2^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{c}_A}{dy}$$

$\nu^{(t)} / D_{AB}^{(t)} = 0.5 \sim 1$

壁近傍領域の Deissler 実験式 $\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -n^2 \bar{v}_x y \{1 - \exp(-n^2 \bar{v}_x y / \nu)\} d\bar{c}_A / dy, (n=0.124)$

5.5 乱流の発生・構造

参考書

- 日野 幹雄: “流体力学”, 第 III 部, 乱流および乱流拡散, 朝倉書店 (1992).
- 中村 育雄: “乱流現象”, 朝倉書店 (1992).
- McComb, W.D.: “The Physics of Fluid Turbulence”, Oxford Clarendon Press, (1991).
- 巽 友正 (編): “乱流現象の科学”, 東京大学出版会, (1985).
- 谷 一郎 (編): “流体力学の進歩—乱流”, 丸善, (1980).
- Rotta, J.C. (1972), 大路 通雄 (訳): “乱流”, 岩波書店 (1975).
- 木田 重雄: “いまさら流体力学?”, パリティブックス, (1994), 丸善.
- Sherman, F.S.: “Viscous Flow”, (1990), McGraw-Hill.

その他・参考書 (Chaos, Soliton, etc.)

- Drazin, P.G., Johnson, R.S.: “Solitons: an introduction”, (1989), Cambridge Univ. Press.
- Infeld, E., Rowlands, G.: “Nonlinear Waves, Solitons and Chaos”, (1990), Cambridge Univ. Press.
- Zaslavsky, G.M. *et al.*: “Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns”, (1991), (1992 in paperback ed.), Cambridge Univ. Press.
- 広田 良吾: “直接法によるソリトンの数理”, 岩波書店 (1992).
- Gleick, J.: “Chaos—Making a New Science”, (1987), 大貫 昌子訳: “カオス—新しい科学をつくる”, (1992), (新潮文庫).

第6章 ポテンシャル流

6.1 渦無し流

完全流体の基礎方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \right) - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p + \mathbf{K} - \frac{1}{2}\text{grad}|\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left(P + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \Omega \right) + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}$$

$$\text{圧力関数 } P(p) \equiv \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

$$\text{外力: 保存力 } \mathbf{K} = -\text{grad } \Omega$$

$$\text{ポテンシャル: } \Omega$$

$$\text{渦度 } \boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$$

$$\text{渦無し流 } \boldsymbol{\omega} = 0 \longrightarrow$$

$$\text{速度ポテンシャル: } \Phi \quad \mathbf{u} \equiv \text{grad } \Phi$$

Bernoulli の諸定理

$$\text{定常流 } \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0 : \text{grad は, } \mathbf{u} \text{ と rot } \mathbf{u} \text{ とに直交.}$$

$$P + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \Omega = \text{const. (流線 or 渦線に沿って)}$$

$$\text{非圧縮流: 保存外力は重力 } P = p/\rho, \quad \Omega = gz$$

$$p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho gz = \text{const. (流線 or 渦線に沿って)}$$

$$\text{渦無し流 } \text{完全流では渦度は発生も消滅もしない.}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \Omega = f(t), \text{ (空間的に至る所で一定)}$$

流線 流れの中に一本の空間曲線を取り、曲線上の各点において速度ベクトル \mathbf{u} が曲線の接線になるようにした時、この曲線。Euler 式記述の幾何学的表現。

渦線 流れの中に一本の空間曲線を取り、曲線上の各点において渦度ベクトル $\text{rot } \mathbf{u}$ が曲線の接線になるようにした時、この曲線。 $\boldsymbol{\omega}$ の方向。

Bernoulli 面 一本の流線 (or, 渦線) をとり、これを通る全ての渦線 (or, 流線) によって作られる曲面。

流跡線 Lagrange 式記述に於て、任意の一つの流体粒子が時間の経過とともに移動する軌跡を考える時、この曲線。流跡線は、各時刻の流線 (一般に時間 t とともに変化) の線要素を連ねた包絡線。

渦無し流

速度ベクトル \mathbf{u} の代わりに, スカラー関数の速度ポテンシャル Φ を用いて流れの場を記述できる. そこで, 数学的な取扱が著しく容易になる.

- 速度 \mathbf{u} がポテンシャル Φ を持つ時, ポテンシャル流と呼ぶ.
- 非圧縮・渦無し流は, 常にポテンシャル流. (完全流体でも, 特別な粘性流体でも)

等ポテンシャル面 $\Phi(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$

速度ベクトル \mathbf{u} は, 等ポテンシャル面に常に垂直で, 接線成分を持たない.

$$u_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

但し, s : 等ポテンシャル面の任意の接線方向の座標成分.

u_s : その方向の速度成分.

圧縮性でも完全流体の渦無し流れは, ポテンシャル流: けれども, 基礎方程式は非線形.

$$\Delta \Phi = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (|\text{grad} \Phi|^2) + \frac{1}{2} (\text{grad} \Phi \cdot \text{grad}) |\text{grad} \Phi|^2 \right]$$

音速・圧力方程式 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad} \Phi|^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{const.}$ から, 音速 a が Φ の関数で決まる

但し, a : 音速, $\gamma \equiv c_p/c_v$: 比熱比. 非圧縮性気体の極限 $a \rightarrow \infty$ で, Laplace 方程式に帰着.

6.2 ポテンシャル流

非圧縮・連続の式 $\text{div } \mathbf{u} = 0$

渦無し・速度ポテンシャル

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi = 0$$

Laplace 方程式

$$\Delta \Phi \equiv \nabla^2 \Phi = 0,$$

Φ は, 調和関数.

注意点

1. 非圧縮性渦無し流の速度場が, 非圧縮の連続の式と渦無しの条件からのみで, 導かれる. (運動方程式が使われていない → 粘性流でもよい)
2. 時間微分を含まない. → 流れの速度場は過去に関わりなく各瞬間毎に決定. → 境界条件が同じなら, 流れの様子は全く同一.
3. Laplace 方程式は線形 → 解は重ね合わせが可能.

2次元速度ポテンシャル

$$\mathbf{u} \equiv \text{grad } \Phi$$

$$u \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

2次元非圧縮流 $\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

流れの関数: Ψ $u \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

- 注意
1. 渦度ベクトル $\text{rot } \mathbf{u} = (0, 0, \omega)$ の大きさ: $\omega = (\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)$ は, $-\Delta \Psi$ である.
 2. 2次元非圧縮流の微分方程式は, 流れの関数 (stream function) を用いて, 幾分単純にできる. (cf. *Transport Phenomena*, p.131)

Cauchy-Riemann の関係式

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

W が z の正則関数 (z 平面で $W(z)$ が微分可能) であるための必要十分条件.

複素速度ポテンシャル

$$W = \Phi + i\Psi \quad z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \equiv u - iv$$

$$\begin{aligned} \text{複素速度} \quad w &\equiv u - iv \equiv q \exp(-i\theta) \\ q &= \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(v/u) \end{aligned}$$

注意 $dW/dz = (\partial W/\partial y) \cdot (dy/dz) = (\partial W/\partial y)/i = u - iv$.

即ち, 正則関数では, 微分係数は微分方向によらない.

流れを表す基本的関数

一様流

$$W = Ue^{-i\alpha}z, \quad (\alpha: x \text{ 軸との傾き})$$

角を曲がる流れ

$$W = Az^n, \quad (A > 0, n > 0)$$

$$\text{湧き出し} \quad W = m \log z, \quad (m > 0)$$

$$\text{吸い込み} \quad W = m \log z, \quad (m < 0)$$

$$\text{渦糸} \quad W = -ik \log z, \quad (k: \text{実定数})$$

2重湧き出し

$$W = -\mu e^{i\alpha}/z, \quad (\mu: \text{湧き出し強さ})$$

円柱を過ぎる一様流

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad (a: \text{円半径}), \Psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta$$

回転円柱を過ぎる一様流

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z, \quad (\Gamma: \text{循環})$$

遅い粘性流: 球を過ぎる流れ

$$\Psi = \frac{U}{2}(r-a)^2 \left(1 + \frac{a}{2r}\right) \sin^2 \theta$$

$$\text{Laplace 方程式} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$w(z) \equiv S(x, y) + iT(x, y)$$

$$ik \frac{dw}{dz} = q_x - iq_y$$

S : const.(熱の流れ線), T : const.(等温線).

参考書

- 今井 功: “流体力学 (前編)”, 第3章 ~ 第4章, 裳華房 (1973).
- 今井 功: “等角写像とその応用”, 岩波書店 (1979).
- 今井 功: “応用超関数論 I, II”, サイエンス社 (1981).
- 巽 友正: “流体力学”, 7章 (ポテンシャル流), 8章 (2次元ポテンシャル流), 培風館 (1983).

6.3 渦

参考書

- 日野 幹雄: “流体力学”, 5. 渦, 朝倉書店 (1992).
- 木田 重雄: “講座: いまさら流体力学?”, パリティ, 連載 1992.4~1993.3, 丸善.

流れの中の渦の不生不滅

場所的 $\text{div } \omega \equiv \text{div}(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \leftarrow$ ベクトル解析
流れの中のどこにも渦度の湧出しも吸込みも存在しない.

時間的 ラグランジュの渦定理 (1781):
流体中にはじめ渦がなければその後も渦は生じないし, はじめ渦があればいつまでも消滅しない.

\leftarrow 渦無し of 永続性.

\leftarrow 循環の不変性: ケルヴィンの循環定理 (1869).

$$\frac{D}{Dt} \Gamma \equiv \frac{D}{Dt} \int_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = 0$$

完全流体中で流体とともに動く任意の閉曲線についての循環は, 時間がたっても不変である.

ヘルムホルツの渦定理 (1858)

完全流体の流れ場で, 質量力が一価のポテンシャルを持ち, 圧力と密度の間に一意的関係のある時

- (i) 渦の不生不滅:
(ラグランジュの渦定理)
- (ii) 非粘性流体中の渦線を構成する
流体粒子はいつまでも渦線を構成.
- (iii) 渦糸・渦管の強さの不変性:
どの断面も, 時間が経っても.
- (iv) 渦糸に端はない:
閉曲線あるいは境界に端.
- (v) 渦管の伸縮と強さ:
引き伸ばされると強さを増す.

カルマン渦列 (フォン・カルマン, 1911)

符号と強さ (Γ) の等しい渦糸が等間隔 (a) で無限に並んでいるときの複素速度ポテンシャル:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\sin \frac{\pi z}{a} \right).$$

この渦列が間隔 b で配列 (回転方向: 逆), 第一と第二の渦列の x 軸方向の相対的位置を x_0 とした時, 2本の渦列の作る複素速度ポテンシャル:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left\{ \sin \frac{\pi}{a} \left(z + \frac{ib}{2} \right) \right\} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left\{ \sin \frac{\pi}{a} \left(z - x_0 - \frac{ib}{2} \right) \right\}$$

2本の渦列の安定性 上下の渦列が交互に配列 ($x_0 = a/2$) し, 渦の配置が $\cosh(\pi b/a) = \sqrt{2}$, or $b/a = 0.2806$ 以外は不安定. この時, 渦列は全体として静止流体に対し $V_v = -\Gamma/(2\sqrt{2}a)$ の速度で負の方向へ進む. これをカルマン渦列 (Karman vortex street) と呼ぶ.

Proudman-Taylor 定理

回転系に相対的に生じる緩やかな流体運動は高さ方向に一樣.

テイラー・カラム 回転流体容器底の小突起の上に virtual solid cylinder 生成.

インクのカーテン 回転流体にインクを一滴二滴落とすと鉛直の膜状に. 回転を止めると拡散.

Ekman 層, Stewartson 層 回転容器の底 (E), 側壁 (S) の速度の急激に変化する境界層

スピンドウン 回転流体は Ekman 層を中心部へ, Stewartson 層を下方に流れながら角運動量を失い, 回転運動はほぼ同時に減衰.

第7章 境界層理論

7.1 遅い粘性流の近似解法

非圧縮粘性流の基礎方程式

連続 $\text{div } \mathbf{u} = 0$

運動

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}$$

保存力場

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\text{grad} \left(\frac{p_*}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$p_* \equiv p + \rho \Omega: \text{無外力時圧力}$$

渦度方程式

保存力場

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{p_*}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u}$$

両辺の rot, rot grad=0

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \vec{\omega}) + \nu \Delta \vec{\omega}$$

遅い粘性流に対する Stokes 近似

非線形項である慣性項を無視.

Stokes 近似による Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{p_*}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\omega}, \quad \Delta p = 0$$

定常流 $\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} \text{grad } p, \quad \Delta \vec{\omega} = 0$

注意 上の式は, 粘性力と圧力が, ちょうどつりあっていることを表す.

Stokes 方程式一般解 (Imai,1972)

今井功: “流体力学 (前編)”, §69,
p.313~ (1973).

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_c,$$

$$\mathbf{v}_p = \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \vec{\phi}) - 2\vec{\phi}, \quad p = 2\mu \text{div } \vec{\phi}$$

$$\text{但し } \vec{\phi} \equiv (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

$$\mathbf{v}_c = \text{grad } \psi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$$

$$\Delta \vec{\phi} = 0, \quad \Delta \psi = 0, \quad \Delta \mathbf{A} = 0$$

$$\vec{\omega} = -2\text{rot } \vec{\phi} (+\text{grad div } \mathbf{A})$$

圧力は, $\vec{\phi}$ だけで決まり, (\mathbf{v}_p, p) の一組で Stokes 近似の流れが表され, \mathbf{v}_c を落として も一般性は失われない.

2次元 Stokes 方程式一般解 (Imai,1972)

今井功:“流体力学(前編)”, §71,§72, p.332~ (1973).

流れの関数 Ψ 位置座標 $z = x + iy$

複素速度 $W = u - iv$

$$W = u - iv = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\Delta \Psi = 2i \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}$$

2次元定常 Stokes 方程式 $\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial x}$

Cauchy-Riemann の関係式 $p - i\mu\omega = 4\mu g'(z),$

$g'(z)$: 任意の解析関数

$$W = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \bar{g}(\bar{z}), \quad \Psi = \Im\{f(z) + \bar{z}g(z)\},$$

$$\omega = -4\Im\{g'(z)\} = 2i[g'(z) - \bar{g}'(\bar{z})],$$

$f(z)$: 任意の解析関数,

\Im : 虚数部, 上付きバー: 共役複素数

Stokes 源, Stokes 極

3次元 物体から十分遠くで流れは $|\mathbf{v}| \sim r^{-1}$. Stokes 源の強さ: $-8\pi\mu\mathbf{A}$

$$\vec{\phi} = \mathbf{A}/r, \quad \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})\text{grad}(1/r) - \mathbf{A}/r,$$

$$p = 2\mu(\mathbf{A} \cdot \text{grad})(1/r)$$

2次元 物体から十分遠くで流れは $\log r$ の発散.

Stokes 源の強さ: $-8\pi\mu\mathbf{A}$

$$\phi_i = A_i \log r, \quad (i = 1, 2), \quad \phi_3 = 0$$

$$f(z) = \bar{c}(z \log z - z),$$

$$g(z) = -c \log z,$$

$c = Ae^{i\alpha}$, α : Stokes 源の向きと x 軸との角度.

Stokes のパラドックス

任意の柱状物体を過ぎる一様流は, 適当なポテンシャル流と Stokes 源を重ね合わせて得られるが, 2次元 Stokes 流で物体上で粘性境界条件を満足する解は, 無限遠で対数的に発散し, 一様流となる解が存在しない. また, 3次元外部流においても, 慣性項と粘性項との比 $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u}/\nu\Delta\mathbf{u}$ は, $\text{Re} \cdot r/a$ となって, どんなに Re が小さくても物体から遠く離れた領域 $r/a \gg 1$ では, Stokes 近似は成立しない.

Oseen 近似

流れ \mathbf{u} を一様流 \mathbf{U} とそれからの差 \mathbf{u}' とに分けて, 慣性項を無視するのではなく, $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} \simeq (\mathbf{U} \cdot \text{grad})\mathbf{u}$ とおく近似. 遠方での慣性項と粘性項との大きさの関係を満足できるが, 物体近傍では \mathbf{u} に関して 2 次の微小量であるはずの慣性項が 1 次の量に留まるといふ難点がある. しかし, 物体近傍では, 慣性項は粘性項と比べてはるかに小さいから, 実際にはあまり影響を持たない. Stokes 近似の改良された形. $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$ の時

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \Delta p = 0$$

Oseen 近似の渦度方程式

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x} = \nu \Delta \vec{\omega}$$

定常 $(\Delta - 2k \frac{\partial}{\partial x}) \vec{\omega} = 0, \quad k \equiv U/2\nu$

Helmholtz 方程式

$$(\Delta - k^2)(\vec{\omega} e^{-kx}) = 0, \quad \vec{\omega} e^{-kx} = e^{-kr}/r$$

Oseen の伴流

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}(\mathbf{r}) e^{-k(r-x)}, \quad \vec{\Omega} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty).$$

$k(r-x) \geq C$ の領域では, $e^{-k(r-x)}$ は指数関数的に減少し急速に渦無しになるが, $k(r-x) \leq C$ の領域で $e^{-k(r-x)}$ は, $r \rightarrow \infty$ で有限に留まるから, 渦度は Ω と同程度でしか減少しない. 粘性流の物体下流に発生する渦ありの領域を伴流と呼ぶ.

7.2 境界層方程式

境界層

高 Re 数の粘性流は、大部分の領域で非粘性流に一致。粘性の影響は物体表面に沿う境界層や物体下流の伴流など、狭い空間領域に限られる。境界の影響の及ぶ薄い流体層を「境界層」と呼ぶ。

境界層厚さ δ $\delta \ll D$: 系の代表長さ。

例. 突然動いた壁近傍流れ (*Trans.Phén.*p.125~126)

$$u(y, t) = V \operatorname{erfc} \eta = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad \zeta \equiv \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

δ : $u/V = 0.01$ となる距離 y

$$\delta = 3.64\sqrt{\nu t} \rightarrow \delta \propto \nu^{1/2}$$

境界層厚さと Reynolds 数

$$\text{Re} \equiv \frac{VD}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{VD}{\text{Re}}$$

$$\frac{\delta}{D} \propto \text{Re}^{-1/2}$$

Re 大で $\delta \ll D$ は確かに成立。

この狭い領域の中だけで有効な解を求めることができれば、それ以外の非粘性解と併せて、全領域で有効な解を構成できる。

平面に沿う境界層

x -軸は平板上. y -軸は流体の向かう法線方向。

連続
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

運動

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

境界条件 $u = v = 0, \text{ at } y = 0.$

各項の評価 境界層外部流代表速度: V , 代表長さ: D .

境界層内部

1 の order の項: $u = O(V)$,

$\partial/\partial x = O(1/D), \partial/\partial t = O(V/D)$.

極めて大きい項: $\partial/\partial y = O(1/\delta)$.

v に要求される条件: $v = O(\delta V/D)$.



x -方向式左辺: 各項とも $O(V^2/D)$.

x -方向式右辺: 第2項 $O(\nu V/\delta^2)$.

第1項 ($O(\nu V^2/\delta)$): negligible compared with 第2項.

注意 境界層の内部では、粘性力と慣性力とは釣り合わなければいけない。 x 方向運動方程式の両辺の釣合から、 $V^2/D \simeq \nu V/\delta^2$. そこで、 $\delta \simeq (\frac{\nu D}{V})^{1/2} = \text{Re}^{-1/2} D$. 上の例の一般化。

境界層方程式

Prandtl(1904): $(\delta/D) \simeq \text{Re}^{-1/2}$ の
大きさ無視.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

境界層内部では、圧力は y 軸方向に一定。外流の圧力がそのまま印加されている。

外縁の圧力分布を与える場合

$$p = P(x, t), \text{ at } y = \delta \text{ and inside.}$$

外流の速度: $V = V(x, t)$: 非粘性平行流.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}$$

境界条件

3階の式には,
3条件必要.

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ で } u = v = 0, \\ y = \delta \text{ で } u = V, \\ (y = \delta \text{ で } v = V_y = 0.) \end{aligned}$$

境界層方程式の階数

右辺は既知.

v は連続の式を用いて消去.

 u に対する3階の式

厳密な方程式から v, p を消去すると,
4階. 境界層近似で階数が1下がった.
これは, 圧力を既知としたため.

第4の条件を満足する自由度を持たない.
 $v = O(\delta)$ の微小量に関して, 外流との不一致を問題にしないのは, 境界層近似の精神から当然.

一様流

$$V = V_\infty.$$

$$u = \partial\Psi/\partial y,$$

$$v = -\partial\Psi/\partial x.$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} = 0.$$

$$y = 0 \text{ で } \Psi = \partial\Psi/\partial y = 0.$$

$$y \rightarrow \infty \text{ で } \partial\Psi/\partial y \rightarrow V_\infty.$$

この流れには固有の長さの尺度が存在せず, 解は一つの無次元変数のみに依存する相似解の形になるはず.

$$\eta = \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} y, \quad \Psi(x, y) = \sqrt{V_\infty \nu x} f(\eta).$$

7.3 境界層の平均値方程式

境界層の特性量

排除厚さ $\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy,$

運動量厚さ $\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy,$

エネルギー厚さ $\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u^2}{V_\infty^2}\right) dy,$

壁面粘性応力 $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0},$

エネルギー散逸 $D_\Phi = \mu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy.$

$V\delta_1$: 境界層での粘性摩擦による流量の欠損.
→ 境界層の存在は, 外流の流線を壁から δ_1 だけ押し上げる (排除する) のと同じ効果.

$\rho V^2 \delta_2$: 境界層での運動量欠損の流量.

$(1/2)\rho V^3 \delta_3$: 境界層でのエネルギー欠損の流量.

D_Φ : 非圧縮境界層流における散逸関数の, 境界層内積分.

剥離 壁面粘性応力 τ は一般には正の値. 境界層によっては, τ の値は下流方向に減少し, ある点 (剥離点) でゼロ, その下流で負となり, 壁面に沿った逆流を生ずる. この逆流は剥離点の近傍で壁面から剥がれて分離流線を形成.

→ 剥離点は境界層近似の有効限界を与える.

注意 $\int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty u \frac{\partial v}{\partial y} dy$ (部分積分)

$$= V \cdot V_y^\infty + \int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_0^\infty (V - u) \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (\text{連続の式})$$

境界層の運動量方程式

x 方向運動方程式を y について積分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (V-u)dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty (V-u)udy = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} - \frac{\partial V}{\partial x} \int_0^\infty (V-u)dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(V\delta_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x}(V^2\delta_2) = \frac{\tau}{\rho} \quad \Leftarrow \text{Kármán(1921), Pohlhausen(1921).}$$

境界層のエネルギー方程式

x 方向運動方程式に u を乗じて, y について積分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{1}{2}(V^2 - u^2)dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{1}{2}(V^2 - u^2)udy = \nu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{\partial V}{\partial t} \int_0^\infty (V-u)dy$$

$$V^2 \frac{\partial}{\partial t}(\delta_1) + \frac{\partial}{\partial t}(V^2\delta_2) + \frac{\partial}{\partial x}(V^3\delta_3) = \frac{2}{\rho} D_\Phi \quad \Leftarrow \text{Leibenson(1935), Wieghardt(1946).}$$

参考書

- H.Schlichting: "Boundary-Layer Theory". 7-th ed.(1979), McGraw-Hill.
- 巽 友正: "流体力学", 15 章 境界層, 新物理学シリーズ 21, 培風館 (1982).
- 日野 幹雄: "流体力学", 第 II 部 粘性流体の力学, 7~13 章, 朝倉書店 (1992).
- 木村 竜治: "改訂版 流れの科学—自然現象からのアプローチ", 東海大学出版会 (1985).

前節の一樣流境界層の式の解法 非線形 $\rightarrow \eta$ べき展開, (η 小), 線形近似 (η 大)(Blusius, 1908)

$$u = V_\infty f', \quad v = \sqrt{V_\infty \nu / x} (\eta f' - f) / 2, \quad f' \equiv d/d\eta, \quad f = f' = 0 \text{ at } \eta = 0,$$

$$f' \rightarrow 1 \text{ when } \eta \rightarrow \infty: \quad f''' + (1/2)ff'' = 0 \rightarrow f' \simeq \eta/3 \quad (\eta \leq 2), \quad f' \simeq 1 \quad (\eta > 5)$$

7.4 内部境界層

境界層は一般に Re が極めて大きい場合に、急激な速度勾配を伴う層として、固体表面に沿って出現。急激な速度勾配は、 Re が大きい場合には流れの内部にも形成され、これを内部境界層 (内部摩擦層) と呼ぶ。代表例: 2次元ジェット (噴流)、二つの平行流の間の自由境界層。

2次元噴流

直角座標 (x, y, z) の z 軸に沿ってスリットがあり、単位長さ当り単位時間に一定の運動量 M が x 軸方向に与えられる時の流れ: 流れの中に長さの尺度が存在しないから、流れは相似性を持つはず。

$$M = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy$$

Schlichting(1933), Bickley(1937)

$$\begin{aligned} u &= U_0(1 - \tanh^2 \eta) \\ v &= \sqrt{\frac{2U_0\nu}{3x}} \{2\eta(1 - \tanh^2 \eta) - \tanh \eta\} \\ U_0 &= \left(\frac{3M^2}{32\rho^2\nu x} \right)^{1/3} \\ \eta &= \sqrt{\frac{U_0}{6\nu x}} y \end{aligned}$$

排除厚さを与える η

$$\eta_1 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} d\eta = [\tanh \eta]_0^{\infty} = 1,$$

排除厚さ

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{6\nu x}{U_0}} = 2 \left(\frac{6\rho}{M} \right)^{1/3} (\nu x)^{2/3}.$$

2次元ジェットの厚さは、下流方向に向かって平板境界層よりも速やかに $x^{2/3}$ に比例して増大する。

円筒型ジェットに関しては、渦動粘性係数

$$\begin{aligned} \tau &= \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon &= k_1 b (u_{max} - u_{min}) \end{aligned}$$

を用いた

Goertler(Görtler ゲルトラー)(1942) による解がある。相似解の形は同じ。

自由境界層

異なった速度の互いに平行な流れが接触するとき、その接触面に沿って急激な速度勾配を持った一種の境界層を形成。速度 U_{∞} の一様流と静止流体が面 $y = 0$ で接触する時の流れ: 流れの中に長さの尺度が存在しないから、流れは相似性を持つはず。

$$\begin{aligned} u &= U_0 f'(\eta), \quad \eta \equiv \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} y \\ v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0\nu}{x}} \{ \eta f'(\eta) - f(\eta) \} \end{aligned}$$

Lessen(1949) による境界層近似の解

$$f''' + (1/2)ff'' = 0,$$

$$f'(\infty) = 1, f'(-\infty) = 0.$$

この方程式は平板境界層に対する式と同じ。境界条件が異なる。

内部境界層は外部攪乱に対して極めて不安定。

第8章 管路流の損失と物体の抵抗

8.1 摩擦係数と抵抗係数

工学的流れ問題

対象	関心事項
管内の流れ	流量と圧力損失
物体の周りの流れ	接近速度と抵抗

工学的整理

左記の関係は、一般には計算不能.

→ 実験データを用いた関係式.

correlations “相関”, “相似則”, “実験式”.

特に, 摩擦係数 (Friction Factor) の概念で整理.

摩擦係数, 抵抗係数の定義

流体によって固体表面に加えられる力: \mathbf{F}

$$\mathbf{F}_k \equiv A \cdot K \cdot f$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_k$$

\mathbf{F}_s : stationary な寄与

\mathbf{F}_k : kinetic な寄与

A : 代表面積.

K : 代表運動エネルギー/単位体積.

f : 摩擦係数, 抵抗係数 (無次元).

直管内流れの摩擦係数

A : 濡れ表面積 ($2\pi RL$)

K : $\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2$

R, L : 半径, 長さ

$$f = \frac{\mathbf{F}_k}{(2\pi RL)(\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2)}$$

$$\mathbf{F}_k = (\Delta P + \rho g \Delta h) \pi R^2 \equiv \Delta \wp \pi R^2$$

Fanning 摩擦係数 $f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{\Delta \wp}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2}$.

物体周りの流れの抵抗係数

(例) 球の自然落下

A : 流れ方向の投影面積 (球: πR^2)

K : $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ (v_∞ : 終端速度)

$$C_D \equiv f = \frac{\mathbf{F}_k}{(\pi R^2)(\frac{1}{2}\rho v_\infty^2)}$$

$$\mathbf{F}_k = \frac{4}{3}\pi R^3 g (\rho_{sph} - \rho) = (\text{浮力} - \text{重力})$$

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{gD}{v_\infty^2} \left(\frac{\rho_{sph} - \rho}{\rho} \right).$$

8.2 管内流れの摩擦係数

考察の対象

長さ L , 半径 R の水平横置き円管 (水平方向 z 軸).
 密度 ρ , 粘性係数 μ が一定の流体. 平均流速 $\langle v \rangle$.

$$\mathbf{F}_k = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz.$$

$$f = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz / \{ (2\pi RL) (\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2) \}.$$

無次元数の導入

$$v_z^* = v_z / \langle v \rangle$$

$$r^* = r / D$$

$$p^* = (p - p_0) / \rho \langle v \rangle^2$$

$$\mathbf{Re} = \rho \langle v \rangle D / \mu$$

摩擦係数一般表現

$$f = \frac{1}{\pi} \frac{D}{L} \frac{1}{\mathbf{Re}} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) \Big|_{r^*=1/2} d\theta dz^*.$$

管内の層流, 乱流に対する摩擦係数の一般的表現.

$f \cdot \mathbf{Re}$ の積は表面全体で積分した無次元速度勾配となっていることに注意.

無次元速度勾配

$$(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0,$$

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \text{ を支配する式: } \frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{1}{\mathbf{Fr}} \mathbf{g}.$$

\mathbf{Fr} は, 自由表面無し
 の管内等密度流れの速度
 分布に影響しないので,
 無視できる.

摩擦係数に影響する変数

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(r^*, \theta, z^*, \mathbf{Re}),$$

$$p^* = p^*(r^*, \theta, z^*, \mathbf{Re}).$$

勾配は $r^* = 1/2$ で評価,
 z^*, θ で積分.

$$f = f(\mathbf{Re}, L/D).$$

完全に発達した流れ,
 または $L/D \gg 1$.

$$f = f(\mathbf{Re}).$$

層流, Hagen-Poiseuille 流

$$\Delta \phi = 8\mu L \langle v \rangle / R^2$$

Fanning 式に代入.

$$f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{8\mu L \langle v \rangle}{R^2} \frac{1}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2}$$

$$= 16 \frac{\mu}{\rho \langle v \rangle D} = \frac{16}{\mathbf{Re}}$$

$$f = \frac{16}{\mathbf{Re}} \quad \begin{array}{l} \text{層流} \\ \text{摩擦係数} \end{array} \quad \mathbf{Re} < 2100$$

乱流, (1/7)-power law

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_{max}} = \left(\frac{s}{R} \right)^{1/n}, \quad (s \equiv R - r)$$

$$\frac{\langle \bar{v} \rangle}{\bar{v}_{max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

$$\downarrow n = 7$$

$$\frac{\langle \bar{v} \rangle}{v_*} = (0.817)(8.56) \left(\frac{R v_* \rho}{\mu} \right)^{1/7}$$

$$\Delta \phi = 2L \rho v_*^2 / R$$

Fanning 式に代入

$$f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{\Delta \phi}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} = 2 \left(\frac{v_*}{\langle v \rangle} \right)^2$$

$$= \frac{0.0791}{\mathbf{Re}^{1/4}}$$

Blasius formula

$$(2100 < \mathbf{Re} < 10^5)$$

注意 実際には, 管内面の粗さ (roughness) が極めて重要.

参考 *Trans. Phen. Fig. 6.2-2*

8.3 断面積変化, 外力のある管内流れの損失係数

流れの剥離と圧力勾配

壁面近傍の運動方程式: $\partial p / \partial x = \mu \partial^2 u / \partial x^2$
 → 速度の2次微分と $\partial p / \partial x$ とは同符号.
 速度の2次微分: 負 (流れ方向に向かって上に凸)
 → 圧力は流れに沿って減少.
 速度の2次微分: 正 (流れ方向に向かって下に凸)
 → 圧力は流れに沿って増加.
 → 壁面付近では圧力勾配に逆らって流れることができず, 剥離及びその下流に逆流を生じ, 損失は特に大きい.

ノズル流れ

断面積が滑らかに減少し, 圧力が流れに沿って減少する安定流れ. 損失はほぼ摩擦損失のみ. 断面平均速度は Bernoulli の定理と連続の式から見積可能.

ディフューザ流れ

断面積が滑らかに増大し, 圧力が流れに沿って増加する不安定流れ. 剥離が起こり易く, 一旦逆流を生ずると流路の有効面積が減少し, 主流の減速が十分達成できず, 大きな損失.

摩擦損失係数

$$\hat{E}_v \equiv \frac{E_v}{\rho \langle \bar{v} \rangle S} \equiv \frac{1}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 e_v$$

- E_v : 摩擦損失.
- e_v : 摩擦損失係数.
- S, L : 断面積, 長さ.
- R_h : 平均水力学的半径.
- Z : 濡れ周辺長さ.

直管内乱流: f と e_v との関係

$$e_v = (L/R_h)f, \quad R_h \equiv S/Z.$$

配管系所要動力計算式:乱流

$$\Delta \frac{1}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 + g \Delta h + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp + \hat{W} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{1}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 \frac{L}{R_h} f \right)_i}_{\text{直管部の合計}} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{1}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 e_v \right)_i}_{\text{バルブ, メータ, フィッティング等の合計}} = 0$$

- $\hat{W} \equiv W / \rho \langle \bar{v} \rangle S$
: 単位質量当り所要動力.
- $\langle \bar{v} \rangle$: 損失下流側の平均流速.
- β : 小断面積/大断面積.
- t/d : 弁円盤厚/管径.

摩擦損失係数

断面積変化

- ノズル : 0.04 ~ 0.09
- 急縮小 : $0.45(1 - \beta)$
- 急拡大 : $(\beta^{-1} - 1)^2$
- オリフィス : $2.7(1 - \beta) \times (\beta^{-2} - 1)$

外力を受ける部分

- 90度エルボ : 0.4 ~ 0.9
- 45度エルボ : 0.3 ~ 0.4
- 球形弁 (全開) : 6 ~ 10
- 蝶形弁 (全開) : t/d
- 仕切弁 (全開) : 0.2

注意 摩擦損失係数については種々の定義があるので, 各機器をを用いるときには注意すること.

8.4 球の周りの流れの摩擦係数

考察の対象

半径 R の球の周りを, 密度 ρ , 粘性係数 μ の流体が, 速度 v_∞ で流れる.

\mathbf{F} 動力的

$$= (\mathbf{F}_{\text{垂直}} - \mathbf{F}_{\text{静的}}) + \mathbf{F}_{\text{せん断}}$$

$$= \mathbf{F}_{\text{形状 (or, 圧力) 抵抗}} + \mathbf{F}_{\text{摩擦抵抗}}$$

$$\mathbf{F}_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\mathbf{F}_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \{-(p - \rho g z)|_{r=R} \cos \theta\} R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\mathbf{F}_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \right\}_{r=R} \sin \theta \times R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\text{Re} = 2\rho v_\infty R / \mu$$

摩擦係数

$$f_{\text{形状}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ -\frac{p - p_0 + \rho g z}{\rho g v_\infty^2} \right\} \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$f_{\text{摩擦}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ - \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right\}_{r^*=1} \times \sin^2 \theta d\theta d\phi.$$

無次元変数

$$r^* \equiv r/R$$

$$v_\theta^* \equiv v_\theta/v_\infty, v_r^* \equiv v_r/v_\infty,$$

$$\varphi \equiv \frac{p - p_0 + \rho g z}{\rho v_\infty^2}.$$

Creeping Flow 域

Stokes の法則

$$\mathbf{F}_k = 6\pi\mu R v_\infty$$

$$= (\pi R^2) \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \right) \cdot \frac{24}{\left(\frac{\rho v_\infty D}{\mu} \right)}$$

$$f = \frac{24}{\text{Re}}$$

Creeping Flow
摩擦係数
 $\text{Re} < 0.1$

$$f = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right)$$

微小慣性力補正
Oseen の式
 $\text{Re} < \sim 5$

中間 ~ 高 Re 領域

$$f = 18.5/\text{Re}^{3/5}$$

中間領域
近似式
 $2 < \text{Re} < 500$

$$f = 11/\sqrt{\text{Re}}$$

中間領域
近似式
 $30 < \text{Re} < 300$

$$f \simeq 0.44$$

Newton's law 領域
Newton 抵抗法則
 $500 < \text{Re} < 2 \times 10^5$

参考: 空気に対する相対速度 Re

$$v_{\text{空気}} = 1.5 \times 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{s}, (293 \text{ K})$$

$$D = 150 \text{ cm とすれば, } \text{Re} = v_\infty (\text{cm/s}) \times 10^3$$

$$1 \text{ cm/s} = 36 \text{ m/h}, 1000 \text{ cm/s} = 36 \text{ km/h}.$$

参考: 充填塔の摩擦係数

層流 (Blake-Kozeny eq.) $f = \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \frac{75\mu}{d_p \rho v_s}$, for $\frac{d_p \rho v_s}{\mu(1-\epsilon)} < 10$.

乱流 (Burke-Plummer eq.) $f = 0.875 \frac{1-\epsilon}{\epsilon^3}$, for $*$ > 1000 .

第9章 固液境界での熱流移動

9.1 熱伝達係数

熱伝達係数の定義

$$Q \equiv hA\Delta T$$

(注) 上の式を Newton's law of cooling と呼ぶことがあるが、これは法則ではなく、熱伝達係数 h (heat transfer coefficient) の定義式。

Q : 固体から液体への熱流,
 A : 代表面積 (characteristic area),
 ΔT : 代表温度差,
 h : 熱伝達係数.

h は, A と ΔT を定義しないと決められない。

円管内流れの熱伝達係数

Fig.13.1-1(p.392) 壁温度 $T_0(z)$

$$Q = h_1(\pi DL)(T_0 - T_1)_1$$

$$Q = h_a(\pi DL)(T_0 - T_1)_a$$

$$Q = h_{ln}(\pi DL)(T_0 - T_1)_{ln}$$

$$dQ = h_{loc}(\pi D dz)(T_0 - T_b)$$

温度差定義

初期温度差 : $(T_{01} - T_{b1})$

両端温度差平均 : $\left(\frac{(T_{01} - T_{b1}) + (T_{02} - T_{b2})}{2} \right)$

対数平均温度差 : $\left(\frac{(T_{01} - T_{b1}) + (T_{02} - T_{b2})}{\ln[(T_{01} - T_{b1})/(T_{02} - T_{b2})]} \right)$

局所温度差 : $(T_0 - T_b)$

流体の bulk temperature(const. ρ, \hat{C}_p) *Trans.Phen.* p.297

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} \quad : \text{断面平均温度}$$

$$\frac{\langle v_z T \rangle}{\langle v_z \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z T(r) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta} \equiv T_b \quad : \text{bulk 温度, 流れ平均温度}$$

h_{ln} が最も L/D の影響を受けない。

$0.5 < \Delta T_2 / \Delta T_1 < 2.0$ なら

$\Delta T_{ln} \rightarrow \Delta T_a$ 高々4%

$h_{ln} \rightarrow h_a$ 以内の誤差

流れの中の物体の熱伝達係数

温度 T_∞ の流れの中に, 半径 R の球 (表面温度 T_0).

$$Q = h_m(4\pi R^2)(T_0 - T_\infty).$$

$$dQ = h_{loc}(dA)(T_0 - T_\infty).$$

代表面積の採り方が摩擦係数の時 (πR^2) と異なることに注意.

h_m : 平均熱伝達係数,
 h_{loc} : 局所的熱伝達係数.

h_{loc} は, 熱フラックスの分布を示すことができる. 定数でないことに注意.

総括熱伝達係数 §9.6-1(p.286)

二重同軸円筒間の二種の流れ間の熱伝達. 内側流体 bulk 温度 T_h , 外側流体 bulk 温度 T_c .

$$dQ = U_0(\pi D_0 dz)(T_h - T_c).$$

$$\frac{1}{D_0 U_0} = \left(\frac{1}{D_0 h_0} + \frac{\ln D_1/D_0}{2k^{01}} + \frac{1}{D_1 h_1} \right)_{loc}.$$

U_0 : 総括熱伝達係数

D_0 : 内側直径

D_1 : 外側直径

k^{01} : 熱伝導係数

参考 U_0 は, 局所的. cf 二重管熱交換器 (Trans.Phén.p.466)

9.2 管中強制対流の熱伝達係数

Fig.13.1-1
 (Tr.Ph. p.392)

const. ρ, μ, \hat{C}_p, k
 速度分布 at 1: 既知

管壁から流体への全熱流

$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz.$$

層流でも乱流でも成立.
 正符号は, 熱が半径方向の逆向きに加えられていることに対応.

熱伝達係数 h_1 の定義

$$h_1 = \frac{1}{\pi D L (T_0 - T_{b1})} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz.$$

無次元数の導入

$$r^* \equiv r/D, z^* \equiv z/D, \\ T^* \equiv (T - T_0)/(T_{b1} - T_0), \\ \mathbf{Nu}_1 \equiv h_1 D/k.$$

Nusselt 数

$$\mathbf{Nu}_1 = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-k \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \Big|_{r^*=1/2} d\theta dz^*.$$

熱伝達面全体で平均した無次元温度勾配. 温度分布がわかれば, 評価できる.

$$T^* = T^*(r^*, \theta, z^*, \mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, \mathbf{Br})$$

$$\longrightarrow \mathbf{Nu}_1 = \mathbf{Nu}_1(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, \mathbf{Br}, L/D).$$

通常 \mathbf{Br} は無視できる.

$$\mathbf{Nu}_1 = \mathbf{Nu}_1(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, L/D).$$

$$\mathbf{Nu}_a \equiv h_a D/k = \mathbf{Nu}_a(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, L/D).$$

$$\mathbf{Nu}_{ln} \equiv h_{ln} D/k = \mathbf{Nu}_{ln}(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, L/D).$$

$$\mathbf{Nu}_{loc} \equiv h_{loc} D/k = \mathbf{Nu}_{loc}(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, z/D).$$

温度差:大

粘性: $\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, L/D, \mu_b/\mu_0)$.

密度: $\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, L/D, \mu_b/\mu_0, \mathbf{Gr})$.

$$\mu = \mu_0 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{T=T_0} (T - T_0) + \dots$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{T - T_0}{T_b - T_0} \right) + \dots$$

Sieder & Tate の correlation

物性値の評価温度: $(T_{b1} + T_{b2})/2$

μ_0 の評価温度: $(T_{01} + T_{02})/2$

Reynolds 数: $\mathbf{Re}_b \equiv D \langle \rho v \rangle / \mu_b$

Prandtl 数: $\mathbf{Pr} \equiv (\hat{C}_p \mu / k)$

完全な乱流 ($\mathbf{Re}_b > 20,000, L/D > 10$)

$$\mathbf{Nu}_{ln} = \frac{h_{ln} D}{k_b} = 0.026 (\mathbf{Re}_b)^{0.8} (\mathbf{Pr})^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \right)^{0.14},$$

$10^4 < \mathbf{Re}_b < 10^5, 0.6 < \mathbf{Pr} < 100, L/D > 10$ で実験値を $\pm 20\%$ で再現.

層流 ($\mathbf{Re}_b < 2,100, L/D > 10$)

$$\mathbf{Nu}_{ln} = \frac{h_{ln} D}{k_b} = 1.86 (\mathbf{Re}_b \mathbf{Pr} D / L)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \right)^{0.14},$$

Graetz number: $\mathbf{Gz} \equiv (\pi/4) \mathbf{Re} \mathbf{Pr} D / L$

遷移状態

$2,100 < \mathbf{Re}_b < 10,000$:
よくわからず.

熱伝達係数と摩擦係数との類似性

摩擦係数 (Fig.6.2-2(p.186)) と熱伝達係数 (Fig.13.2-1(p.400))

Colburn の analogy ($\mathbf{Re}_b > 10,000$)

$$j_H \equiv \frac{h_{ln}}{\hat{C}_p \langle \rho v \rangle} \mathbf{Pr}_f^{2/3} \equiv \mathbf{St}_{ln} \mathbf{Pr}^{2/3} = \frac{f}{2}.$$

Film temperature

Reynolds 数: $\mathbf{Re}_f \equiv D \langle \rho v \rangle / \mu_f$.

suffix: $f \leftarrow$ film temp. で評価

$$\equiv (T_b + T_0)/2,$$

壁温, bulk 温共に両端平均.

発達した乱流での Deissler correlation

$\mathbf{Re} > 10,000, \mathbf{Pr} > 0.5$

Tr.Ph. Fig.13.2-2(p.402)

Stanton 数: $\mathbf{St} \equiv h / \hat{C}_p \langle \rho v \rangle = \mathbf{Nu} / \mathbf{Re} \cdot \mathbf{Pr}$.

$$\mathbf{St}_{loc} = 0.0789 \frac{\sqrt{f}}{\mathbf{Pr}^{3/4}}, \mathbf{Pr} > 200$$

Martinelli ($\mathbf{Pr} < 0.5$)

\mathbf{Nu}_{loc}

$$= 7 + 0.025 (\mathbf{Re} \mathbf{Pr})^{0.8}; \text{等熱流束}$$

$$= 5 + 0.025 (\mathbf{Re} \mathbf{Pr})^{0.8}; \text{等壁温}$$

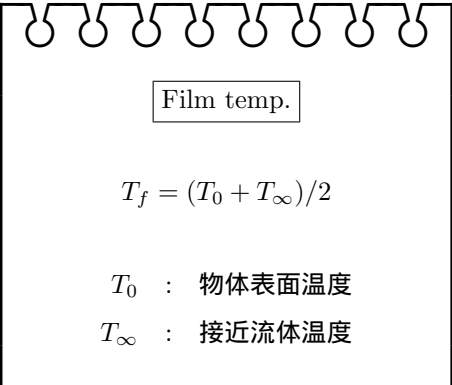
層流漸近値 (Graetz)

$\mathbf{Nu}_{loc} \rightarrow 3.657$: 等壁温

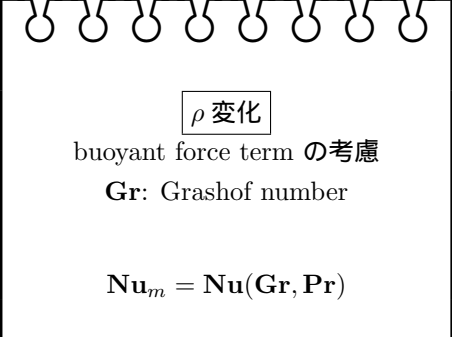
$\mathbf{Nu}_{loc} \rightarrow 48/11 = 4.364$: 等温度差

Lévéque 漸近解 $\mathbf{Nu}_{ln} = 1.75 \mathbf{Gz}^{1/3}$

9.3 流れの中の物体からの強制対流熱伝達

 <p style="text-align: center;">Film temp.</p> $T_f = (T_0 + T_\infty)/2$ <p>T_0 : 物体表面温度 T_∞ : 接近流体温度</p>	<p>円柱 (Fig.13.3-1), Colburn's analogy 不成立</p> $\text{Nu} = 0.27 \cdot \text{Re}^{0.6} \text{Pr}_f^{1/3}$ <p>球 (Fig.13.3-2)</p> $\text{Nu} = 2.0 + 0.6 \cdot \text{Re}^{1/2} \text{Pr}_f^{1/3}$ <p>半無限平板 (Fig.13.3-3), Colburn's analogy 成立</p> $\text{Nu} = 0.332 \cdot \text{Re}^{1/2} \text{Pr}_f^{1/3}$
--	---

9.4 自然対流熱伝達

 <p style="text-align: center;">ρ 変化</p> <p style="text-align: center;">buoyant force term の考慮</p> <p style="text-align: center;">Gr: Grashof number</p> $\text{Nu}_m = \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr})$	<p>直径 D の球 ($\text{Gr}^{1/4} \text{Pr}^{1/3} < 200$)</p> $\text{Nu} = 2.0 + 0.60 \cdot \text{Gr}^{1/4} \text{Pr}^{1/3}$ <p>横置き円柱 ($\text{GrPr} > 10^4$) (Fig.13.5-1)</p> $\text{Nu}_m = 0.525 \cdot (\text{GrPr})^{1/4}$ <p>縦置き薄板 (Fig.13.5-2)</p>
--	--

参考書

- J.P.Holman: "Heat Transfer," 6-th ed. (1986) McGraw-Hill.
- 甲藤 好郎: "伝熱概論", (1976), 養賢堂.
- 谷下 市松: "伝熱工学", (1986), 裳華房.
- M.Kaviany: "Principles of Convective Heat Transfer", (1994), Springer.

付録 A 熱拡散塔研究

熱拡散法による同位体分離の最近の進歩 RADIOISOTOPES, 42,315(1993) 山本一良 より抜粋短縮

熱拡散とは、混合気体が温度勾配の存在する場に置かれたときに、一般に分子量の小さい成分が高温側に、大きい成分が低温側に移動する現象である。この現象は、Enskog(1911)、Chapman(1917)が気体分子運動論から初めて指摘したが、熱拡散法による同位体分離が実用的になったのは、1939年 Clusius と Dickel が向流型熱拡散塔を考案してからである。これは、水平方向温度勾配による熱拡散効果で混合気体を分離させ、鉛直方向自然対流で分離を多段的に積み重ねて、分離効果を飛躍的に増大させるものである。熱拡散法は不可逆プロセスであるから、エネルギー効率が著しく悪い。そこでマンハッタン計画の初期に ^{235}U の微濃縮に用いられ、また、同じ頃日本でも理科学研究所で実験が試みられたが、ウラン濃縮のような大規模プラントには適していない。しかし、単一の熱拡散塔での分離係数が大きいこと、塔内のインベントリ量が小さいこと、構造が簡単で可動部を持たず信頼性が高いことから、核融合炉燃料のトリチウムガスの精製・分離法として有望視されている。この熱拡散塔による気体の分離理論体系は、Furry-Jones-Onsager らにより、ほぼ確立されて、総説にまとめられている。Jones-Furry の一次元解析は、熱拡散塔分離性能の概略評価に有用であるが、解析的に積分不能な塔定数の数値積分が不可避となって単純ではない。その結果、従来から分離塔設計の定石はなく、経験とパラメータ・サーヴェイによって設計されてきたように思われる。したがって、まだ調べ足りない範囲があり、性能向上の余地があるのではないかと期待感があつた。そこで筆者らは、分離係数と被分離気体物性値・塔設計パラメータとの関係が明示的に表現できる近似式を求めようと、一次元解析を更に近似することを試みた。具体的には、半径方向温度分布の対数関数(分母にあると解析的積分不可能)を塔の設計パラメータに依存する代表平均温度に置き換えて塔定数の近似式を導き、それらを用いて全還流の熱拡散塔の最適運転圧力を予測する式を得た。また、この時得られる最大分離係数が、温壁 T_h と冷壁 T_c 表面の温度差 ΔT に対して $\Delta T/T_c$ の形で依存することが分かった。そこで、“通常の冷壁”(例えば、 $T_c = 288.15\text{ K}$)の代わりに“深冷壁”(例えば、 $T_c = 77.35\text{ K}$)を採用すれば、分離係数の飛躍的な増大が期待される。この効果は、二次元の流れならびに移流-拡散方程式の数値的解析で確認され、更に、住友重機械工業・平塚研究所において、 $\text{H}_2\text{-D}_2(50\%-50\%)$ 系での予備実験が行われ、解析の予想通り大きな分離係数が得られた。平均熱線温度 473 K 運転では塔頂で (H_2, D_2) が ($\sim 80\%$, $\sim 20\%$)、塔底で ($\sim 10\%$, $\sim 90\%$) と分離された。これほど分離が進むと、塔の上部と下部とでは混合気体の熱伝導度、粘性、平均分子量などの物性値が変化し、熱線温度、自然対流速度などが異なる(上記分離例で $\sim 80\text{ K}$ と見積られる)。このような状況を解析できる手段は 2 成分系、多成分系ともに未だ開発されておらず、これらの予備実験結果の解析的説明には成功していない。

また、日本原子力研究所核融合工学部トリチウム工学研究室にも深冷壁熱拡散塔が設置され、実験が進められている。深冷壁の採用で分離係数が飛躍的に増加するのは、水素とヘリウムである。他の原子では、液体窒素温度付近まで冷却すると液化し、熱拡散ファクタの大きさも小さくなるので、これほどの効果は望めない。今後は、物性値が変化するほど分離が進む場合にも適用可能な解析手法を確立し、実際のプラントにも役立つ深冷壁熱拡散塔を設計、開発することが望まれる。

名古屋大学における熱拡散法同位体分離研究

山本一良

1990.5.25

日本原子力学会“同位体分離”特別専門委員会 第 88 回会合

Abstract

沿革. 二次元詳細分離性能解析手法の, Ar-36,38,40 同位体分離, H₂-HT 同位体分離実験結果との比較検討による開発. 水素同位体分子ガスの熱拡散ファクタの概略評価. 熱拡散塔の代表平均温度の概念と, 一次元簡化モデルによる最適設計手法の開発. 深冷壁熱拡散塔による分離性能増大の可能性の予想. 今後の課題.

A.1 はじめに—沿革—

A.1.1 助走時代— 1974~1981 —

名古屋大学原子核工学科第五:原子核化学工学研究室(講座担当者:金川昭教授)における熱拡散同位体分離の研究は, 1974 年夏, 担当者前任地の京大・原子炉実験所から, Ar 同位体分離用熱拡散塔を移設して, 開始された. しかし, 質量分析計がなかったため, 同位体比測定の必要な同位体分離はあきらめ, ガスクロで測定可能で, なおかつ, 分離の比較的容易な Ar-He 混合ガスを対象として, 分離装置を組み立てた. 当時, 研究室では, ガス遠心分離法のウラン濃縮に関し, 遠心分離機の分離性能解析とカスケードの研究が, 精力的に進められていたので, 熱拡散塔の解析もその影響を受け, いわゆる軸方向 1 次元濃度分布解析 (Jones-Furry 理論, 遠心機に対しては, Cohen-Kanagawa 理論) の精密化に加えて, 拡散塔を方形カスケードとみなして解析したり, 遠心分離機に対して開始されつつあった 2 次元濃度分布解析の熱拡散塔への適用, さらに, 2 次元流れ解析も開始された. 1981 年春の時点での研究結果をまとめると,

- 軸方向 1 次元濃度分布解析は, どれほど精密化しても曖昧さが残る.
- 冷壁半径は, 分離性能に対して大きく影響.
- 分離性能の正確な把握のためには, 塔の運転条件 (供給流量, カット, 熱線温度 etc.) の制御が重要.
- 2 次元流れ解析は, 熱線・冷壁間温度差で ~15 K まで収束解.

A.1.2 “同位体分離実験装置” 設置以後— 1981~1990 —

昭和 55 年度に特別設備:“同位体分離実験装置”の本体の一部として熱拡散方式分離実験装置が設置された. それまでの経験から, 運転条件の計測・制御に重点が置かれ, 更に, 同位体比測定用の質量分析計 (HITACHI M-80), 分離カスケード・分離要素性能解析用のスーパー・ミニ・コンピュータ (HITAC E800/7) も同時に設置され, 研究環境が整った. 1981 年 3 月に装置の引渡しを受けて以来, 調整に約 1 年を費やした. その後, Ar の同位体分離実験を開始し, 1984 年にかけて, 種々の条件に対して分離性能データを取得⁽⁵⁾した. その途中, 1981 年の夏には, プロジェクト開始以来 7 年を要して, 2 次元流れ解析の解が, 全還流に対して初めて得られた⁽¹⁾. その後, 解析は連続供給・抜き出しのある場合⁽²⁾にも拡張され, また, その解を 2 次元移流・拡散方程式の入力として, 1983 年夏には, 熱拡散塔内の濃度分布⁽³⁾が得られるようになった. ここで初めて実験結果と 2 次元詳細分離性能解析結果との比較が可能となり, Ar 同位体分離に関しては, “解析は実験結果を良く再現できる”と確認⁽⁵⁾された. 1984 年夏には, H₂-HT 分離用に装置を改造し, トリチウム同位体分離のデータ取得^(6,8)を開始した. Ar の場合と同じように, 2 次元分離性能解析の結果と比較したところ, 解析の方が大きめの分離係数を与えるので検討の結果, 熱拡散ファクタの計

算法に問題があることがわかった。即ち、Arのような単原子気体に用いられるChapmann-Cowlingの式を、2原子で且つ非対称なHTに適用するのは無理があり、Mason-Monchick近似を採用すれば良い。しかし、その計算は極めて複雑で、式の値を計算するためには、何段階もの、かなり粗い近似^(7,9)をする必要があったが、分離係数の、流量/カット/圧力/熱線温度依存性等の実験結果^(6,8)をよく説明できるようになった。また、この実験装置でカバーしきれない高温の熱線温度(～1700 K)、より高圧(～0.3 MPa)の分離性能解析⁽¹⁴⁾も行った。

2次元流れ解析の解が得られた直後から、1次元軸方向濃度分布を解析的に扱うことを目標に、単純化モデルの開発に着手した。1982年には、代表平均温度概念⁽⁴⁾を導入することで解析的に実行不能な積分を回避し、設計変数を陽に形で含む塔定数の近似式⁽¹⁰⁾を導出した(手計算。1988年に数式処理言語で確認)。このモデルから、最適運転圧力が設計パラメータ、運転条件の簡単な式で表現⁽¹¹⁾され、既往の実験データをうまく説明できた。また、1988年11月には、分離係数の表式から、“深冷壁”熱拡散塔概念も着想⁽¹²⁾され、広範囲にわたる2次元流れ解析、並びに分離性能解析⁽¹⁸⁾でその有効性を確認して、現在、予備実験中^(15,17)である(SHI, 平塚研)。

これらは、当研究室に在籍した4年生、修士学生との共同研究である。そこで、ここに熱拡散同位体分離に関する論文題目を、表A.1にまとめる。研究進展の様子を辿ることができる。

A.1.3 分離性能解析の高度化— 1991～ —(1993年9月追加)

水素(H₂-D₂)同位体分離“深冷壁”熱拡散塔実験が、原研・核融合・トリチウム研の実験室(TPL)でも精力的に行われ、分離性能の飛躍的向上が確認されたが、実験結果を解析的に説明できなかった。それは、当時の分離性能解析では流れ場と濃度場の解析が切り離されており、そのままでは、粘性・熱伝導度の値が同じと見なされる物質相互か、一つの成分がトレーサ・レベルの場合にしか適用できなかったからである。更に、熱線表面でのH₂+D₂ ⇌ 2HD等の平衡移行も、多成分系の熱拡散解析も含めて考慮する必要がある。このため、流れ場・濃度場連立解法の開発に着手し、多成分拡散方程式(1991)、2成分流れ場・濃度場連立解法(1992)、平衡移行を含む3成分流れ場・濃度場連立解法(1993)と進めて、実験値との比較も可能になりつつある。

A.2 熱拡散同位体分離実験装置

- 熱拡散塔本体：パイレックス・ガラス製二重円筒管。外側は恒温循環水槽で冷却。
有効高さ：Ar; 950 mm, H₂-HT; 1500 mm。
内径：Ar; 10 mmφ, 15 mmφ, H₂-HT; 30 mmφ。
- 中心軸熱線：0.3 mmφ Mo-wire。
熱線温度は、Mo線の抵抗と温度の関係を用いて、電流制御。
- 流量・カット制御：Thermal mass sensorを用いた質量流量制御。同時に圧力制御。
- 濃度監視：Ar; 四重極型質量分析計をモニタにして、精密には二重収束型質量分析計。
H₂-HT; 供給と上下抜き出しの各々に200 cm³ 通気型電離箱をin-lineに。

なお、最初に組み立てたAr-He分離用熱拡散塔のシステムは、現在、原子核工学科3年の学生実験と、学部共通実験に用いられている。

表 A.1: 熱拡散同位体分離関係の卒論・修論題目

年月	卒論・修論・題目
1976.3	(修) 青柳: 熱拡散塔による希ガス分離に関する 数値解析と実験
1978.3	(卒) 林: 熱拡散塔による希ガス (Ar-He) 分離
1981.3	(修) 岩瀬: 熱拡散分離塔の最適運転条件に関する研究 (卒) 橋岡: 熱拡散塔の熱線表面温度変化
1982.3	(修) 加納: 熱拡散同位体分離塔の内部流れ解析 (卒) 蜂谷: 軸方向 1 次元モデルによる 熱拡散アルゴン同位体分離塔の設計 (卒) 岡田: 熱拡散塔によるアルゴン同位体分離実験 (卒) 土岐: 熱拡散塔同位体分離実験装置における データ収集システムの作成
1983.3	(修) 馬場: 熱拡散法によるアルゴン同位体分離に関する研究 (卒) 井上: 二重収束質量分析計によるアルゴン同位体の測定
1984.3	(修) 土岐: 熱拡散分離塔の最適径に関する研究 (修) 山岸: 熱拡散同位体分離塔の内部濃度分布解析 (卒) 松尾: ^{38}Ar と ^{40}Ar の熱拡散同位体分離実験
1985.3	(修) 井上: 熱拡散法による HT-H ₂ 同位体分離
1986.3	(修) 松尾: 熱拡散塔内 2 次元濃度分布解析に基づく HT-H ₂ 同位体分離の分離性能の評価
1987.3	(修) 早川: 熱拡散塔による HT-H ₂ 同位体分離の圧力依存性 (卒) 上原: 熱拡散塔による HT-H ₂ 同位体分離実験と 一次元解析 (卒) 高桑: 熱拡散同位体分離における システム制御のための研究
1988.3	(卒) 牧野: ^{14}C 熱拡散同位体分離塔の設計
1989.3	(修) 高桑: 熱拡散同位体分離性能に対する冷壁温度の影響 (卒) 鈴木: 熱拡散塔内 2 次元流れ解析において 層流解が得られなくなる条件 (卒) 田中: HT-H ₂ 同位体分離用熱拡散塔の 0.1~0.3 MPa 付近における分離性能計算
1990.3	(修) 牧野: 熱拡散同位体分離塔の性能評価用 簡単化モデルの開発とその応用 (卒) 笹野: HT-H ₂ 同位体分離用深冷壁熱拡散塔 における冷壁半径変化の影響 (卒) 野張: 熱拡散同位体分離塔簡単化モデルによる 連続供給・抜き出し時の最適冷壁半径 (卒) 八田: 水素同位体間相互の熱拡散ファクタ α_T

表 A.2: 熱拡散同位体分離関係の卒論・修論題目-II

年月	卒論・修論・題目
1991.3	(卒) 柴田：熱拡散塔による窒素同位体分離の分離性能解析 (卒) 瀬木：He 同位体分離用“深冷壁”熱拡散塔における冷壁温度及び供給流量変化の影響 (卒) 高瀬：熱拡散塔による ^{14}C 同位体分離性能解析
1992.3	(修) 八田：深冷壁熱拡散塔分離性能解析と流れ場・濃度の連立解法の開発 (卒) 小林：多成分系の熱拡散係数 (卒) 近藤：温廃水利用深冷壁熱拡散塔によるトリチウム回収システムの概略設計 (卒) 柴山：熱拡散塔による Ar 36-38-40 同位体分離の分離性能解析
1993.3	(修) 柴田：3 成分同位体分離熱拡散塔の内部濃度分布解析 (修) 瀬木：2 成分混合物分離用熱拡散塔の流れ場・濃度分布連立数値解法 (卒) 西野：中心軸冷管型熱拡散塔の分離性能評価
1994.3	(修) 小林：同位体 3 成分系における熱拡散ファクタの明示的近似解の導出 (修) 柴山：同位体交換反応を考慮した 3 成分分離熱拡散塔流れ場・濃度分布連立数値解法 (卒) 古田： ^3He - ^4He 系の分子間ポテンシャルと熱拡散ファクタ (卒) 松永： ^3He - ^4He 同位体分離熱拡散塔の分離性能に対する分子間ポテンシャルの影響
1995.3	(修) 西野：深冷壁熱拡散塔における水素同位体 3 成分分離性能解析と 4 成分流れ場・濃度分布連立数値解法プログラムの開発 (卒) 野口：中心軸冷管型熱拡散塔の分離性能解析に用いる塔定数の近似 (卒) 野田：4 成分系拡散係数の明示表現の導出 (卒) 山川：同位体 4 成分系における熱拡散ファクタの明示的近似解の導出
1996.3	(修) 古田：多成分系の拡散係数の明示表現の導出 (修) 松永：水素同位体分子 5 成分系の熱拡散塔分離性能解析 (卒) 松本：熱拡散塔上下の分離非関与領域が分離挙動に及ぼす影響

表 A.3: 熱拡散同位体分離関係の卒論・修論題目-III

年月	卒論・修論・題目
1997.3	(博) 小林 : 多成分系熱拡散現象の数理的記述法に関する研究
	(修) 山川 : 多原子分子混合気体の熱拡散ファクタに関する研究
	(卒) 富岡 : 深冷壁熱拡散塔による ^{15}N 濃縮プラントの概念設計
1998.3	(修) 野田 : 水素同位体分子 6 成分系の深冷壁熱拡散塔分離性能解析
	(修) 松本 : 同位体分離用熱拡散塔の非定常流れ場および分離挙動
	(卒) 竹永 : He-Ar 混合物分離用熱拡散塔の分離性能解析
	(卒) 堂道 : 窒素 15 分離用熱拡散塔単塔の分離性能に関する検討
1999.3	(修) 森 : 熱拡散塔内流れ場の動的安定性の数値解析と窒素同位体分離性能の冷壁温度依存性
2000.3	(博) 山川 : 多原子分子混合気体の熱拡散塔同位体分離特性
	(修) 竹永 : 熱拡散塔内流れの振動が分離性能に及ぼす影響
	(卒) 羽田野 : 分子動力学法を用いた単原子分子の拡散シミュレーション

A.3 2次元詳細分離性能解析

A.3.1 流れ場解析と濃度分布解析

連続方程式

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

運動方程式, r-成分

$$\begin{aligned} & \rho(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}) + \frac{R}{M} \frac{\partial}{\partial r}(\rho T) \\ & - (\mu_0 + \mu_1 T) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{4v_r}{3r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right) \\ & - \mu_1 \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2v_r}{3r} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

運動方程式, z-成分

$$\begin{aligned} & \rho(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) + \frac{R}{M} \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) \\ & - (\mu_0 + \mu_1 T) \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} \right) \\ & - \mu_1 \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2v_r}{3r} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right\} + \rho g = 0. \end{aligned}$$

エネルギー方程式

$$\begin{aligned} & \rho \hat{C}_v (v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) - (k_0 + k_1 T) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ & - k_1 \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{R}{M} (\rho T) \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

解析の仮定

1. 理想気体で Newton 流体.
 2. 粘性係数 μ , 熱伝導係数 k は温度 T の一次関数.
 3. 熱線表面 (半径 r_h): T_h K, 冷壁表面 (r_c): T_c K.
 4. 温度場, 流れ場は軸対称.
 5. 粘性散逸は無視.
 6. 組成平均の密度は, 組成に因って不変. これは,
 - (a) 質量差の小さい同位体混合物.
 - (b) 片方の成分が極く僅か.
- の時に成立.

数値解法

1. Control volume approach.
2. 2 次の精度の中央差分.
3. Newton 反復, Gauss の直接消去.

数値解法の工夫

1. 基準温度分布の導入. 微係数の精度向上.
2. 塔全体の質量保存則の導入. 0 への収束回避.
3. Gauss 直接消去での Scaling, Partial pivoting.

流れ解析で得られた $\{\rho_{ij}, v_{r,ij}, v_{z,ij}, T_{ij}\}$ を移流・拡散方程式に代入して, Newton 法で解く.

移流・拡散方程式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [r \rho x_A v_r - r \rho \frac{M_B}{M} D_{AB} \left\{ \frac{\partial x_A}{\partial r} + \alpha_T x_A (1 - x_A) \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\}] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [\rho x_A v_z - \rho \frac{M_B}{M} D_{AB} \left\{ \frac{\partial x_A}{\partial z} + \alpha_T x_A (1 - x_A) \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\}] = 0. \end{aligned}$$

A.3.2 H₂-HT 分子間の α_T 概略評価

The Chapman-Cowling approximation

$$D_{AB} = \frac{0.002680}{P(\text{in atm.})\sigma_{AB}^2} \sqrt{T^3 \frac{M_A + M_B}{2M_A M_B}} \cdot \frac{f_d}{\Omega^{(1,1)*}}$$

The Monchick-Sandler-Mason scheme + 粗い近似

$$\alpha_T = (6\mathbf{C}_{AB}^* - 5)_{inel} \cdot \frac{S_A x_A - S_B x_B}{Q_A x_A^2 + Q_B x_B^2 + Q_{AB} x_A x_B} + \frac{1}{5} [(6\tilde{\mathbf{C}}_{AB} - 5) - (6\tilde{\mathbf{C}}_{BA} - 5)],$$

 σ_{AB} : A-B 衝突直径 (Å) f_d : 1 次から高次近似への補正係数 (-) $\Omega^{(1,1)*}$: 無次元衝突積分, T と ϵ/k の関数 ϵ/k : 分子間ポテンシャル深さ (K), (k: the Boltzmann 定数) $\mathbf{C}_{inel}^*, \tilde{\mathbf{C}}_{AB}, \tilde{\mathbf{C}}_{BA}$: 非弾性衝突積分の比 (-) $S_A, Q_A, Q_{AB} \text{ etc.}$: 種々の衝突積分の関数 (-)HT-H₂ 混合気体 (A: HT, B: H₂) σ_{AB} : 3.06 Å, ϵ/k 30.4 K

Lennard-Jones(9-6) potential.

 $x_{HT} \simeq 0$ の時の近似式

$$\alpha_T = [(6\mathbf{C}_{AB}^* - 5)_{el} - 0.0968](-S_B/Q_B) - 0.0484 \simeq 0.0945 - 0.16337 \cdot \exp(-0.01024 \cdot T).$$

A.3.3 計算機性能への要求事項

Newton 法で要求する計算機記憶領域

 n : 変数の数. N_R : 半径方向分割数. N_Z : 軸方向分割数.ヤコビ行列サイズ : $(n \times N_R \times N_Z)^2$ 主記憶最低必要量 : $6n^2 N_R^2$ 外部記憶最低必要量 : $n^2 N_R^2 (3N_Z - 2)$ $N_R < N_Z$, 単精度:× 4B, 倍精度:8B,4 倍精度:16B.

Newton 法反復 1 回当たり計算に要する時間

メッシュ	流れ場	濃度分布	計算機 (精度)
(14×40)	18 s	-	FACOM M200(D)
(14×60)	26.7 s	-	
(24×60)	100.5 s	-	
(17×158)	~74 m	~3 m	HITAC E800/7(D)
(17×314)	~144 m	~6 m	
(17×158)	~63 s	~1.6 s	FACOM M780/20(Q)
(17×314)	~130 s	~3 s	
(24×314)	~390 s	(~10 s)	

流れ場 5~7 回.

濃度場 2~4 回 で収束

YHP-9735 (40MFLOPS)

(17×158)mesh に対し

流れ場 ~55 s, 濃度場 ~1 s.

流れ場・濃度場連立 2 成分系 ~150 s.

流れ場・濃度場連立 3 成分系 ~245 s.

連立解法では 10~23 回で収束

A.4 1次元简单化分離性能解析

塔定数

軸方向1次元輸送方程式

$$\tau_A = \tau + H \cdot x(1-x) - (K_c + K_d) \cdot \frac{dx}{dZ}$$

- τ : 分離すべき混合物の全輸送量,
- τ_A : species A の輸送,
- $x(Z)$: 半径方向に積分した species A の分率密度,
- H : 熱拡散効果による流れに関する係数,
- K_c : 対流による再混合に関する係数,
- K_d : 拡散による再混合に関する係数.

$$H \equiv 2\pi \int_{r_h}^{r_c} \alpha_T \frac{\partial \ln T}{\partial r} \left(\int_{r_h}^r \rho v_z(r) dr \right) dr,$$

$$K_c \equiv 2\pi \int_{r_h}^{r_c} \frac{1}{\rho D r} \left(\int_{r_h}^r \rho v_z(r) dr \right)^2 dr,$$

$$K_d \equiv 2\pi \int_{r_h}^{r_c} \rho D r dr.$$

α_T : 熱拡散ファクタ, (-)

D : (通常) 拡散係数, (cm²/s)

ρ : 密度, (g/cm³)

$v_z(r)$: 軸方向速度分布. (cm/s)

解析的に取扱不可能の理由 (1) $v_z(r)$ の陽表現がない. (2) 温度分布に対数を探ると解析的積分不可能. (3) 繰り返し積分が複雑.

自然対流基本式 (定常, 軸対称)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z$$

$$\downarrow \quad dp/dz = -\bar{\rho}g$$

$$0 = \bar{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \bar{\rho} \bar{\beta} g (T - \bar{T})$$

- \bar{T} : 系を代表する温度,
≡ 物性値を評価する温度.
- $\bar{\beta}$: 体積膨張率,
≡ $1/T$ 理想気体.

r_c で無次元化: $r^* \equiv r/r_c$ $\delta \equiv r_h/r_c$

境界条件 $v_z(\delta) = v_z(1) = 0$.

$$\theta^* F \rho_c = 2\pi \int_{r_h}^{r_c} \rho v_z(r) r dr.$$

温度分布 $T(r) = \frac{\Delta T}{\ln \delta} \cdot \ln r^* + T_c.$

速度分布

$$v_z(r^*) = \frac{\bar{\rho} \bar{\beta} g \Delta T \cdot r_c^2}{4\bar{\mu} \ln \delta} \times \left[\underbrace{-\frac{I_2}{I_1} \cdot f_1 + f_2}_{\text{自然対流}} + \underbrace{\frac{2\theta^* F \bar{\mu}}{\pi r_c^4 \bar{\rho} g \bar{\beta} T_c} \cdot \frac{1}{I_1} \cdot f_1}_{\text{強制対流}} \right].$$

$$f_1(\delta, r^*) \equiv -(1-r^{*2}) + \frac{1-\delta^2}{\ln \delta} \ln r^*,$$

$$f_2(\delta, r^*) \equiv -(r^{*2} - \delta^2) \ln r^*,$$

$$I_1 \equiv \int_{\delta}^1 \frac{f_1 r^* dr^*}{\ln r^* + a},$$

$$I_2 \equiv \int_{\delta}^1 \frac{f_2 r^* dr^*}{\ln r^* + a},$$

$$a \equiv T_c \cdot \ln \delta / \Delta T,$$

代表平均温度

$$\bar{T} = T_c \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \frac{1}{\ln \delta} \left(1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \right] + \frac{2\theta^* F \bar{\mu} \Delta T}{\ln \delta \pi r_c^4 \rho g \bar{\beta} T_c} \cdot \frac{1}{I_1}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &\simeq \bar{T}_0 = T_c \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{1}{\ln \delta} \left(1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \right] \\ &\simeq T_c \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)} \right] \equiv T_c \cdot A, \\ A &\equiv \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)} \right]. \end{aligned}$$

平均密度から決まる温度との関係

$$\bar{T} = \langle T \rangle \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \frac{1}{2 \ln \delta} \left(1 + 2 \frac{I_2}{I_1} \right) \right].$$

無次元輸送方程式

$$0 = w(x - x_A) + \alpha_T H^* x(1 - x) - \left(BK_c^* + \frac{K_d^*}{B} \right) \frac{dx}{dZ^*}$$

$$\text{無次元供給流量 } w \equiv \frac{2\theta^* F \bar{\mu}}{\pi r_c^4 \rho_c g} \cdot A^2,$$

$$\text{物性値・幾何条件 } B \equiv \frac{\rho_c g r_c^3}{4 \bar{\mu} D \ln \delta} \cdot \frac{\Delta T}{T_c} / A^2.$$

$$H^* \equiv \int_{\delta}^1 \frac{1}{r(\ln r + a)} \left(\int_{\delta}^r \frac{u^* r dr}{\ln r + a} \right) dr,$$

$$K_c^* \equiv \int_{\delta}^1 \frac{\ln r + a}{r} \left(\int_{\delta}^r \frac{u^* r dr}{\ln r + a} \right)^2 dr,$$

$$K_d^* \equiv \int_{\delta}^1 \frac{r dr}{\ln r + a},$$

$$\text{無次元速度 } u^* \equiv w \cdot \frac{f_1(r)}{I_1} - \frac{I_2}{I_1} \cdot f_1(r) + f_2(r).$$

無次元塔定数

$$\begin{aligned} H^* &\simeq \left[-\frac{1}{64} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2 \frac{1}{(\ln \delta)^2} \cdot \frac{2 + \ln \delta}{1 + \ln \delta} / A^2 \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right) \frac{3 \ln \delta + 4}{\ln \delta (1 + \ln \delta)} / A \right] \cdot w, \\ K_c^* &\simeq \left[\frac{1}{16^3 \cdot 27} \cdot \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{1}{\ln \delta} \cdot \frac{15(\ln \delta)^2 + 56 \ln \delta + 53}{(1 + \ln \delta)^2} / A \right] \\ &\quad + \left[-\frac{39(\ln \delta)^2 + 121 \cdot \ln \delta + 94}{8 \times 16 \times 27 \cdot (1 + \ln \delta)^2} \right] \cdot w \\ &\quad + \left[\left(\frac{T_c}{\Delta T} \right) \frac{\ln \delta}{(1 + \ln \delta)^2} \left\{ \frac{11}{24} (\ln \delta)^2 + \frac{19}{18} (\ln \delta) + \frac{5}{8} \right\} \cdot A \right] \cdot w^2, \\ K_d^* &\simeq \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{1}{2 \ln \delta} / A. \end{aligned}$$

A.5 深冷壁熱拡散塔

全還流・分離係数

$$\alpha\beta = \exp\left[\frac{\alpha_T \cdot H_0^*}{B \cdot K_{c0}^* + K_d^*/B} \cdot Z^*\right]$$

最適圧力

$$\frac{\partial}{\partial P} \alpha\beta = 0 \text{ の解.}$$

圧力依存項 $B = P^2 \cdot \frac{Mg r_c^3}{4\bar{\mu} D' R \ln \delta} \cdot \frac{\Delta T}{T_c^2} / A^2$
 $\equiv P^2 \cdot B'$

但し, $\rho_c = \frac{PM}{RT_c}$, $D' \equiv D_{st} \cdot P_{st}$ then, $D = D'/P$.

$$\frac{\partial}{\partial P} \frac{1}{P^2 B' \cdot K_{c0}^* + K_d^*/(P^2 B')} = 0$$

最適圧力 : $\bar{T} / \sqrt{r_c^3 \Delta T}$ に比例

$$P_{opt}^2 = \frac{1}{B'} \sqrt{\frac{K_d^*}{K_{c0}^*}}$$

$$= 384\sqrt{6} \cdot \frac{\mu D' R}{r_c^3 M g} \cdot \frac{T_c^2}{\Delta T} \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)}\right]^2 \sqrt{\frac{(\ln \delta)^2 (1 + \ln \delta)^2}{15 (\ln \delta)^2 + 56 \ln \delta + 53}}$$

最適圧力で得られる最大分離係数 : $\alpha_T \cdot (\Delta T / T_c A) \cdot Z^*$ に比例する引数

$$(\alpha\beta)_{P_{opt}}^{max} = \exp\left\{\alpha_T \cdot \frac{H_0^*}{2\sqrt{K_{c0}^* \cdot K_d^*}} \cdot Z^*\right\}$$

$$= \exp\left[\frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{3\sqrt{6}(2 + \ln \delta) \cdot \alpha_T \cdot Z^*}{2 \cdot \ln \delta \sqrt{15(\ln \delta)^2 + 56 \ln \delta + 53}} / \left\{1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)}\right\}\right].$$

ΔT の増加 $\rightarrow \alpha\beta$ の増加

ΔT は, $(\alpha\beta)_{P_{opt}}^{max}$ の中では $\Delta T / T_c$ の形.



$\frac{\Delta T}{T_c}$ の増加 $\rightarrow (\alpha\beta)$ の増加.

“通常冷壁” $T_c = 288.15$ K から
 “深冷壁” $T_c = 77.35$ K にすることにより,
 $\alpha\beta$ の飛躍的増大の可能性.

冷壁温度	α	β	$\alpha\beta$	P_{opt}
288.15 K	1.98	54.65	108.29	0.120 MPa
77.35 K	9.9914	1053.3	10520.46	0.038 MPa
2次元	$F = 1.0 \text{ cm}^3 \text{ (at 288.15 K, 0.1 MPa) / m}$			
詳細計算	$\theta = 0.1$ (深冷壁). $\theta = 0.5$ (通常冷壁)			

A.6 今後の課題

1. **2次元詳細解析** 流れ場と拡散問題の統合：物性値の大きく異なる混合物の分離問題への適用. Tracer 近似の除外. 多成分分離：平衡移行問題.
2. **簡単化モデル** Tracer 近似の除外. 多成分分離問題.
3. ${}^3\text{He}\text{-}{}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}\text{-}{}^{14}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}\text{-}{}^{15}\text{N}$.

A.7 同位体分離熱拡散塔関連発表論文

1. YAMAMOTO,I,KANO,H,K.,KANAGAWA,A.:

“Numerical Solution of Two-dimensional Axisymmetric Free Convection within Isotope Separating Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 22[6] 469~483,(1985). **NS**

同位体分離用熱拡散塔内自然対流の2次元軸対称数値解法

熱拡散塔内部の軸対称自然対流に関して、ブシネスク近似によらない変化方程式の数値解法を示した。これは、密度、半径ならびに軸方向速度、温度を変数とする方程式の有限差分表現を修正ニュートン法で解くものである。温度、密度の微分項に対する有限差分近似の誤差は、解析的に得られる基本温度分布からの偏差を変数とすることで減少させる。また、ガウスの消去法の際に生ずる丸めの誤差は、ヤコビ行列を正規化し行変換ピヴォーティングすることで減少させる。密度の自明解（すなわちゼロ）への収束を防ぐために、塔内の全物質保存式を用いた。

この解法を用いて、Ar 気体の熱拡散塔内の全還流流れを解いた。塔は高さ 1,000 mm, 温壁径 0.2 mm, 冷壁径 5 mm である。両壁間の温度差は 50~400 K とした。“端効果” が現れるのは、塔頂、塔底端から 15 mm の範囲であることがわかった。

2. YAMAMOTO,I,KANO,H,K.,KANAGAWA,A.:

“Effect of Changes in Feed Rate and Cut on Circulating Flow within Thermal Diffusion Column for Isotope Separation.”

J.Nucl.Sci.Technol. 23[10] 896~904,(1986). **FC**

同位体分離用熱拡散塔内循環対流への供給流量とカットの影響

連続的に、供給・抜き出しをする場合の同位体分離用熱拡散塔内 2次元軸対称流れ場を、ブシネスク近似によらない変化方程式をニュートン反復数値解法で解くことによって調べた。計算は 300 K の温度差がある内側温壁（半径 0.2 mm）と外側冷壁（半径 5 mm）の間の Ar 気体に対してなされた。塔の中間高さの点に供給される流量 F は 1 から 5 cm^3/s まで、供給流量に対する上端抜き出し流量の比であるカット θ は 0.1 から 0.9 まで変化させた。種々の (F, θ) の組合せに対する流れベクトル図、温度、密度分布図を比較すると、塔上半部で $\theta F \rho_c$ (ρ_c : 供給気体密度)、塔下半部で $-(1-\theta)\rho_c$ で与えられる全輸送量が同じ場合には、流れ場が一致することが明かである。また、供給スリット付近の質量流れベクトルを観察すると、内径 (r_c) 5 mm の塔では供給流量 F が 2 cm^3/s を超えると（すなわち $F/(\Delta T r_c^4) > 0.1$ [$1/(\text{s}\cdot\text{K}\cdot\text{cm})$] の場合）、供給流が自然対流の塔全体の循環を妨げて、分離の積み重ね効果が期待できないことがわかった。

3. YAMAMOTO,I.,YAMAGISHI,K.,KANAGAWA,A.:

“Numerical Calculation of Concentration Profiles within Thermal Diffusion Column with Continuous Feed and Draw-offs.”

J.Nucl.Sci.Technol. 24[5] 393~403,(1987). XA

連続供給・抜き出しのある熱拡散塔内濃度分布の数値計算

連続的に供給・抜き出しをする場合の同位体分離用熱拡散塔内 2 次元濃度分布を，流れベクトル，密度・温度分布を入力とする対流・拡散方程式をニュートン反復数値法で解くことによって調べた．計算は，515 K の温度差のある内側温壁（半径 0.15 mm），外側冷壁（半径 7.5 mm）の間の $^{36\sim 40}\text{Ar}$ 気体に対してなされた．塔の中間高さの点に供給される流量 F は， 2.72×10^{-4} g/s (10 cm³/min at 25 °C) から 5.45×10^{-3} g/s (200 cm³/min) まで，供給流量に対する上端抜き出し流の比であるカット θ は 0.1 から 0.9 まで変化させた．等濃度線のパターンは全輸送量（塔上半部で θF ，下半部で $-(1-\theta)F$ ）の値に大きく依存し，供給点で繋ぎ合わせた形になっている．また，温壁温度 (723~973 K, 温度差: $\Delta T = 435\sim 685$ K)，冷壁半径 ($r_c = 7.5, 5$ mm) の場合についても調べ，効果的な分離のためには $F/(\Delta T \cdot r_c^4)$ の値が $\sim 0.02/(\text{s}\cdot\text{K}\cdot\text{cm})$ 以下でなければならないことがわかった．

4. YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.:

“Reference Mean Temperature for Evaluation of Performance of Thermal Diffusion Column for Isotope Separation.”

J.Nucl.Sci.Technol. 24[6] 470~479,(1987). RT

同位体分離用熱拡散塔の分離性能評価のための代表平均温度

熱拡散塔の分離性能解析では通常，熱拡散定数などの物性値のは温度依存性を無視して，ある特定の代表平均温度での値を用いることが多い．一般的には，温度の重み付き積分平均値を用いるが，確固たる方法が存在するわけではない．自然対流を支配する運動方程式から定まる温度を，新しい代表温度として提案する．熱拡散塔の分離では，自然対流による分離の重ね合わせ効果が本質的であることを考慮したためである．この代表平均温度は塔上下の圧力差によって定まり，密度を重みとした平均温度（重力の寄与）よりも粘性力の寄与分だけ大きい．例として，熱線半径 0.2 mm，冷壁半径 5 mm の Ar 同位体分離用熱拡散塔に対して代表温度を計算し，温度差，塔の内・外径比の影響を陽的に表す近似式が有効であることを確認した．併せて，変化方程式の数値解法で得られた圧力差から代表温度を計算したところ，解析的に求めた値とよく一致した．

5. YAMAMOTO,I.,BABA,T.,KANAGAWA,A.:

“Measurement of Separative Characteristics of Thermal Diffusion Column for Argon Isotope Separation.”

J.Nucl.Sci.Technol. 24[7] 565~572,(1987). AX

Ar 同位体分離用熱拡散塔の分離特性の測定

内筒半径 7.5 mm, 中心軸の熱線径 0.3 mm, 高さ 950 mm の熱拡散塔を用いて, 供給流量, カットまたは熱線温度のいずれか, あるいはそれらを組み合わせて変化させることにより, ^{36}Ar と ^{40}Ar 同位体の分離特性を測定した。塔は 0.1 MPa で運転し, 供給流量とカットは, 供給ならびに上下抜き出し口の 3 組の熱線式質量流量調節計により, 再現精度よく制御した。Mo 熱線の温度は, 熱線の電気抵抗と温度との関係を基に電流密度で制御した。 ^{36}Ar の ^{40}Ar に対する存在比は, 二重収束質量分析計で較正した四重極マスフィルタを用いて測定した。得られたデータを軸対称-対流-拡散方程式の数値解法を基礎とした分離解析の結果と比較した。拡散係数と熱拡散定数は, レナード-ジョーンズ 12-6(略して L-J) あるいはダイヤモンド-アルダー-一般化 (D-A) ポテンシャルを用いて求めた。測定された分離パワーの値は, 解析的に予想されるより幾分小さいものの, 分離係数と分離パワーの供給流量, カットあるいは熱線と冷壁表面間の温度差に対する依存性は, L-J ポテンシャルよりもむしろ D-A ポテンシャルでうまく説明できた。

6. YAMAMOTO, I., INOUE, A., KANAGAWA, A.:

“Measurement of Separative Characteristics of H_2 -HT Isotope Separation using Thermal Diffusion Column.”

J. Nucl. Sci. Technol. 25[9] 704~711, (1988). TT

熱拡散塔による H_2 -HT 同位体分離の分離特性の測定

0.3 mm ϕ の熱線を張った内径 30 mm, 高さ 1,500 mm の塔を用いて, H_2 -HT 同位体分離実験を行った。塔は 0.1 MPa で運転し, Mo 熱線の温度は 773 K または 988 K になるように電流密度で制御した。 nCi/cm^3 オーダのトリチウム放射能は, 供給流, 上部ならびに下部抜き出し流のおおののラインへ直接挿入した 200 cm^3 の気体通過型電離箱で測定した。

実験で得られた分離係数の流量ならびにカット依存性は, 定性的には 2 次元の対流-拡散方程式の数値的ニュートン繰り返し解法による解析結果とよく一致した。しかし, 通常拡散係数と熱拡散ファクタを Chapman-Cowling 式と Lennard-Jones(12-6) ポテンシャルから求めると, 実験で得られる分離パワーの大きさは, 解析で得られるより数倍も小さい。この大きさの差は, 分子間ポテンシャル・パラメータの合理的範囲での変化によってでは減少させることはできなかった。

7. YAMAMOTO, I., MATSUO, A., KANAGAWA, A.:

“Rough Estimate of Thermal Diffusion Factor for H_2 -HT Isotopic Mixture by Separative Measurement using Thermal Diffusion Column.”

J. Nucl. Sci. Technol. 25[11] 857~867, (1988). RE

熱拡散塔を用いた分離測定による H_2 -HT 同位体混合物の熱拡散ファクタの概略評価

H_2 -HT 混合気体の熱拡散ファクタに対する Chapman-Cowling(CC) 式ならびに Monchick-Sandler-Mason(MSM) 式を, 分離解析を通して, 熱拡散塔での同位体分離実験結果と比較することにより調べた。CC 式では, 分子間ポテンシャルに依るモデルまたはパラメータの値を選んでも, H_2 と HT 間の熱拡散を定量的に説明できなかった。調べたモデルの中では, Lennard-Jones(9-6) ポテンシャルが, H_2 -HT 混合気体に対し, 最も適当であった。MSM 式への入力データが入手不能の際にも評価できるように MSM 式を近似した。さらに, 非弾性衝突積分比も, 2 通りの方法で大まかに評価した。MSM 式の適用は, その式ならびに非弾性衝突積分比の評価が大まかであるにもかかわらず, 実験と解析の差を減らすことができた。

8. YAMAMOTO, I., KABA, A., KANAGAWA, A.:

“Pressure Dependence of Separative Characteristics of Thermal Diffusion Column for H₂-HT Isotope Separation.”

Fusion Technol. 14[2] 590~595,(1988). PD

H₂-HT 同位体分離用熱拡散塔における分離特性の圧力依存性

直径 3 cm, 高さ 1.5 m の熱線型熱拡散塔で H₂-HT 同位体分離実験を行った。分離係数は、圧力、供給流量、温度差の条件を固定し、カットを 0.1 から 0.9 まで変化させて測定する。まず、定圧下で流量を変化させ、次に圧力を変えた。実験結果は、対流拡散方程式のニュートン繰り返し解法に基づく軸対称分離性能解析の結果と比較した。実験で得られた分離係数の圧力依存性は、理論的予想と定性的に一致した。供給流量が 100 cm³/m (at 0.1 MPa, 25°C) 以下では、分離パワーは、0.12~0.16 MPa で最大となる。

9. YAMAMOTO,I.,MATSUO,A.,KANAGAWA,A.:

“Interpretation of Müller-Klemm’s Formula for Thermal Diffusion Factor of Hydrogen Isotope Molecules.”

J.Nucl.Sci.Technol. 26[11] 1058~1060,(1989). Errata 27[6] 586,(1990). MK

水素同位体の熱拡散ファクタに対する Müller-Klemm 半実験式の Mason-Monchick 近似による解釈

10. YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.:

“Approximate Column Constants Expressed in Terms of Design Parameters for Hot-Wire Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 27[1] 49~55,(1990). AF

熱線型熱拡散塔に対する、設計パラメータの関数として表現された近似塔定数

Jones & Furry により開発された一次元解析は、同位体分離熱線型熱拡散塔の分離性能の概略評価に有用であるが、解析的に評価不能な塔定数が含まれるため、計算機による数値計算が不可避となって、それほど単純ではない。軸方向温度分布対数関数が分母に存在する場合、解析的に積分することが不可能なので、軸方向には一定ではあるが塔の設計パラメータに依存する代表平均温度に置き換えることにより、塔定数の近似式を導いた。半ば陽的に表現された軸方向対流速度分布を代入した複雑な繰り返し積分を、熱線と冷壁の半径比 δ の二乗以上を無視することにより筆算で実行した。得られた結果は、数式処理言語の REDUCE を用いて検算した。 δ 並びに熱線と冷壁の温度差と冷壁温度との比 ($\Delta T/T_c$) の関数として導かれた近似式は、その近似がかなり粗いにもかかわらず、塔定数の ($\Delta T/T_c$) 依存性を計算したところ、元の式による計算とよく一致した。

11. YAMAMOTO,I.,MAKINO,H.,KANAGAWA,A.:

“Optimum Pressure for Total-Reflux Operated Thermal Diffusion Column for Isotope Separation.”

J.Nucl.Sci.Technol. 27[2] 149~156,(1990). OP

同位体分離用全還流運転熱拡散塔の最適圧力

解析的に評価可能な塔定数の近似式に基づいて、全還流の熱拡散塔の最適運転圧力 P_{opt} を予測する式を導いた。この式は、(i) 分離すべき気体の物性値と冷壁半径 r_c によるパラメータ、即ち、 $\mu D' R / r_c^3 M g$ ここで、 μ ; 粘性係数、 D' ; 基準圧力に於ける拡散係数と基準圧力との積、 R ; 気体定数、 M ; 分子量、 g ; 重力加速度、(ii) 熱線半径 r_h と r_c との比、 δ 、(iii) 冷壁温度 T_c と温度差 ΔT との比、で

$$p_{opt}^2 = 384\sqrt{6} \cdot \frac{\mu D' R}{r_c^3 M g} \cdot \frac{T_c^2}{\Delta T} \left[1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)} \right]^2 \sqrt{\frac{(\ln \delta)^2 (1 + \ln \delta)^2}{15(\ln \delta)^2 + 56 \ln \delta + 53}}$$

と表される。

得られた結果を、主として Rutherford らによる実験データ (1) 二成分単原子気体系 (2) 多成分単原子気体系 (3) 同位体置換多原子気体系 (4) 低原子または低分子量系 (5) 異なる気体の混合系、と比較した。予測式が塔定数のかなり粗い近似式に基づいて得られたにもかかわらず、この式で予測された最適圧力は、低原子分子量系や異なる気体の混合系においても、実験データとよく一致した。

12. YAMAMOTO, I., KANAGAWA, A.:

“Possibility of Remarkable Enhancement of Separation Factor by “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column.”

J. Nucl. Sci. Technol. 27[3] 250~255, (1990). CW

“深冷壁”熱拡散塔による分離係数の飛躍的増大の可能性

熱拡散塔の全還流運転で得られる最大分離係数 $(\alpha\beta)_{max}$ が、温壁 T_h と冷壁 T_c 表面の温度差 ΔT に対して

$$(\alpha\beta)_{max} = \exp\left[\frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{3\sqrt{6}(2 + \ln \delta) \cdot \alpha_T \cdot Z^*}{2 \cdot \ln \delta \sqrt{15(\ln \delta)^2 + 56 \ln \delta + 53}} / \left\{ 1 - \frac{\Delta T}{T_c} \cdot \frac{4 + 3 \ln \delta}{4 \ln \delta (1 + \ln \delta)} \right\}\right],$$

と、 $\Delta T/T_c$ の形で依存することに注目すると (但し $\delta (\equiv r_h/r_c)$: 温壁の冷壁に対する半径比、 α_T : 熱拡散ファクタ、 $Z^* (\equiv Z/r_c)$: 規格化した塔高さ)、“通常の冷壁”(例えば、 $T_c = 288.15$ K) の代わりに“深冷壁”(例えば、 $T_c = 77.35$ K) を採用することによって、分離係数の飛躍的な増大が期待される。“深冷壁”の効果を、設計パラメータを陽に含む塔定数の近似式を基礎に、解析した。 $\Delta T = 1000$ K で $r_c = 1.5$ cm、 $Z = 150$ cm の場合には、“通常冷壁”熱拡散塔の H_2 -HT に対する $(\alpha\beta)_{max}$ が 63.4 であるのに対し、“深冷壁”熱拡散塔では 885 となるが、この値を“通常冷壁”熱拡散塔で得るには $\Delta T = 2430$ K が必要となり、このような高温を熱線がとることは、融ける恐れがあって不可能である。しかし、増加の大きさについては、 $\Delta T/T_c$ 比から期待されるよりも次の理由で小さくなる。即ち、(i) α_T の値は低温域で小さくなる、(ii) $(\alpha\beta)_{max}$ の指数関数の引き数が、 $\alpha_T \cdot \Delta T/T_c$ に直接比例するのではなく、 $\alpha_T \cdot \Delta T/\bar{T}$ に比例する。(ここで、 \bar{T} は、代表平均温度であり T_c よりも大きい。) また、“深冷壁”熱拡散塔の最適圧力は、上の例で 0.024 MPa であり、“通常冷壁”熱拡散塔の 0.103 MPa と比較してかなり小さい。

13. YAMAMOTO, I., KANAGAWA, A.:

“Optimum Cut of Separating Element as a Function of Total Separation Factor.”

J. Nucl. Sci. Technol. 27[6] 584~586, (1990). OC

全分離係数の関数として表された分離要素の最適カット

注目成分の供給濃度が小さい場合、分離パワーを最大にする意味での最適カットが、全分離係数が大きくなるほど小さい値になる、ことを簡単なモデルを用いて証明。論文 (19) において一般的な場合へ拡張。

14. YAMAMOTO,I.,TAKAKUWA,M.,KANAGAWA,A.:

“Numerical Calculation of H₂-HT Separative Performances up to ~0.3 MPa of Thermal Diffusion Column with Fairly Higher Hot-Wire Temperature.”

J.Nucl.Sci.Technol. 27[7] 631~641,(1990). HP

熱線温度がかなり高い熱拡散塔における ~0.3 MPa までの H₂-HT 分離性能に対する数値解析

流れならびに移流-対流方程式の二次元厳密数値解法により, 半径 15 mm, 温度 288.15 K の冷壁を有する熱拡散塔における H₂-HT 分離性能を, 圧力は ~ 0.3 MPa まで, 熱線温度は ~1700 K まで解析した. 流れ解析によれば, (i) 自然対流の大きさは, おおよそ圧力に比例し, 層流解は ~ 0.32 MPa を超えると得られない. (ii) 自然対流の大きさは, ΔT (温壁と冷壁の温度差) が ~800 K 以下では, ΔT と共に大きくなるが, ΔT がそれより大きな領域では, 自然対流の大きさはほぼ一定になるか, むしろ ΔT の増大につれて徐々に小さくなる. そこで, 圧力が ~ 0.32 MPa 以下であれば, どれほど大きな ΔT に対しても層流解が得られた. また, 分離性能解析によれば, H₂-HT 同位体分離のためには, 288.15 K の冷壁の熱拡散塔は (i) 0.15~0.2 MPa, (ii) 技術的に可能な限り大きな ΔT , (iii) 供給流量 F は 50~100 cm³ (288.15 K, 0.1 MPa)/min. で運転すればよいことがわかった.

15. HIRATA,K.,IDE,T.,MITSUI,J.,YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.,
YAMANISHI,T.,OKUNO,K.,NARUSE,Y.:

“Preliminary Experiments of Separation of Hydrogen Isotopes by the “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 27[7] 674~677,(1990). PC

深冷壁熱拡散塔による水素同位体分離の予備実験

“深冷壁の採用で熱拡散塔の分離係数が飛躍的に増大する” という予想 (12) が, 実験的に確認されたことを示す速報.

16. YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.:

“Upper Limits of Separation Factors of Binary-Mixture Separating Element as a Function of Cut and Feed Mole Fraction.”

J.Nucl.Sci.Technol. 27[12] 1151~1152,(1990). UL

カットと供給モル分率の関数として表された 2 成分分離要素の分離係数の上限値

x_F	$x_F \simeq 0$	$x_F < \theta$	$x_F > \theta$	$x_F \simeq 1$
α	$\alpha\theta < 1$	$\alpha < \frac{1-x_F}{\theta-x_F}$	unlimited	unlimited
β	unlimited	unlimited	$\beta < \frac{x_F}{x_F-\theta}$	$\beta(1-\theta) < 1$

17. MITSUI,J.,OKADA,Y.,SAKAI,F.,IDE,T.,YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.,
HIRATA,K.,YAMANISHI,T.,OKUNO,K.,NARUSE,Y.:

“Separation of Hydrogen Isotopes by an Advanced Thermal Diffusion Column using Cryogenic-Wall.”

Fusion Technol. 19[3] 1646~1150, (1991). [LT]

深冷壁を用いた最新熱拡散塔による水素同位体分離

液体窒素で冷却された深冷壁を有する熱拡散塔を用いて水素の同位体分離を行った。通常の水冷却熱拡散塔と分離係数を比較したところ、遥かに大きい値が得られた。また、深冷壁塔での実験において、熱線温度 473 K の分離係数は 1073 K の際の実験より大きかった。これは、473 K の運転では、 H_2-D_2 間の同位体平衡反応が抑えられているためだと思われる。473 K 運転では HD が見いだされなかったのに対し、1073 K 運転では平衡量の HD が生成されていた。

18. YAMAMOTO,I,TAKAKUWA,M.,MAKINO,H.,KANAGAWA,A.:

“Effect of Operating Pressure on H_2 -HT Separative Performances of “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column with Continuous Feed and Draw-offs.”

J.Nucl.Sci.Technol. 28[4] 321~330,(1991). [LP]

連続的に供給・抜き出しのある“深冷壁”熱拡散塔における H_2 -HT 分離性能に対する運転圧力の影響

流れならびに移流-拡散方程式の二次元厳密数値解法により、高さ 1500 mm、半径 15 mm、温度 77.35 K の冷壁を有する“深冷壁”熱拡散塔の H_2 -HT 分離性能を、圧力 P 、冷壁熱線温度差 ΔT 、供給流量 F をパラメトリックに変化させて解析した。流れ解析によれば、自然対流の大きさは、およそ圧力に比例し、圧力が大きくなると塔下部に二次的循環流が生じ、層流解は ~ 0.065 MPa を超えると得られない。また、分離性能解析によれば、77.35 K 冷壁の“深冷壁”熱拡散塔では、冷壁温度のみ異なり他の条件が同じの通常冷壁熱拡散塔と比較すると、(i) 分離係数、分離パワーを最大とする最適圧力は、近似的に冷壁温度に比例して、かなり小さい。(ii) 分離の程度は遥かに大きく、濃縮側分離係数 α は限界値(カット θ の逆数)にほとんど等しく、全分離係数 $\alpha\beta$ は、 $\Delta T = 1200$ K、 $F = 1$ cm³(at 288.15 K, 0.1 MPa)/min、 $\theta = 0.1$ で 10^4 にも達する。(iii) 供給流量 F を、100 cm³ (at 288.15 K, 0.1 MPa)/min に増加しても、 $\alpha\beta$ を、100 にできる、ことがわかった。また、最適圧力は、 ΔT 、 F の増加と共に、増加する。

19. YAMAMOTO,I,KANAGAWA,A.:

“Optimum Cut of Separating Element as a Function of Total Separation Factor and Mole Fraction of Component to be Separated.”

J.Nucl.Sci.Technol. 28[9] 858~862, (1991). [CX]

全分離係数ならびに被分離成分モル分率の関数として表された分離要素の最適カット

分離要素の全分離係数 $\alpha\beta$ が、カット θ ($0 < \theta < 1$) の値によらず一定であると単純化したモデルに対して、分離パワー δU を最大とする意味での最適カット θ_{opt} を、 $\alpha\beta$ と被分離成分のモル分率 x_F ($0 < x_F < 1$) の関数として導いた。 x_F の値がゼロに近いときには、最適カットは

$$\theta_{opt}^{x_F \simeq 0} = \frac{1}{\ln(\alpha\beta)} - \frac{1}{\alpha\beta - 1}$$

となり、全分離係数が大きくなるほど小さく、0に近い値になる。これに対し x_F が1に近いときには、最適カット $\theta_{opt}^{x_F \simeq 1}$ は $1 - \theta_{opt}^{x_F \simeq 0}$ であることが導かれ、全分離係数が大きくなるほど増大し、1に近い値となる。更に、 $x_F = 0.5$ の場合には、全分離係数の値に依らず最適カットは0.5となり、一般的には、最適カット $\theta_{opt}(x_F)$ は、

$$\theta_{opt}(x_F) = (1 - x_F)\theta_{opt}^{x_F \simeq 0} + x_F \cdot \theta_{opt}^{x_F \simeq 1}$$

の形で、境界値 $\theta_{opt}^{x_F \simeq 0}$ と $\theta_{opt}^{x_F \simeq 1}$ の線形補間で表現できることが示された。

20. HIRATA,K.,NAKAMURA,T.,YAMANISHI,T.,OKUNO,K.,NARUSE,Y.,YAMAMOTO,I.:

“Separation of Hydrogen Isotopes by the “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column.”
Fusion Technol. 21[2] 937~941, (1992). LD

深冷壁熱拡散塔による水素同位体分離

液体窒素で冷却された深冷壁熱拡散塔を用いて水素同位体の分離実験を行った。塔の運転は、全還流モードと連続供給・抜き出しモードで行われ、H-D系を分離した。全還流運転では、分離係数が塔内圧力と熱線温度にどのように依存するかを調べた。熱線温度 1273 K での最適圧力は 30 kPa であった。熱線温度 473 K の際の実験係数は 1273 K の場合よりも大きかったが、これは熱線上において同位体平衡反応による HD 分子の生成がないためである。塔内圧力を固定した場合、分離係数は熱線温度に指数的に比例する。供給・抜き出し運転では、流量、供給位置、供給流の組成の種々の組合せに対して、分離係数を測定した。供給流量を増大させていくと、分離係数はかなり小さくなる。供給位置、供給流の組成も分離係数に大きく影響した。

21. YAMAMOTO,I.,HATTA,S.,KANAGAWA,A.:

“Effect of Cold-Wall Temperature on Separative Performances of “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column for H₂-HT Isotope Separation.”
Fusion Technol. 21[2] 977~982, (1992). CT

深冷壁熱拡散塔による H₂-HT 同位体分離性能に対する冷壁温度の影響

冷壁温度が 77.35 K よりも低い深冷壁熱拡散塔の分離性能を解析した。H₂-HT 混合物の熱拡散ファクタ α_T は低温領域で減少し、おそらく ~70 K 以下では負になるので、常温から 77.35 K まで冷壁温度を下げた場合の実験係数の飛躍的増大に比較すれば、77.35 K 以下に冷壁温度を下げていっても、期待される分離係数の増大はそれほど大きくはない: $r_h = 0.015$ cm, $r_c = 1.5$ cm, $Z = 150$ cm, $\Delta T = 1200$ K の塔の全分離係数 $(\alpha\beta)_{max}$ の値は、供給流量 10 cm³/m (0.1 MPa, 288.15 K 換算)、カット θ を 0.1 で運転した場合、 $\sim 3.3 \times 10^3$ ($T_c = 77.35$ K, $P_{opt} = \sim 0.04$ MPa) から $\sim 6.0 \times 10^3$ ($T_c = 30$ K, $P_{opt} = \sim 0.027$ MPa) に増加するだけである。

22. YAMAMOTO,I.,KANAGAWA,A.:

“Similarity in Pressure Dependence among Separation Factors of Thermal Diffusion Column in Total Reflux Operation.”
J.Nucl.Sci.Technol. 30[8] 831~833, (1993). SP

熱拡散塔の全還流運転時における分離係数圧力依存性の相似性

$$\frac{\ln(\alpha\beta)}{\ln(\alpha\beta)_{max}} = \frac{2}{P^{*2} + 1/P^{*2}} \quad (P^* \equiv P/P_{opt})$$

23. YAMAMOTO,I.,HATTA,S.,KANAGAWA,A.:

“Effects of Flow Circulation on Hot-wire Temperature at Top and Bottom of Thermal Diffusion Column for Isotope Separation.”

J.Nucl.Sci.Technol. 30[11] 1160~1166, (1993). TB1

同位体分離用熱拡散塔の頂部および下部の熱線温度に対する循環流の影響

熱線表面の熱フラックスを一定とする境界条件下で、変化方程式を二次元厳密数値解法することにより、半径 14.7 mm、温度 80 K の冷壁を有する熱拡散塔の上端ならびに下端付近における循環流に起因する熱線の温度変化を、圧力をパラメトリックに変化させて解析した。H₂-HD(tracer level) 混合気体の全還流運転に対する流れ場解析により、(i) 自然対流の大きさは、おおよそ圧力に比例するのに対し、熱線の温度変化の大きさは、おおよそ圧力の自乗に比例する。(ii) 自然対流は、塔の上端および下端でほとんど同じ大きさの半径方向速度を有するのに対し、下端付近の熱線温度変化は、上端付近の変化量よりも大きい。(iii) 熱線温度の変化する領域は、塔の上端及び下端で循環流が回り込む領域(半径方向速度成分が有意に存在する範囲)よりも広い、ことがわかった。

24. YAMAMOTO,I.,SHIBATA,A.,KANAGAWA,A.:

“Simple Model for Prediction of Changes in Hot-wire Temperature Caused by Convection at Top and Bottom of Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 31[3] 222~227, (1994). TB2

熱拡散塔の頂部および下部の対流に起因する熱線温度変化を予想する単純モデル

熱拡散塔の上端ならびに下端付近における循環流に起因する熱線の温度変化を予想するために、一定値の半径方向速度、熱伝導度を代入したエネルギー方程式に基づく単純なモデルを示した。半径方向温度分布に関して得られた微分方程式を選点法で近似的に解き、圧力、半径方向速度、気体の物性値、塔の幾何条件で明示的に表現された熱線温度変化の式を求めた。この式から、(i) 熱線の温度変化の大きさは、おおよそ圧力の自乗に比例し、(ii) 下端付近の熱線温度変化は、上端付近の変化量よりも大きい、という熱線温度変化の特徴を定性的に説明できた。

25. YAMAMOTO,I.,SEGI,A.,KANAGAWA,A.:

“Effect of Cold-Wall Temperature on ³He-⁴He Separative Performances of a “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 31[4] 314~320, (1994). HT

深冷壁熱拡散塔による ³He-⁴He 分離性能に対する冷壁温度の影響

流れならびに移流-拡散方程式の二次元厳密数値解法により、高さ 1500 mm、半径 15 mm の冷壁を有する 0.3 mmφ 熱線熱拡散塔の ³He-⁴He 分離性能を、圧力 P 、冷壁温度 T_c 、供給流量 F をパラメトリックに変化させ、熱線冷壁温度差を 1200 K に保って解析した。Dymond-Alder ポテンシャルを用いた 77.35 K 以下の“深冷壁”熱拡散塔の分離性能解析によれば、冷壁温度のみ異なり他の条件が同じの通常冷壁(288 K)熱拡散塔と比較すると、(i) 分離の程度は遥かに大きく、全分離係数 $\alpha\beta$ は、288 K 冷壁塔で ~13(0.148 MPa) に対して、 $T_c = 10$

K, $F = 1 \text{ cm}^3(288.15 \text{ K}, 0.1 \text{ MPa 換算})/\text{min}$, $\theta = 0.1$ では $10^5(0.020 \text{ MPa})$ にも達する. (ii) 供給流量 F を $50 \text{ cm}^3/\text{min}$ に増加すると, 288 K 冷壁塔では $\sim 7(0.17 \text{ MPa})$ であるのに, $\alpha\beta$ を $2.1 \times 10^3(0.024 \text{ MPa})$ にできる, ことがわかった. また, (iii) 連続供給抜き出しの塔に対して得られた全分離係数の圧力依存性が, 全還流運転塔で導かれた相似性に従うことが見いだされた.

26. YAMAMOTO,I, MAKINO,H., KANAGAWA,A.:

“Optimum Feed Point for Isotope Separating Thermal Diffusion Column.”

J.Nucl.Sci.Technol. 32[3] 200~205, (1995). OZ

同位体分離用熱拡散塔の最適供給位置

同位体分離用熱拡散塔において, 熱線・冷壁間の温度差 ΔT , 供給流量 F , 塔内圧力 P , カット θ などの運転条件パラメータと幾何条件とで解析的に表現される概略塔定数を用いて, 分離係数 (従って分離パワー) を最大にする意味で最適な, 供給流供給位置 (軸方向高さ, l_{opt} : 塔下部からの無次元高さ) が満足すべき式を求めた. この式をニュートン繰返し法で解くと, 最適供給位置が得られる. $\text{H}_2\text{-HT}(\text{Tracer level: } 7.3 \times 10^{-10})$ を分離する通常冷壁 ($T_c = 288 \text{ K}$) 熱拡散塔に対して, $\Delta T = 1000 \text{ K}$, $F = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3(\text{i.e., } 50 \text{ cm}^3)/\text{min}$ (at 0.1 MPa, 288 K), $\theta = 0.5$ の運転条件下で, 最適供給位置を求めたところ, $l_{opt} = \sim 0.2$ となった. 供給位置を変えた場合の 2 次元詳細計算で求めた最適供給位置は, $l_{opt} = \sim 0.17$ であり, 概略モデルでも十分な情報が得られる. また, 軸方向濃度分布と比較したところ, 最適供給位置は, 半径方向積分塔内 HT 濃度が供給流の濃度に一致する位置に, おおむね等しくなることがわかった.

27. KOBAYASHI,N., YAMAMOTO,I.:

“Thermal Diffusion Coefficient in Multi-component Mixture Expressed in Terms of Binary Thermal Diffusion Factors and Binary Diffusion Coefficients.”

J.Nucl.Sci.Technol. 32[12] 1236~1242, (1995). MD3

2 成分系熱拡散ファクタと 2 成分系拡散係数を用いて表した多成分系熱拡散係数

多 (ν) 成分系の熱拡散係数は, Hirschfelder らにより 2 つの行列式の比の形で与えられている. これを多成分系中の各 2 成分系の熱拡散ファクタの線形和で表すことを目標として, 2 成分系の関係式を拡張した 4 つの候補を評価した. これらの候補を以下の 2 点について解析的に検討した. 1) ほとんど 2 成分系とみなせる場合, 2 成分系の関係式と等しくなる. 2) 多成分系の熱拡散係数の総和がゼロになる. この条件を満たすのは,

$$D_i^{T(\nu)} \leftarrow \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^{\nu} M_i M_j D_{ij}^{(2)} \alpha_{Tij}^{(2)} x_i x_j$$

(ここで, c は系のモル濃度, ρ は系の密度, $D_{ij}^{(2)}$ は 2 成分系の拡散係数, M_k , x_k は化学種 k の分子量, モル分率) のみであった. アルゴン 36-38-40 同位体 3 成分系, キセノン 129-131-132-134 同位体 4 成分系で, この線形式から得られる温度依存性, 組成依存性は, Hirschfelder の熱拡散係数から得られる依存性と一致した.

28. FURUTA,H., YAMAMOTO,I.:

“Diffusion Coefficients in 4-Component Mixture Expressed Explicitly in Terms of Binary Diffusion Coefficients and Mole Fractions”

J.Nucl.Sci.Technol. 33[8] 650~653, (1996). MD4

2 成分系拡散係数とモル分率で明示的に表現された 4 成分系拡散係数

Hirschfelder らが定義した行列式の比を用いて、 $D_{ij}^{(4)}$ を 2 成分系拡散係数とモル分率で明示的に表現した。この $D_{ij}^{(4)}$ の明示式は、注目 $i-j$ 対への依存項と、全成分中の任意の対に対する共通項の 2 項に分割されている。 $D_{ij}^{(4)}$ のこれらの 2 項は対応する $D_{ij}^{(3)}$ の 2 項を拡張した類似構造を持っている。

29. KOBAYASHI,N.,YAMAMOTO,I.:

“Comparison of Definitions of Ordinary Diffusion Coefficients in Multi-component Mixture”
J.Nucl.Sci.Technol. 33[8] 663~667, (1996). MD0

多成分混合物中の通常拡散係数の定義の比較

多成分混合気体の通常拡散係数の定義に注目し、Hirschfelder が与えた理論と、Chapman-Cowling の理論を比較した。拡散係数の両定義に関して、(i) 拡散係数の不確定な自由度を除くための処理、(ii) 物質保存のための条件、および (iii) 対称性について、差異を明確にした。

さらに、Chapman-Cowling の拡散係数を用いて Hirschfelder の拡散係数を表現する式を導いた。この関係式と、Ern らによって既に求められている逆関数により 2 つの拡散係数が相互換算可能である。

30. KOBAYASHI,N.,SHIBATA,A.,YAMAMOTO,I.:

“Numerical Solution of Argon 36-38-40 Concentration Profiles within Thermal Diffusion Column”
J.Nucl.Sci.Technol. 33[10] 781~786, (1996). A3

熱拡散塔内におけるアルゴン 36-38-40 濃度分布の数値解析

連続供給・抜き出しのある 3 成分同位体分離熱拡散塔の軸対称濃度分布について、移流・拡散方程式をニュートン繰り返し法を用いて解くことにより求めた。ここで、流れ場の変数は入力値として特定された。2 成分系の熱拡散ファクタと 2 成分系の拡散係数を用いて表した多成分系の熱拡散係数の近似表現を解析に用いた。

天然同位体比の 3 成分系アルゴン 36-38-40 同位体の分離について、高さ 950 mm, 内筒径 15 mm ϕ , 熱線径 0.3 mm ϕ の熱拡散塔での実験結果と解析結果とを比較した。解析および熱拡散係数の近似式の妥当性は、実験値と良く一致したことから確認できた。

31. KOBAYASHI,N.,HATTA,S.,YAMAMOTO,I.:

“Effect of Radii of Hot and Cold Walls on H₂-HT Separative Performances of “Cryogenic-Wall” Thermal Diffusion Column”
Fusion Technol. 30[3] 936~940, (1996). HC

“深冷壁”熱拡散塔の H₂-HT 分離性能に対する温壁および冷壁の半径の影響

流れ場と移流・拡散の方程式の 2 次元数値解を用いて、“深冷壁”熱拡散塔の H₂-HT 分離性能に対する温壁および冷壁の半径の影響を評価した。解析は、高さ 1500 mm, 温壁温度 1277 K および 冷壁温度を 77K に固定し、いくつかの温壁・冷壁半径の塔について、供給流量をパラメトリックに変化させて行った。解析結果から、供給流量が小さいときには半径の小さい塔が、供給流量が大きいときには半径の大きい塔が便利であることが分かった。

32. ARITA, T., YAMANISHI, T., IWAI, Y., OKUNO, K., KOBAYASHI, N., YAMAMOTO, I.:

“A Tritium Recovery System from Waste Water of Fusion Reactor Using CECE and Cryogenic-Wall Thermal Diffusion Column”

Fusion Technol. 30[3] 864~868, (1996). TR1

CECE と深冷壁熱拡散塔を用いた核融合炉廃液からのトリチウム回収システム

水中のトリチウムの回収システムを提案した。このシステムは CECE と深冷壁熱拡散塔で構成される。核融合施設における廃水処理および日本の重水炉からのトリチウム回収の 2 つの場合について設計研究をした。CECE を用いたシステムは、水蒸留法を用いたシステムより大きさ・電力消費量ともかなり小さくなった。また、深冷壁熱拡散塔は、深冷蒸留法より運転・メンテナンスが容易なので、提案したシステムは処理流量が比較的小さいトリチウム施設における廃水処理などの場合に適用可能である。

33. KOBAYASHI, N., YAMAMOTO, I.:

“Comparison of Expressions of Thermal Diffusion Phenomena in Multi-component Mixture”

J.Nucl.Sci.Technol. 34[1] 73~79, (1997). MD1

多成分混合物中の熱拡散現象の表現の比較

Hirschfelder らおよび Chapman-Cowling が与えた多成分混合気体中の熱拡散現象の一般表現を比較し、(i) Chapman-Cowling は多成分系の熱拡散ファクタを定義しているが、Hirschfelder らは定義していない、(ii) Monchick らは、Hirschfelder らの理論に従い、多成分系の熱拡散ファクタを導入しているが、熱拡散ファクタの明示的な定義を示していない、ことが分かった。

本論文では、Hirschfelder の理論に基づいた多成分系の熱拡散ファクタを、Chapman-Cowling の定義と同じになるように提案する。提案された熱拡散ファクタが Monchick らの導入したものと一致することを確認した。

34. KOBAYASHI, N., YAMAKAWA, H., YAMAMOTO, I.:

“Explicit Approximation to Thermal Diffusion Factor in Isotopic 3-component Mixture”

J.Nucl.Sci.Technol. 34[2] 167~175, (1997). MD2

3 成分同位体混合物中の熱拡散ファクタの明示的近似解

混合気体が同位体から成り、同位体間の相対質量差の 2 乗が無視できるほど小さいとき、3 成分混合物中の熱拡散ファクタの近似解を解析的に導き、2 成分系のものと一致することを見出した。3 成分系アルゴン 36-38-40 同位体混合物の熱拡散ファクタの厳密解と近似解との相対差は、 ~ 0.01 以下であった。

35. KOBAYASHI, N., YAMAMOTO, I.:

“Isotopic Approximation to Ordinary Diffusion Coefficients in Multi-component Mixture”

J.Nucl.Sci.Technol. 34[3] 318~324, (1997). MD5

多成分混合物中の通常拡散係数の同位体近似

同位体間の相対質量差の 2 乗を無視する近似を使って、3 成分系ならびに 4 成分系の通常拡散係数の同位体近似を導出した。また、多成分系の拡散係数の同位体近似表現を、3 成分系ならびに 4 成分系の近似表現から類推し、これらの近似が、厳密な通常拡散係数に課せられる制約を満たすことを確認した。4 成分系 6 フッ化ウラン同位体、 $^{234}\text{UF}_6$ - $^{235}\text{UF}_6$ - $^{236}\text{UF}_6$ - $^{238}\text{UF}_6$ 混合物で、同位体近似表現の組成依存性は厳密表現の依存性と一致した。また、5 成分系クリプトン同位体 80-82-83-84-86 混合物の拡散係数の厳密表現と近似表現の間の相対差は、0.2 % 以下であった。

36. KOBAYASHI,N.,YAMAKAWA,H.,YAMAMOTO,I.:

“Isotopic Approximation to Thermal Diffusion Coefficients in Multi-component Mixture”
J.Nucl.Sci.Technol. 34[4] 394~397, (1997). MD6

多成分混合物中の熱拡散係数の同位体近似

多成分系の通常拡散係数および熱拡散ファクタの同位体近似を用いて、多成分系の熱拡散係数の同位体近似を導出した。この結果は、以前数値的に妥当性が確認された、2 成分系の拡散係数と熱拡散ファクタを用いた多成分系の熱拡散係数の表現と一致した。

37. YAMAKAWA,H.,KOBAYASHI,N.,ENOKIDA,Y.,YAMAMOTO,I.:

“Inverse Power Series Fittings of Temperature Dependence of Thermal Diffusion Factors between Two Components of Hydrogen Isotope Molecules”
J.Nucl.Sci.Technol. 35[3] 234~239, (1998). EF

水素同位体分子 2 成分間の熱拡散ファクタ温度依存性に対する逆べき級数のあてはめ

2 成分系の水素同位体分子の一方の成分がトレーサレベルの場合の熱拡散ファクタ $\alpha_{Tab}^{[A] \approx 1.0}$ の温度依存性を以前に報告された熱拡散ファクタの“概略評価”の近似式との相対誤差が 0.01 以下になるように、25 から 1500 K まで逆べき級数を用いてあてはめた。熱拡散ファクタの組成依存性は、モル分率の c 乗の線形関数で表した。

38. YAMAKAWA,H., SEGI,A.,KOBAYASHI,N.,MATSUNAGA,T.,ENOKIDA,Y.,YAMAMOTO,I.:

“Effect of Gravity and Intermolecular Potential on ^3He - ^4He Separative Performances of “Cryogenic-wall” Thermal Diffusion Column”
Fusion Engineering and Design. 39-40 1015~1020, (1998). GIP

深冷壁熱拡散塔 ^3He - ^4He 分離性能に与える重力と分子間ポテンシャルの影響

熱拡散塔 ^3He - ^4He 分離性能に与える重力と分子間ポテンシャルの効果について、供給流量 F とカット θ をそれぞれ $1 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$ (at 288.15 K, 0.1 MPa) と 0.1 に固定し、冷壁温度 T_c 、圧力 P 、温壁と冷壁の温度差 ΔT をパラメトリックに変化させ、移流拡散方程式の 2 次元厳密数値解を用いて解析した。月面上では、全分離係数 $\alpha\beta$ が最大値を取るという意味での最適圧力 P_{opt} は、地球上のそれに比べて、約 $\sqrt{6}$ 倍大きくなる。熱拡散ファクタ α_T の温度依存性は、分子間ポテンシャルに大きく依存している。それゆえ、熱拡散塔の分離性能は、 T_c と ΔT が変化するにつれ、分子間ポテンシャルにより変化する。設計解析では、ヘリウムの α_T の温度依存性を評価することが重要となる。

39. ARITA, T., YAMANISHI, T., OKUNO, K., YAMAMOTO, I.:

“Experimental Study of Separative Performances of Cryogenic-wall Thermal Diffusion Column for H-D and H-T Mixture”

Fusion Engineering and Design. 39-40 1021~1026, (1998). EHD

H-D と H-T 混合物の深冷壁熱拡散塔分離性能に関する実験的研究

H-D と H-T 混合物 の分離特性を、深冷壁熱拡散塔 (CTD) を用いて測定した。実験は、連続供給抜き出しの条件で行われた。1.5 × 0.3 m φ の塔を使用した場合、30 分以内で定常状態となった。供給流量が増加するにつれ、H-D と H-T 系のどちらも、分離性能が減少し、最適圧力は高圧領域に移る。供給流量 25 cm³ min⁻¹ (at 0.1 MPa, 273 K) の場合、最大分離係数は、H-D については 16.4、H-T については 26.0 であった。最大分離係数が得られるという意味での最適圧力は、H-D 系でのそれより、H-T 系では少し大きくなる。

40. YAMAKAWA, H., MATSUMOTO, K., ENIOKIDA, Y., YAMAMOTO, I.:

“Numerical Analysis of Dynamic Behavior at Start-up of the Thermal Diffusion Column”

J. Nucl. Sci. Technol. 36[2] 198~203, (1999). IC

水素同位体分離用熱拡散塔の起動時における動特性の数値解析

熱拡散塔の非定常濃度分布を解析するための数値計算コードを開発した。HT-H₂ についての数値解析を、有効塔長 1,500 mm、熱線半径 0.15 mm、冷壁半径 15 mm の熱拡散塔について行った。HT-H₂ の濃度に対する初期分布は、すでに定常流れ場が形成されている塔の内部で一様である。数値計算の結果を以前に報告した実験結果と比較した。数値解析と実験結果の HT の起動時の過渡応答はよく一致する。熱拡散塔が供給気体と同じ濃度の混合気体で満たされているところから運転を開始する場合には、まず、塔の上下でほぼ同等の HT 濃度の勾配が形成され、供給、抜き出しの物質収支を満足する定常の濃度分布に向かって、ほぼ同じ傾きを保ちながら変化することがわかった。

41. YAMAKAWA, H., MATSUMOTO, K., ENIOKIDA, Y., YAMAMOTO, I.:

“Effect of Operational Pressure on Periodic Oscillation of Secondary Circulation near the Bottom”

J. Nucl. Sci. Technol. 36[3] 297~303, (1997). PO

熱拡散塔底部付近での副次的な循環流の周期的振動に対する運転圧力の影響

高圧領域での熱拡散塔内の非定常流れ場を解析するための数値計算コードを開発した。H₂-HT についての数値解析を、有効塔長 1,500 mm、熱線半径 0.15 mm、冷壁半径 15 mm の熱拡散塔について行った。冷壁温度 77.35 K、熱線温度 1277.35 K の条件では、流れ場は、圧力が 0.112 MPa 未満では定常に達した。しかしながら、塔底部付近での副次的な循環流は、圧力が 0.112 MPa を超えると周期的に動く。流れ場の振動数は、圧力の増加に伴い大きくなる。流れ場が定常状態から周期的な変動状態に変化する限界の圧力が、今回の解析により見出された。

42. YAMAKAWA, H., KOBAYASHI, N., ENOKIDA, Y., YAMAMOTO, I.:

“Thermal Diffusion Factor for Diatomic Gas Mixture
in Multicomponent System”

J.Nucl.Sci.Technol. 37[4] (in press), (2000). TDD

多成分系の 2 原子分子混合気体熱拡散ファクタ

多成分系に適用できる実用的な形で 2 原子分子気体の熱拡散ファクタを表現した。多成分系の熱拡散係数から、熱拡散係数と熱拡散ファクタの関係式を用いて、2 原子分子気体の熱拡散ファクタを求めたが、それは、Masonらにより“一般化 Stefan-Maxwell 方程式”を通して導出されている熱拡散ファクタと同じであることが示された。本研究の熱拡散ファクタの表現は、以前に報告された水素 2 成分系の熱拡散ファクタに関する概略評価式に理論的根拠を与える。H₂-HT 2 成分混合気体について、今回の表現と比較したところ、報告されている近似表現は、50 から 1200 K までの温度範囲で熱拡散ファクタを過大評価するが、その差は小さいことがわかった。本研究の表現は、2 原子多成分系の熱拡散塔分離解析で欠くことのできないものであり、2 原子気体 2 成分系に対する概略評価式とも一貫性がある。

43. YAMAKAWA,H.,MORI,S.,TAKENAGA,Y.,KOBAYASHI,N.,ENOKIDA,Y.,YAMAMOTO,I.:

“Effect of Cold Wall Temperature of Thermal Diffusion Column for ¹⁴N¹⁵N - ¹⁴N₂ Isotope Separation”

Submitted to *J.Nucl.Sci.Technol.* CWN

¹⁴N¹⁵N - ¹⁴N₂ 同位体分離に対する熱拡散塔の冷壁温度の効果

有効塔長 950 mm, 熱線半径 0.15 mm, 冷壁半径 5.0 mm の熱拡散塔を用いて、¹⁴N¹⁵N - ¹⁴N₂ の分離性能に与える冷壁温度の効果を調べた。塔は、供給流量 10 cm³/min (at 0.1 MPa, 298.15 K) で、0.1 MPa の定圧に保ち、冷壁の温度は、熱線と冷壁の温度差を 235 K に固定し、223 K から 283 K まで 20 K ずつ変化させた。冷壁温度を下げると、全分離係数は大きくなるが、223 K と 243 K ではほぼ同じ値であった。実験で得られた分離係数と移流拡散方程式の数値計算の結果を比較した。非弾性効果を取り入れた熱拡散ファクタを用いた数値解析の結果は、非弾性効果を取り入れないものに比べて、分離係数のカット依存性や冷壁温度依存性を良く再現した。しかし、冷壁温度が下がるにつれて、解析と実験結果の差は大きくなった。

44. YAMAKAWA,H.,MORI,S.,ENOKIDA,Y.,YAMAMOTO,I.:

“Estimation of Hot Wire Temperature of Thermal Diffusion Column by the Pressure Change after Turning on Electricity”

Submitted to *J.Nucl.Sci.Technol.* HWT

通電後の圧力変化による熱拡散塔の熱線温度の評価

信頼性の高い熱線表面温度評価法を開発した。この方法は、熱線に通電前後の圧力変化と気体の熱伝導で決定される半径方向温度分布との間のボイル-シャルルの法則に基づくものである。本方法により評価された熱線温度は、熱電対による直接測定値と良く一致し、また放射率補正目盛を熱電対により校正した放射温度計のそれらとも良く一致した。本測定による熱線温度を用いた分離解析は、窒素同位体の分離実験結果をうまく予測できた。本方法は、連続的な供給抜き出しのある実験についても有効である。