非線形制御特論 講義ノート

藤本 健治
名古屋大学

平成 19 年 3 月 29 日

第1章　はじめに

本講義は，非線形の微分方程式で記述された制御対象を操るための非線形制御理論に関するものである．入出力の関係が線形であるような制御対象に対する線形制御理論はすでに体系化されており，工学のさまざまな分野で利用・応用されている．実際の制御対象は非線形性を含んでいることが多いが，これまでは非線形な対象をすべて線形のモデルで近似することで取り扱ってきた．しかしより高精度な操りや解析のためには，非線形の対象をそのまま扱う非線形制御理論が必要であり，現在その発展が望まれている．またこの理論は非線形の微分方程式系を扱うため，力学系理論などの理学系分野の研究とも関連深いものとなっている．

ここでは非線形制御理論の基礎となる，線形代数・微積分・微分方程式などの道具を利用して，非線形制御系の安定性の解析や制御系設計の指針を扱う．制御系設計に関しては，その多くの問題がある種の偏微分方程式を解くことに帰着され，一般に難しい問題となるが，とくに対象をロボットや電気回路などの物理システムに限れば，簡単で効率の良い設計・解析手法が得られている．本講義では，基礎理論から上記のように実際に使えるツールまでを体系的に扱う．

以下の構成は次のようになっている．2章で制御理論で用いられる微積分の基本的事項を復習する．3章で非線形制御の基礎となる安定論を学ぶ．4章では，メカトロニクス系を対象としたモデル化の方法とその性質を扱う．5章ではもっとも一般的な非線形制御の方法である最適制御およびそれに関連した制御方を学ぶ．6章では，メカトロニクス系を対象とした受動性に基づく制御手法を扱う．7章では，メカトロニクス系などの物理系の制御に有効なフィードバック線形化とその周辺のツールを紹介する．

なお本講義資料は，改訂中であり最新版は`http://www.haya.nuem.nagoya-u.ac.jp/~fujimoto/`よりダウンロードできる．

第2章　さまざまな微分

前章でも述べたように，本稿では非線形の制御対象であるメカトロニクス系のモデル化と制御手法について解説する．線形制御で活躍した道具は，古典制御では複素解析，現代制御では線形代数をはじめとした数学のツールである．非線形制御でこれらにかわるものは，実はかなり古典的な微分積分と微分方程式論である．ここでは以下で用いる道具を簡単に復習しておく．

2.1　スカラ関数の微分

スカラ関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の**導関数** (derivative) は，

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$$

(図が入る!) 逆にスカラ関数 $g(x)$ が与えられたときには，

$$G(x) = \int_{x^0}^{x} g(\xi)\ \mathrm{d}\xi + G(x^0)$$

で g の積分が定義できるが，$g = f'$ で，ある x^1 に対して $G(x^1) = f(x^1)$ のときには，

$$G(x) = f(x)$$

となる．導関数を単に**微分** (differential) とも呼ぶ．

2.2　ベクトル値関数と偏微分

関数の引数 x がベクトルである場合や関数の値がベクトルである場合はどうするのか? 拡張したのが偏微分である．たとえば，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の場合，

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x_1+\epsilon,x_2)-f(x_1,x_2)}{\epsilon}$$

のように，変数毎に微分を行ったものである．これをまとめて，$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ の微分を

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$$

ここで $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

逆に関数 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ が与えられたときにそのヤコビ行列 $\partial g(x)/\partial x$ が対称であれば，

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} = g(x)$$

となるようなスカラ関数 $G:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ が存在することが知られている．この条件は，3 次元実ベクトル空間 (ユークリッド空間) では，

$$\mathrm{rot}\ g(x)=0$$

と等価であり，ベクトル解析で良く知られた結果となる．

2.3　座標変換と微分方程式

偏微分と座標変換: たとえば $f(x_1,x_2)$ に関して，$\bar{x}_1=\phi(x_1,x_2)$ という変換の書き方は危険．たとえば，

$$\bar{x}_1=x_1-x_2$$

とすると，変換後の座標での f の x_2 に関する偏微分は，

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1+x_2,x_2)}{\partial x_2}=\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\bar{x}_1+x_2}+\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=\bar{x}_1+x_2}$$

となり，元の座標での f の x_2 に関する偏微分とは値が変わることに注意．このように，たとえ x_2 に関しては変換を行わない (恒等変換) 場合でも，

$$\left(\begin{array}{c}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{array}\right)=\Phi(x_1,x_2)=\left(\begin{array}{c}x_1-x_2\\ x_2\end{array}\right)$$

のように書くことが望ましい．

また，一般に座標変換は**微分同相写像**である．微分同相写像とはそれ自身なめらかで，かつなめらかな逆変換が存在するものをいう．写像 $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が局所的に微分同相になる必要十分条件は，そのヤコビ行列

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}=\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial\phi_n(x)}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\phi_n(x)}{\partial x_n}\end{array}\right)$$

が正則なこと．ただし $\Phi(x)=(\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x))$.

実際に非線形系

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}&=&f(x,u)\\ y&=&h(x,u)\end{array}\right.$$

を座標変換

$$\bar{x}=\Phi(x)$$

で変換してみよう．新しい座標 $\bar{x}$ 上での系の挙動は，

$$\dot{\bar{x}}=\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}f(x,u)=\left.\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\right|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}f(\Phi^{-1}(\bar{x}),u)=:\bar{f}(\bar{x},u)$$

となり，ヤコビ行列が現れる．出力関数は次のようになる．

$$y=h(x,u)=h(\Phi^{-1}(\bar{x}),u)=:\bar{h}(\bar{x},u)$$

2.4　強微分と弱微分

$f : X \to Y$ ただし X, Y は Banach 空間.

$$\mathrm{D}f(x)(\xi) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon\xi) - f(x)}{\epsilon}$$

を満たす微分を**弱微分** (weak differential)，**方向微分**，**Gâteaux 微分**という.

$$\mathrm{d}f(x)(\xi) = f(x+\xi) - f(x) + o(\|\xi\|)$$

を満たす微分を**強微分**，**Fréchet 微分**という.

引数の一つを固定して得られる線形作用素 $\mathrm{d}f(x) : X \to Y$ を導関数 (derivative) と呼ぶ．また第 2 引数の ξ は通常微少量であるので，

$$\mathrm{d}f(x)(\mathrm{d}x)$$

と書くことが多い．ここから連想されるように，合成関数の強微分は通常の微分と同様

$$\mathrm{d}(f\circ g(z))(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(f(g(z)))(\mathrm{d}g(z))(\mathrm{d}z)$$

のように連鎖の法則が成り立つ.

2.5　変分

汎関数の微分を変分という.（入力の変化量を**曲線の変分**と言ったりもする.）$x \in L_2^n(t^0, t^1)$ とすると，関数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を用いて汎関数

$$\mathbf{f}(x) := \int_{t^0}^{t^1} f(x(t))\ \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

を定義する．と書ける．これの微分は，$\mathrm{d}\mathbf{f}(x)(\mathrm{d}x)$ であり，導関数 $\mathrm{d}\mathbf{f}(x)$ は線形作用素である．各点 x では，

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\xi = f(x+\xi) - f(x) + o(\|\xi\|)$$

が成り立つ．これを積分して

$$\int_{t^0}^{t^1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\xi(t)\ \mathrm{d}t \quad = \quad \mathbf{f}(x+\xi) - \mathbf{f}(x) + \int_{t^0}^{t^1} o(\|\xi(t)\|)\ \mathrm{d}t$$

ここで信号のノルムとして L_∞ ノルム

$$\|x\|_{L_\infty} := \sup_{t\in(t^0,t^1)} |x(t)|$$

を選ぶと，

$$\frac{\left|\int_{t^0}^{t^1} o(\|\xi(t)\|)\ \mathrm{d}t\right|}{\|\xi\|_{L_\infty}} \quad \leq \quad \frac{(t^1 - t^0)\cdot o(\|\xi\|_{L_\infty})}{\|\xi\|_{L_\infty}}$$

したがって，$o(\cdot)$ の定義から

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(x)(\xi) = \int_{t^0}^{t^1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\xi(t)\ \mathrm{d}t$$

となる．

なお，通常 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ の微小変化を $\mathrm{d}x$ と書くため，これと区別するために $x \in L_2$ の微小変化を δx と書く (変分)．この表記を用いると，(2.1) 式の微分 (変分) は

$$\delta\mathbf{f}(x)(\delta x)$$

となる．

第3章　非線形制御の基礎

前章のモデル化述べたようにロボットを含むメカトロニクス系の多くは非線形系である．ここでは非線形系の制御の概要を述べる．

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{cases}$$

ここで $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は，それぞれ入力，出力，状態を表す．したがって「非線形制御」が必要になる．本章では，非線形制御の基礎となる安定論を取り扱う．

3.1　リアプノフの安定性解析

3.1.1　時不変システムの安定性

平衡点

安定性は制御工学の礎である．まず制御系が安定とならなければ，何の制御も行えない．安定性にもいくつかのバリエーションがあるが，もっとも良く用いられるリアプノフの安定性からはじめよう．ここでは，入出力のないシステムを考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

まずは平衡点から話をはじめよう．**平衡点**とは，

$$f(x^1) = 0$$

を満たす点 x^1 である．この点から出発すると，解はずっとこの点にとどまる，すなわち $x(t) = x^1$ が解となる．$x = x^1$ が平衡点のとき，

$$\bar{x} := x - x^1$$

と座標変換すると，

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} = f(x) = f(\bar{x} + x^1) =: \bar{f}(\bar{x})$$

となり，変換後の系は $\bar{x} = 0$ が平衡点となる．このことから，以下では (3.1) 式の系において $x = 0$ が平衡点と仮定しておく．なお，平衡点は唯一とは限らず複数存在する場合もあれば，そもそも存在しない場合もある．

局所的な安定性

- **近傍**という言葉の定義:
  原点の近傍とは，原点を内点として含む集合で，必ずしも小さな集合を表すわけではない．
- 安定性
  任意に与えられた正定数 ϵ に対して $\delta(\epsilon)$ が存在し，
  $$\|x(0)\| \le \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \le \epsilon, \ \ \forall t \ge 0$$
  を満たすとときき，システム (3.1) の平衡点 $x = 0$ は (リアプノフの意味で) **安定**であるいう．
- 漸近安定性
  $x = 0$ が安定であり，かつある原点の近傍に含まれる任意の初期値からの状態の軌跡が
  $$x(t) \to \infty, \quad t \to \infty$$
  を満たすとき**漸近安定**であるという．
- 指数安定性
  次を満たす正定数 a, b が存在し，かつある原点の近傍に含まれる任意の初期値からの状態の軌跡が次を満たすとき**指数安定**であるという．
  $$\|x(t)\| \le a\mathrm{e}^{-bt}\|x(0)\|, \quad \forall t \ge 0$$

[例] (マスバネダンパ系)
$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = 0$$
$k > 0$, $d \ge 0$ のとき安定，さらに $k > 0$, $d > 0$ のとき漸近安定．
これはいずれも局所的な安定性であることに注意．大域的な安定性には少し注意が必要．

- class-K 関数:
  $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が連続，単調増加で $\alpha(0) = 0$ を満たすならば，class-K に属するといい，
- class-K_∞ 関数:
  $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が class-K 関数で，かつ以下を満たすならば class-K_∞ に属するという．
  $$\lim_{s\to\infty} \alpha(s) = \infty$$
- class-KL 関数:
  $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が連続で，$\beta(\cdot, t)$ は class-K，$\beta(s, \cdot)$ は非増加で以下を満たす．
  $$\lim_{t\to\infty} \beta(s, t) = 0$$

この関数を用いると，

- 安定性
  原点の近傍で次が成立:
$$\text{安定} \iff \exists\alpha \in \text{class-}K \ \text{ s.t. } \|x(t)\| < \alpha(\|x(0)\|), \ \ \forall t \geq 0$$

- 漸近安定性
  原点の近傍で次が成立:
$$\text{漸近安定} \iff \exists\beta \in \text{class-}KL \ \text{ s.t. } \|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t), \ \ \forall t \geq 0$$

正定関数とリアプノフ関数.

- 正定性
  スカラ関数 $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は，ある原点の近傍に含まれる任意の x に対して次を満たすとき正定であるという.
$$V(x)\begin{cases} = 0 & (x = 0) \\ > 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$
  原点の近傍で以下が成り立つ.
$$V(x) : \text{正定} \iff \exists\alpha \in \text{class-}K \ \text{ s.t. } V(x) \geq \alpha(\|x\|), \ V(0) = 0$$

- 半正定性
  スカラ関数 $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は，ある原点の近傍に含まれる任意の x に対して次を満たすとき半正定 (準正定) であるという.
$$V(x)\begin{cases} = 0 & (x = 0) \\ \geq 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

どちらも局所的な性質であることに注意しよう.
[例] マスバネダンパ系のエネルギー:
$$V(q, \dot{q}) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{\dot{q}}{2m}$$

定理 1 *[リアプノフの安定性定理]*

- 安定性
  V が正定で，$\dot{V}$ が半負定ならば安定.

- 漸近安定性
  V が正定で，$\dot{V}$ が負定ならば漸近安定.

- 指数安定性
  次を満たす正定数 a, b, c, および $p \geq 1$ が存在して，ある原点の近傍に含まれる任意の x に対して次を満たせば指数安定.
$$a\|x\|^p \leq V(x) \leq b\|x\|^p$$
$$\dot{V} \leq -c\|x\|^p$$

この関数 $V(x)$ を**リアプノフ関数**という．ここで，$\dot{V}$ は

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

で与えられることに注意.
問: 1 次元の系 $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ の安定 (漸近安定) のための必要十分条件は $f(x)$ が半負定 (負定) であることを示せ.

大域的な安定性

- 大域的漸近安定性
  任意の状態の軌跡が次を満たすとき，**大域的漸近安定**であるという.
  $$\sup_t \|x(t)\| < \infty$$
  $$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$
  これは以下と等価.
  $$\text{大域的漸近安定} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\beta \in \text{class-}KL \;\; \text{s.t.} \;\; \|x(t)\| \le \beta(\|x(0)\|, t), \;\; \forall t \ge 0$$
- 大域的指数安定性
  任意の状態の軌跡に対して次を満たす正定数 a, b が存在するとき**大域的指数安定**であるという.
  $$\|x(t)\| \le a\mathrm{e}^{-bt}\|x(0)\|$$

定理 2 *[リアプノフの安定性定理]*

- 大域的漸近安定性
  V が大域的に正定かつ半径方向に非有界で，$\dot{V}$ が大域的に不定ならば大域的漸近安定.
- 大域的指数安定性
  次を満たす正定数 a, b, c, および $p \ge 1$ が存在して，すべての x に対して次を満たせば大域的指数安定.
  $$a\|x\|^p \le V(x) \le b\|x\|^p$$
  $$\dot{V} \le -c\|x\|^p$$

ここで

- 大域的正定性
  スカラ関数 $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は，すべての x に対して次を満たすとき大域的に正定であるという.
  $$V(x) \begin{cases} = 0 & (x = 0) \\ > 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$
  $$\lim_{\lambda\to\infty} V(\lambda x) \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

これは次と等価．

$$V(x) : \text{大域的正定} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\alpha \in \text{class-}K \;\; \text{s.t.} \;\; \|V(x)\| \geq \alpha(x), \; V(0) = 0$$

- 半径方向に非有界

$$\lim_{\lambda\to\infty} V(\lambda x) = \infty, \quad \forall x \neq 0$$

これは次と等価．

$$V(x) : \text{大域的に正定かつ半径方向に非有界} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\alpha \in \text{class-}K_\infty \;\text{s.t.}\; \|V(x)\| \geq \alpha(x), \, V(0) = 0$$

[例] 数値例
ハミルトン系の例 (radially unbounded の意味)

3.1.2 時変システムの安定性

平衡点

時変システムの場合を簡単に取り扱っておく．

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{3.2}$$

これは元々時変のシステムを扱うときに必要になるだけでなく，たとえば (3.1) 式のような時不変なシステムの (軌道追従制御などを行う際に) 軌道回りの安定性を考える際にも必要になる．軌道を $x^d(t)$ として，

$$\bar{x}(t) := x(t) - x^d(t)$$

と定義すると，

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} - \dot{x}^d(t) = f(\bar{x} + x^d(t)) - \dot{x}^d(t) =: \bar{f}(\bar{x}, t)$$

となり，時変システムの安定性帰着される．ここでは (3.2) 式のような時変システムの原点 $\bar{x} = 0$ の漸近安定性を考察する．

局所的な安定性

- 安定性
  任意に与えられた正定数 ϵ と任意の初期時刻 t^0 に対して $\delta(t^0, \epsilon)$ が存在し，

$$\|x(t^0)\| \leq \delta(t^0, \epsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq \epsilon, \;\; \forall t \geq t^0$$

  を満たすとき，システム (3.2) の平衡点 $x = 0$ は**安定**であるいう．

- 一様安定性
安定であり，かつ $\delta(t^0, \epsilon)$ が初期時刻 t^0 に依存しないとき，**一様安定**であるという．これは，原点の近傍で以下と等価．

$$\text{一様安定} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in \text{class-}K \;\; \text{s.t.} \;\; \|x(t)\| \geq \alpha(\|x(t^0)\|)$$

- 漸近安定性
$x = 0$ が安定であり，かつ任意の初期時刻 t^0 に対してある正定数 $\delta(t^0)$ に対して $\|x(t^0)\| < \delta(t^0)$ を満たす任意の初期値からの状態の軌跡が

$$x(t) \to \infty, \quad t \to \infty$$

を満たすとき**漸近安定**であるという．

- 一様漸近安定性
$x = 0$ が漸近安定であり，かつ $\delta(t^0)$ が t^0 に依存しないとき**一様漸近安定**であるという．これは以下と等価．

$$\text{一様漸近安定} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \beta \in \text{class-}KL \;\; \text{s.t.} \;\; \|x(t)\| \leq \beta(\|x(t^0)\|, t - t^0), \;\; \forall t \geq 0$$

- 指数安定性
次を満たす正定数 a, b が存在し，ある原点の近傍に含まれる任意の初期値からの状態の軌跡が次を満たすとき**指数安定**であるという．

$$\|x(t)\| \leq a\mathrm{e}^{-b(t-t^0)}\|x(t^0)\|, \quad \forall t \geq 0$$

正定性:

- 正定性
スカラ関数 $V(x,t)$ は，以下を満たす class-K 関数 α が存在してある原点の近傍で次を満たすとき**正定**であるという．

$$\begin{aligned} V(0,t) &\equiv 0 \\ V(x,t) &\geq \alpha(\|x\|) \end{aligned}$$

- 半正定性
スカラ関数 $V(x,t)$ は，ある原点の近傍で次を満たすとき**半 (準) 正定**であるという．

$$\begin{aligned} V(0,t) &\equiv 0 \\ V(x,t) &\geq 0 \end{aligned}$$

- デクレセント
スカラ関数 $V(x,t)$ は，以下を満たす class-K 関数 α が存在してある原点の近傍で次を満たすとき**デクレセント**であるという．

$$\begin{aligned} V(0,t) &\equiv 0 \\ V(x,t) &\leq \alpha(\|x\|) \end{aligned}$$

定理 3 *[リアプノフの時変安定性定理]*

- 安定性
  V が正定で，$\dot{V}$ が半負定ならば安定．
- 漸近安定性
  V が正定で，$\dot{V}$ が負定ならば漸近安定．
- 安定性
  V が正定かつデクレセントで，$\dot{V}$ が半負定ならば一様安定．
- 漸近安定性
  V が正定かつデクレセントで，$\dot{V}$ が負定ならば一様漸近安定．
- 指数安定性
  次を満たす正定数 $a, b, c,$ および $p \geq 1$ が存在して，ある原点の近傍に含まれる任意の x に対して次を満たせば指数安定．

$$a\|x\|^p \leq V(x,t) \leq b\|x\|^p$$
$$\dot{V} \leq -c\|x\|^p$$

時変の非線形システムに沿ったスカラ関数 $V(x,t)$ の時間微分は

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

であることに注意する．

大域的な安定性

3.1.3 線形システムの安定性

対象が線形システムの場合には，漸近安定性と指数安定性，局所的安定性と大域的安定性，は全て等価となる．また $V > 0$ は，P を正定行列として

$$V(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} P\, x$$

と書けるので，$\dot{V} < 0$ の条件は，Q を正定行列として

$$PA + A^{\mathrm{T}} P + Q = 0$$

となる．これをリアプノフ方程式といい，A が安定 (固有値が全て負) ならば任意の正定な Q に対して正定解 P が存在することが知られている．またもちろん A の固有値の実部がすべて負，であることと等価である．

また (3.1) 式の線形近似システムを使った安定判別が行える．

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0} x =: Ax$$

定理 4 *(3.1)* 式のシステムの原点が指数安定である必要十分条件は，その線形近似システムの原点が安定となることである．

3.2　リアプノフの方法の拡張

3.2.1　ラサールの不変性原理

リアプノフの定理では，リアプノフ関数 V の時間微分が負定のときに系の漸近安定性を示すことができた．ここでは，時間微分が半負定のときに，ある種の条件の元では漸近安定性を示すことができることをみる．

- 不変集合
  任意の初期状態 $x(t^0) \in B$ から始まる系 (3.1) の解 $x(t)$ が任意の時刻 $t \geq t^0$ で $x(t) \in B$ であるとき，この集合 B を**不変集合** (invariant set) という．

- レベル集合
  スカラ関数 $V(x)$ に対して，$V(x) \leq c$ を満たす $x \in \mathbb{R}^n$ の集合を**レベル集合** (level set) といい，$L_V(c)$ と記す．

定理 5 *[ラサールの不変性原理]* レベル集合 $L_V(c)$ が有界で，かつ任意の $x \in L_V(c)$ に対して $\dot{V}(x)$ が半負定となる正数 c とスカラ関数 $V(x)$ が存在するものとする．このとき，$L_V(c)$ 内の任意の初期状態から出発した解 $x(t)$ は，$L_V(c)$ 内にとどまり，集合

$$N = \{\ x \in L_V(c) \mid \dot{V}(x) = 0\ \}$$

に含まれる最大の不変集合に収束する．

漸近安定性に関しては，次のような系が導かれる．

系 1 *(3.1)* 式の系に対して，ある原点の近傍でスカラ関数 $V(x)$ が存在し，その時間微分 $\dot{V}(x)$ が半負定とする．ある時刻以降の解 $x(t) \neq 0$ が，$\dot{V}(x) = 0$ を恒等的に満たさないならば，システムの原点は漸近安定である．

[例] マスバネダンパ系

3.2.2　リアプノフの逆定理

リアプノフの安定性の解析法が役に立つのは，実はこれがある種の必要十分条件だからである．ここでは結果だけを述べる．

定理 6 *[リアプノフの逆定理]*

- 漸近安定性
  (3.1) 式の原点が漸近安定ならば，ある原点の近傍で次を満たす C^j 級関数 $V(x)$ と *class-K* 関数 α, β, γ, ζ が存在する．ただし $f(x)$ は C^j 級とする．

$$\begin{aligned}
&\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|) \\
&\dot{V}(x) \leq -\gamma(\|x\|) \\
&\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq \zeta(\|x\|)
\end{aligned}$$

- 指数安定性
  (3.1) 式の原点が指数安定ならば，ある原点の近傍で次を満たす C^j 級関数 $V(x)$ と正定数 a, b, c, d が存在する．ただし $f(x)$ は C^j 級とする．

$$
\begin{aligned}
&a\|x\|^2 \le V(x) \le b\|x\|^2 \\
&\dot{V}(x) \le -c\|x\|^2 \\
&\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \le d\|x\|
\end{aligned}
$$

3.2.3 その他の補題

補題 1 *[Gronwall-Bellman の補題]* $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数，$\mu : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続で非負の関数とする．もし連続関数 $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ が

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)\mathrm{d}s, \quad a \le t \le b$$

を満たすならば，

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int_s^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

が成立する．とくに $\lambda(t)$ が定数の場合には

$$y(t) \le \lambda \exp\left(\int_a^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

さらに $\mu(t)$ も定数で非負の場合には，

$$y(t) \le \lambda \exp\left(\mu(t-a)\right)$$

補題 2 *[Barbalat の補題]* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を一様連続関数とする．いま

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(\tau)\mathrm{d}\tau < \infty$$

とすると，

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$$

3.3 フィードバック安定化

結局，

$$\dot{x} = f(x,u)$$

という制御対象を漸近安定化する問題は，安定化フィードバック

$$u = k(x)$$

と安定性を示すためのリアプノフ関数 $V(x)$ を同時に求める問題になる．すなわち，

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, k(x)) \leq 0 \quad (\text{負定})$$

となる．これは変数 k や V に関して非線形な偏微分方程式であり，一般に解くのは難しい．次章以降でこれを簡単にするいくつかの方法について述べる．

3.4　入出力安定性

これまでは，

$$\dot{x} = f(x)$$

の形の微分方程式 (状態方程式) の解 $x(t)$ の安定性を考察してきた．実際の非線形の制御対象はこれに入力と出力を加えた系として表現される．

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \quad x(0) = x^0 \\ y &= h(x, u) \end{cases}$$

この系は入力の信号空間 u から出力の信号空間 y への写像 (関数) $y = \Sigma(u)$ と考えられる．

3.4.1　L_p 空間とスモールゲイン定理

ここで信号 u や y の空間としては，通常 L_p ノルムが有限となる L_p 空間およびその拡張空間 L_{pe} 空間を用いる．まず L_p ノルムを定義しよう．

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_p} &:= \left(\int_0^\infty |x(t)|^p \ \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|x\|_{L_\infty} &:= \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \end{aligned}$$

- L_p **空間**とは，L_p ノルムが有限となる信号の空間
- L_{pe} **空間**とは，任意の時刻 $T \geq 0$ 以降を 0 で置き換えた信号の L_p ノルムが有限となる信号の空間
  例えば x_T を
  $$x_T(t) := \begin{cases} x(t) & t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$
  とすると，任意の $T \geq 0$ に対して $x_T \in L_p$ となる信号の空間を $x \in L_{pe}$ と表記し，L_p 拡張空間と呼ぶ．

とくに $p = 2$ の場合が良く用いられる．
(例 1) L_2 信号の例

$$\|\mathrm{e}^{-t}\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t} \mathrm{d}t} = \sqrt{\left[-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} \right]_0^\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(例 2) L_{2e} であるが，L_2 でない例

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t} = [\log(1+t)]_0^\infty = \infty$$

これは

$$\dot{x} = -2x^3$$

の解で出てくる!!!

- L_p **安定性**: $\Sigma : u \mapsto y$ は，

$$u \in L_p \quad \Rightarrow \quad y \in L_p$$

  のとき L_p 安定であるという．

- L_p **有界ゲイン**: $\Sigma : u \mapsto y$ は，

$$u \in L_{pe} \quad \Rightarrow \quad \|y_T\|_{L_p} \leq \gamma \|u_T\|_{L_q} + b$$

  のとき L_p 有限ゲイン安定，もしくは L_p 有限ゲインを持つという．さらに上式を満たす最小の γ を Σ の L_p ゲインといい，ここでは簡単のため $\gamma_p(\Sigma)$ と書く．

(フィードバック系の図)

定理 7 *[スモールゲイン定理]* Σ_1 と Σ_2 は L_p 有限ゲイン安定とする．このとき，

$$\gamma_p(\Sigma_1) \cdot \gamma_p(\Sigma_2) < 1$$

ならば，Σ_1 と Σ_2 フィードバック系の入出力 $(e_1, e_2) \mapsto (u, y)$ は L_p 有限ゲイン安定となる．

これは，非線形のロバスト制御 (非線形 H_∞ 制御) で重要な役割を果たす定理である．

3.4.2　受動性と受動定理

- **受動性** $\Sigma : u \mapsto y$ (L_{2e} 上の写像) は，任意の $T \geq 0$ に対して次を満たす定数 β が存在するとき**受動的**であるという．

$$\int_0^T y(t) \cdot u(t) \ \mathrm{d}t \geq -\beta$$

- **強受動性** $\Sigma : u \mapsto y$ (L_{2e} 上の写像) は，任意の $T \geq 0$ に対して次を満たす定数 $\epsilon > 0$, β が存在するとき**強受動的**であるという．

$$\int_0^T y(t) \cdot u(t) \ \mathrm{d}t \geq \epsilon \int_0^T |u(t)|^2 \ \mathrm{d}t - \beta$$

定理 8 *[受動定理]* 図*??*のような *well-posed* なフィードバック系を考える．

- Σ_1, Σ_2 が受動的ならば，フィードバック系は受動的になる．
- Σ_1, Σ_2 が強受動的ならば，フィードバック系は強受動的になる．
- Σ_1 は強受動的で L_2 有限ゲイン安定，Σ_2 は受動的であるとすると，このフィードバック系は L_2 有限ゲイン安定である．

(例) Σ_1: 受動的, Σ_2: 定数ゲイン．

3.4.3　スモールゲイン定理と受動定理の関係

定理 9 $\Sigma : u \mapsto y$ に対して，次のように $\tilde{\Sigma} : \tilde{u} \mapsto \tilde{y}$ を定義する．

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u + y \\ \tilde{y} &= u - y\end{aligned}$$

- $\gamma_2(\Sigma) \leq 1 \iff \tilde{\Sigma}$: 受動的
- $\gamma_2(\Sigma) < 1 \iff \tilde{\Sigma}$: 強受動的

この変換によってスモールゲイン定理と受動定理は等価になる．例えば Σ_1 と Σ_2 が L_2 有限ゲイン安定のとき，$\tilde{\Sigma}_1 := \Sigma_1 \circ \Sigma_2$, $\tilde{S}_2 = \mathrm{id}$ とおいて $\hat{u} = (\tilde{u}+\tilde{y})/2$, $\hat{y} = (\tilde{u}-\tilde{y})/2$ 等と入出力を変換すると，受動定理により安定性を判断できる．(図)

3.5　消散性

3.1, 3.2 節では状態方程式の内部の状態の安定性を，3.4 節では入出力の信号空間での安定性をそれぞれ考察した．この二つの安定性の概念は一見違うように見えるかも知れないが，実は密接に関連している．これらを結び付ける概念が，消散性である．

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) & x(0) = x^0 \\ y = h(x,u) \end{cases}$$

- **消散性**スカラ関数 $s(u,y)$ とシステム Σ に対して

$$S(x(T)) \leq S(x(0)) + \int_0^T s(u(t), y(t))\ \mathrm{d}t \tag{3.3}$$

  を満たすスカラ関数 $S(x) \geq 0$ が存在するとき，Σ は**供給率** $s(u,y)$ に関して**消散的 (散逸的)** であるという．スカラ関数 $S(x)$ は**蓄積関数**と呼ばれる．とくに，上式で等号が恒等的に成り立つとき Σ は $s(u,y)$ に関して**無損失**であるという．

(例) L_2 有限ゲイン安定

$$s(u,y) = \gamma\|u\|^2 - \|y\|^2$$

(例) 受動性

$$s(u,y) = y \cdot u$$

(例) ISS $(y = x)$

$$s(u,x) = \alpha_1(\|u\|) - \alpha_2(\|x\|)$$

(3.3) 式を微分すると，

$$\dot{S}(x) \leq s(u,y)$$

すなわち以下と等価である．

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x,u) \leq s(u, h(x,u))$$

この関数は次のように構成できる．

定理 10 システム Σ が供給率 s に関して消散的である必要十分条件は，

$$S_a(x^0) := \sup_{\substack{u \\ T\geq 0}} \left(- \int_0^T s(u(t), y(t))\ \mathrm{d}t \right), \quad x(0) = x^0$$

が有界となることである．さらに $S_a(x)$ が存在するとき，任意の蓄積関数 $S(x)$ に対して

$$S_a(x) \leq S(x)$$

が成り立つ．

この $S_a(x)$ を**有効蓄積関数** (available storage function) という．S_a は，入出力安定性の定義に用いられたバイアス項 β の最小値を表しており，初期状態の関数となる．

$$-\int_0^T s(u, y) \leq \beta$$

(例)

Proof まず必要性を示す．系が消散的であるとすると，次を満たす半正定関数 $S(x)$ が存在する．

$$S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T s(u(t), y(t))\mathrm{d}t$$

すなわち

$$S(x(0)) \quad \geq \quad S(x(T)) - \int_0^T s(u(t), y(t))\mathrm{d}t$$

上式はすべての u について成り立つので，

$$S(x(0)) \quad \geq \quad S(x(T)) + S_a(x(0)) \geq S_a(x(0))$$

次は十分性．もし $S_a(x)$ が有限であるとすると，定義より

$$S_a(x(0)) - S_a(x(T)) \geq -\int_0^T s(u(t), y(t))\mathrm{d}t$$

これより消散性の条件が導かれる．

$$S_a(x(T)) \leq S_a(x(0)) + \int_0^T s(u(t), y(t))\mathrm{d}t$$

□

安定性に関しては，次のような簡単な性質が導かれる．

定理 11 供給率 $s(u, y)$ に関して消散的なシステム Σ は s が

$$s(0, y) \leq 0$$

を満たし，かつ $S(x)$ が正定関数であるならば，Σ に 0 を入力したシステムは安定であり，

$$\{x \mid s(0, h(x, 0)) = 0\}$$

に含まれる最大の不変集合に収束する．

またいくつかの特殊な供給率 $s(u,y)$ に関しては，入力 u を用いない消散性の確認方法も存在する．

定理 12 入力にアファインな非線形系が受動的であるための必要十分条件は，以下の方程式を満たす半正定関数 $V(x)$ が存在することである．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} f(x) &\leq 0 \\
\frac{\partial V}{\partial x} g(x) &= h(x)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

この性質はすぐに確認できる．

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}\left(f(x)+g(x)u\right) \\
&\leq y^{\mathrm{T}} u
\end{aligned}
$$

定理 13 入力にアファインな非線形系が L_2 ゲイン γ 以下であるための必要十分条件は，以下の *Hamilton-Jacobi* 方程式を満たす半正定関数 $V(x)$ が存在することである．

$$
\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} h(x)^{\mathrm{T}} h(x) = 0
$$

十分条件はすぐに確認できる．

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}\left(f(x)+g(x)u\right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial x} g(x) u - \frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2} h(x)^{\mathrm{T}} h(x) \\
&= -\frac{\gamma^2}{2}\left\| u - \frac{1}{\gamma^2} g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}} \right\|^2 + \underbrace{\frac{\gamma^2}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2}_{s(u,y)} \\
&\leq s(u,y)
\end{aligned}
$$

必要性については次章で取り扱う．

第4章　メカトロニクス系のモデル

ここではロボットも含むメカトロニクス系のモデル化について説明する．

4.1　非線形状態方程式

線形制御における制御対象の記述は，次のような線形の常微分方程式であった．

$$\begin{cases} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{cases}$$

ここで $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は，それぞれ入力，出力，状態を表す．本講義で扱うメカトロニクス系は，非線形系であるので，上式の右辺が非線形関数になる．つまり次式のような制御対象を扱うことになる．

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{cases} \tag{4.1}$$

逆にこの形でモデル化できれば，それを制御するためのツールは，(線形制御の場合ほど完備されていないにせよ) いくつかは用意されている．したがって，以下では，この $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ の導くいくつかのメカトロニクス系のモデルについて述べる．

4.2　ニュートンの運動方程式

まず機械系の部分からモデル化を行ってみよう．機械系といえども力学系であるので，そのダイナミクスは通常のニュートンの運動方程式に支配される．まずは関節を考えずに，剛体 1 つの質点系の運動がどのようなものであったか簡単に復習しよう．

(図??) のような質量 $m \in \mathbb{R}$ の質点の運動は，以下のように表される．

$$m\ddot{z} \;=\; f - d_z\dot{z} \tag{4.2}$$

ここで，$z \in \mathbb{R}^3$ は質点の 3 次元位置であり，$f \in \mathbb{R}^3$ は加える力である．また d_z は，速度に関する摩擦係数を表す．このようにリンクが一つでかつ質点の場合には，ニュートンの方程式から簡単にダイナミクスを導出できる．しかし，たくさんのリンクが関節でつながれた系の場合には，この計算はやっかいなものとなるため，解析力学のツールを用いるのが便利である．以下でそれを述べよう．

4.3 変分原理

解析力学 (ハミルトンの原理) は，ニュートンの法則を置き換える別の「もっと簡単な」法則 (原理) を与えるもの．なので「なぜ?」と聞いてはいけない．時間の空間 $t \in [t^1, t^2] \subset \mathbb{R}$ とその上での (ベクトル値) 関数の空間 $q \in C([t^1, t^2]; \mathbb{R}^m)$ を考える．さらに q, $\dot{q}$, t のスカラ関数 $L(q, \dot{q}, t)$ を考え，それを用いた汎関数

$$\mathbf{L}(q, \dot{q}) := \int_{t^1}^{t^2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\ \mathrm{d}t$$

を定義する．

ニュートンの法則に支配される $q(t^1) = q^1$ から $q(t^2) = q^2$ までの運動を，「評価関数 $\mathbf{L}$ が極値をとる運動」で置き換えられることを**発見**したのが解析力学の最大の功績である．(L の具体的な形は後述．)

上の説明からわかるように，運動方程式は

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\mathbf{L}(q, \dot{q})(\delta q, \delta \dot{q}) = 0, \quad \forall \delta q, \delta \dot{q} \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = \dot{q} \end{aligned}$$

これを書き下すと，

$$\mathrm{d}\mathbf{L}(q, \dot{q})(\delta q, \delta \dot{q}) = \int_{t^1}^{t^2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \mathrm{d}t$$

ただし δq, $\delta \dot{q}$ は，本来独立変数であるが，拘束条件

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q = \delta \dot{q} \\ &\delta q(t^1) = \delta q(t^2) = 0 \end{aligned}$$

を採用すると，部分積分より

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{L} &= \int_{t^1}^{t^2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t^1}^{t^2} \\ &= \int_{t^1}^{t^2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \mathrm{d}t \end{aligned}$$

これがすべての変分 (微少変化) δq に対して成り立つためには，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = 0 \tag{4.3}$$

とならなくてはならない．これが汎関数 $\mathbf{L}$ に対する変分原理から導かれる運動方程式である．

もちろん L を適当にとれば，力学系の運動以外のものも表せる．たとえば 3 次元空間内の光路 $q(t) \in \mathbb{R}^3$ を考える．その場合のラグランジュ関数 L は，

$$L(q, \dot{q}, t) = \int_{t^1}^{t^2} \frac{\|\dot{q}\|}{\sqrt{1 + \|\dot{q}\|^2}} \mathrm{d}t$$

である．これを運動方程式に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|(1+\|\dot{q}\|^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0 \tag{4.4}$$

したがって，

$$\frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|(1+\|\dot{q}\|^2)^{\frac{3}{2}}}=C_1 \quad (\in \mathbb{R}^3)$$

平方をとって整理すると，

$$\|\dot{q}\|=\sqrt{\frac{1}{\|C_1\|^{\frac{2}{3}}}-1}$$

(4.4) 式より，

$$\dot{q}=\frac{C_1}{\|C_1\|}\sqrt{\frac{1}{\|C_1\|^{\frac{2}{3}}}-1}$$

となり，光速度一定の性質が導かれる．

4.4 オイラー・ラグランジュ方程式

前節で与えた変分原理において，ラグランジュ関数 L を

$$L=K-P \tag{4.5}$$

とおいた場合に (4.3) 式は，実際の運度方程式を与えることになる．この運動方程式を**オイラー・ラグランジュ方程式**と呼ぶ．ここで K は運動エネルギー (kinetic energy)，P は位置エネルギー (potential energy) である．

ここで，(4.3) 式には入力が入っていないが，外力 $u(t)$ はロボットでいうところの角関節 (配位変数) の大きさを増減させる方向に加えられる．これは，q_i 軸方向に仮想的に時変の力 $u_i(t)$ が働くのと同じであり，それに対応する位置エネルギー[1]

$$-u(t)^{\mathrm{T}}q \tag{4.6}$$

を加えたラグランジアン

$$L^u(q,\dot{q},u(t),t):=L(q,\dot{q},t)+u(t)^{\mathrm{T}}q \tag{4.7}$$

を考えてやれば良い[2]．運動方程式は次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^u(q,\dot{q},u(t),t)}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L^u(q,\dot{q},u(t),t)}{\partial q}=0$$

もしくは，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}=u(t)$$

[1]ただし u が状態変数の関数であるときには，簡単ではない．

[2]劣駆動系の場合には，適当な行列をはさんで

$$-u(t)^{\mathrm{T}}B(q)^{\mathrm{T}}q$$

となる．

これが制御で用いる運動方程式となる．

簡単のため，前節の質点系を再び考え，配意座標を $q := z$ で定義しておく．また (図??) の質点は，ポテンシャルエネルギー $P(q)$ が存在する空間の中を運動するものとする．この質点の運動エネルギーは，

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

である．解析力学の方法を用いると，この系に対して

$$L(q,\dot{q}) := K(\dot{q}) - P(q)$$

でラグランジュ関数を定義すると，系の運動方程式は次で与えられることになる (ハミルトンの原理)．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = (\text{外力}) \tag{4.8}$$

この式をオイラー・ラグランジュの方程式 (Euler-Lagrange equation) と呼ぶ．実際に質点系の場合に上式を書き下してみると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{z} + \frac{\partial P(z)}{\partial z} = f - d_z\dot{z}$$

のようになり，(4.2) にポテンシャル場の影響が加わった運動方程式が得られているのがわかる．ただしこの形はまだ (4.1) 式の状態方程式の形になっていないので，変形してみよう．状態を $x := (q,\dot{q})$, 入力を $u := f$ と定義すると，次のような状態方程式になる．

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \frac{1}{m}\left(-\frac{\partial P(z)}{\partial z} - d_z\dot{z} + f\right) \end{pmatrix} =: f(x,u)$$

以上で述べた質点系の例は非常に簡単な例であるが，ロボットなどの多リンク系では，運動方程式は非常に複雑になる．そんな場合でも，運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー P が計算できれば，ハミルトンの原理を用いることで自動的に運動方程式を求めることができる．またこれらの計算は，Maple や Mathematica あるいはフリーソフトの Maxima などの代数計算 CAD を用いて計算できる．

質点系の例ではなく一般のメカトロニクス系の場合に，(4.8) 式がどのように (4.1) 式に変形されるかについて補足しておく．一般に (4.5) 式の運動エネルギー K は，速度 $\dot{q}$ に関する 2 次形式になっていることに注意しよう．これを，

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}M(q)\ \dot{q} \tag{4.9}$$

と書いておく．$q \in \mathbb{R}^m$ ならば，$M(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ である．この形を用いて，(4.3) 式の「(外力)」の「(外力)」の部分を摩擦力 $-D(q,\dot{q})$ と入力 u の和で置き換えると，次のようになる．

$$M(q)\ \ddot{q} + \dot{M}(q)\ \dot{q} - \frac{\partial K(q,\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} + D(q,\dot{q}) = u$$

すなわち，

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}M(q)\ \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} - \dot{M}(q)\ \dot{q} - D(q,\dot{q}) + u\right)$$

この式は配意座標 q に関する 2 階の微分方程式であるので，状態を $x := (q, \dot{q})$ で定義して次の 1 階微分方程式である状態方程式を得る．

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q} M(q)\ \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} - \dot{M}(q)\ \dot{q} - D(q, \dot{q}) + u\right) \end{pmatrix}$$

(例) 2 リンク系の例 (別紙)

4.5 ハミルトン系

4.5.1 ルジャンドル変換

ルジャンドル変換とは，スカラ関数を別のスカラ関数に移す変換である．$f(x)$ というスカラ関数が与えられたときに

$$F(x, p) = xp - f(x)$$

という関数を考えよう．f は凸関数で $f''(x) > 0$ であると仮定しておく．x-y 平面で，$y = f(x)$ と $y = px$ の距離が極大になる点を $x(p)$ とすると，$x(p)$ の満たすべき条件は，

$$\frac{\partial F(x, p)}{\partial x} = 0$$

となる．すなわち，

$$p = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

$f''(x) > 0$ よりこの逆変換が一位に定まり，$x = x(p)$ が得られる．求める関数 g は，

$$g(p) := F(x(p), p)$$

である．x がベクトルでも同様に定義できる．

このルジャンドル変換には，二つの重要な性質がある．

- ルジャンドル変換は凸関数を凸関数に移す．($f''(x) \neq 0$ でないと定義できない)
- ルジャンドル変換の 2 乗は恒等変換である．(対合性)

対合性より，上記の関数 $x(p)$ は次のようにあわらせる．

$$x(p) = \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$$

4.5.2 ハミルトンの正準方程式

解析力学の分野でオイラー・ラグランジュ方程式の次に現れるのがハミルトン系である．ひとことで言えば，ハミルトン系とはオイラー・ラグランジュ方程式を座標変換したものに過ぎないが，新たな座標系でダイナミクスを表現することで元の系では見えない性質が見えてくる．まず

天下り式であるが，ここでラグランジュ関数の L の変数 $\dot{q}$ に関するルジャンドル変換 (Legendre transformation) としてハミルトン関数の候補 $\bar{H}(q,\dot{q},p,t)$ を定義しよう．

$$\bar{H}(q,\dot{q},p,t) \quad = \quad p^{\mathrm{T}}\dot{q} - L(q,\dot{q},t) \tag{4.10}$$

これに付随する $\dot{q}$ から p への座標変換[3]は，$\bar{H}$ が $\dot{q}$ に関して極値になる p すなわち

$$\frac{\partial \bar{H}(q,\dot{q},p,t)}{\partial \dot{q}} = 0$$

を満たす p であるので，

$$p = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} =: \phi_p(q,\dot{q}) \tag{4.11}$$

である[4]．この p 用いて $\bar{H}$ を (q,p,t) で表すと，ハミルトン関数 H が得られる．

$$H(q,p,t) := \bar{H}(q,\phi_p^{-1}(q,p),p,t)$$

ここで $\phi_p^{-1}(q,p)$ は，$p = \phi_p(q,\dot{q})$ の $\dot{q}$ に関する逆写像[5]である．新しい座標上では系のダイナミクスは次のハミルトン系と呼ばれる方程式で記述される．

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \\ \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \end{pmatrix}$$

このことを簡単に示してみよう．ハミルトン関数の全微分は

$$\mathrm{d}H \quad = \quad \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

これは，p が (4.11) 式で与えられるとするときの (4.10) 式の $\bar{H}$ の全微分に等しいはず．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{H} \quad &= \quad \dot{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}p + \left.\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{q}}\right|_{p=\phi_p(q,\dot{q})}\mathrm{d}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \quad \dot{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}p - \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

この両式を比べて

$$\begin{aligned} \dot{q} \quad &= \quad \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \quad &= \quad -\frac{\partial L}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial t} \quad &= \quad -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

これと (4.3) 式より，ハミルトンの方程式が得られる．

[3]正確には座標変換は，全座標を考える必要があることに注意．
[4]$L(q,\cdot)$ が ($\dot{q}$ に関して) 凸関数のとき唯一定まる．
[5]Legendre 変換の対合性により，結局

$$\phi_p^{-1}(q,p) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}}$$

となる．

もちろんラグランジュ関数 $L(q,\dot{q},t)$ を (4.7) 式の入力を含んだ $L^u(q,\dot{q},u,t)$ に置きかえたとき，$H(q,p,t)$ を $H^u(q,p,u,t)$ で表せば，入力を含んだ形のハミルトン系が得られる．(4.6) 式のような位置エネルギーの場合には，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \\ \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

特に，(4.9) 式のラグランジュ関数を持つ力学系の場合には，位相座標 (一般化運動量) p は

$$p = M(q)\dot{q}$$

のようになり，ハミルトン関数は以下のようになる．

$$H(q,p) = K(q,\dot{q}) + P(q) = \frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}M(q)^{-1}p + P(q)$$

これは力学的な全エネルギーを表す．つまり，外力がなければ

$$\dot{H} = 0$$

である．(エネルギー保存則) 外力がある場合の，$\dot{H}$ を実際に計算してみよう．

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} u \right\} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} u \\ &= \dot{q}^{\mathrm{T}} u \end{aligned} \tag{4.13}$$

この式は左辺がエネルギーの時間変化，右辺が「(力)×(速度)」もしくは「(トルク)×(角速度)」で，外部からなされる仕事率を表している．すなわち，エネルギーの保存則である．これらの性質を損なわないようにモデルを一般化したのが，次に扱うポート・ハミルトン系である．

4.6 ポート・ハミルトン系

ポート・ハミルトン系とは，(4.12) 式を一般化した次式で与えられる系である．

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g(x)u \\ y &= g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \right.$$

ただし，

$$\begin{aligned} J(x)^{\mathrm{T}} &= -J(x) \\ R(x)^{\mathrm{T}} &= R(x) \geq 0 \end{aligned}$$

ここで $J(x)$ は**構造行列**と呼ばれ，ハミルトン系の保存系としての性質を表し，$R(x)$ は**散逸行列**と呼ばれ，摩擦等の頁を表す．この系に対しては，(4.13) と同様な性質が成り立つ．確認してみよう．

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}\\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\left\{(J-R)\frac{\partial H}{\partial x}+g\ u\right\}\\ &\leq \frac{\partial H}{\partial x}g\ u\\ &= y^{\mathrm{T}}u\end{aligned}$$

したがって，y を仮想的な速度と考えると，外部からの内部エネルギーの増加率が外部からの仕事率を越えないという関係式になる．詳しくは後述するが，制御理論ではこのような性質を**受動性**という．では，例を見てゆこう．

例 1 [力学系]

$$\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial q}^{\mathrm{T}}\\ \frac{\partial H}{\partial p}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ I\end{pmatrix}u$$

例 2 [電気回路]

- キャパシタ (コンデンサ)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= i\\ v &= \frac{\mathrm{d}H_c(q)}{\mathrm{d}q}\end{aligned}$$

  ただし，q: 電荷，i: 電流，v: 電圧, $H_c(q)$ キャパシタの電気的エネルギー．理想的には C をキャパシタンスとして，

$$H_c=\frac{1}{2C}q^2$$

  これは $u=i$ とするとハミルトン系になる．また q と v は互いにルジャンドル変換の関係にある．

$$\left\{\begin{aligned}\dot{q} &= 0\cdot\frac{\mathrm{d}H_c(q)}{\mathrm{d}q}+u\\ y &= \frac{\mathrm{d}H_c(q)}{\mathrm{d}q}=v\end{aligned}\right.$$

- インダクタ (コイル)

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= v\\ i &= \frac{\mathrm{d}H_i(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\end{aligned}$$

  ただし，φ: 磁束，v: 電圧，i: 電流, $H_i(\varphi)$ インダクタの電気的エネルギー．理想的には L をインダクタンスとして，

$$H_i=\frac{1}{2L}\varphi^2$$

これも $u = v$ とするとハミルトン系になる．また φ と i は互いにルジャンドル変換の関係にある．

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= 0 \cdot \frac{\mathrm{d}H_i(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + u \\ y &= \frac{\mathrm{d}H_i(\varphi)}{\mathrm{d}q} = i \end{cases}$$

- 抵抗

$$v = i\ r(i)$$

理想的には $r(i) = R$.

- LCR 回路

これらの結合系は，L, C, R の系を電流 i と電圧 v のポートにして，結合したもの．結合のルールはキルヒホッフの法則による．一般に結合系は，陰的ハミルトン系で表される．

$$E\dot{x} = F\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g\ u$$

  – 例 1

  LCR 直列系 (図): まず全体のハミルトン関数を

$$H(q, \varphi) := H_c(q) + H_i(\varphi)$$

  で定義しておく．キルヒホッフの法則より

$$\begin{aligned} &v_c + v_i + v_r = v_e \\ &i_c = i_i = i_r \end{aligned}$$

  書き下すと，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial q} + \dot{\varphi} + r(i)\ i = v_e \\ &\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

  これより，

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\mathrm{d}H_i(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \\ \dot{\varphi} &= v_e - \frac{\mathrm{d}H_c(q)}{\mathrm{d}q} - r(i)\ \frac{\mathrm{d}H_i(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \end{aligned}$$

  これらをまとめると，

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -r(\partial H/\partial \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_e$$

  これは機械系と対応している「悪い例」であるが，奇数次元の例も簡単に作れる．

– 例 2 (3 列並列で，L1-R, L2, C-Ve) (explicit) キルヒホッフの法則:

$$
\begin{aligned}
&v_c = v_{i1} = v_{i2} + v_r + v_e \\
&i_c + i_{i1} + i_{i2} = 0
\end{aligned}
$$

書き直して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 + r\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} + v_e \\
&\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0
\end{aligned}
$$

これをまとめてハミルトン系にする．

$$
\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} v_e
$$

$r = 0$ であれば，ハミルトン関数に入力も含めて表現できないことに注意．(「ポート」を強調する理由)

– 例 3 (3 列並列で，L1-R, C1, C2-Ve) (implicit) キルヒホッフの法則:

$$
\begin{aligned}
&v_{c1} = v_{c2} = v_i + v_r + v_e \\
&i_{c1} + i_{c2} + i_i = 0
\end{aligned}
$$

書き直して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \dot{\varphi} + r\frac{\partial H}{\partial \varphi} + v_e \\
&\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}
$$

これをまとめて陰的ハミルトン系にする．

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0? & 0? & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1? & 0? & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} v_e
$$

例 3 [電気機械系]

- モータ
LR 回路+モータのトルク τ, 電流 i_m, 逆起電力 v_m, 角速度 $\dot{q}$ の間には K_m を適当な定数として次の関係がある．

$$
\begin{aligned}
v_m &= K_m \dot{q} \\
\tau &= K_m i_m
\end{aligned}
$$

またキルヒホッフの法則を適用しよう．

$$\begin{aligned} &v_i + v_m + v_r = v_e \\ &i_i = i_m \end{aligned}$$

書き下すと，

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} + K_m \frac{\partial H}{\partial p} + r \frac{\partial H}{\partial \varphi} = v_e \\ &\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{1}{K_m}\tau \end{aligned}$$

これをまとめると，

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & K_m \\ 0 & -K_m & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_e$$

- 磁気浮上系モータとほぼ同じだが，電機子の部分の力学系と電気系の相互作用は，インダクタンスの変化を通じて行われる．通常，

$$L(q) = \frac{c_1}{c_2 - q}$$

で近似でき，

$$H = \frac{\varphi^2}{2L(q)} + \frac{p^2}{2m} + mgq$$

のハミルトン関数を持つハミルトン系となる．

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_e$$

例 4 [非ホロノミック系] 通常の力学系で，速度に比例する拘束

$$A(q)^{\mathrm{T}} \dot{q} = 0$$

を持つ系を考える．(拘束の数だけ入力は減らすものとする．) そのときの系のダイナミクスは，ラグランジュ乗数 (未定乗数) λ を用いて次のように表せる[6]．

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}^{\mathrm{T}} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}^{\mathrm{T}} + A(q)\ \lambda + B(q)\ u \\ 0 &= A(q)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H}{\partial p}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

[6]ラグランジュ乗数は，拘束に対して仕事をしない内力という要請から導かれる．

いま

$$A(q)^{\mathrm{T}}S(q)=0$$

を満たし，$(S(q),A(q))$ を正則にする行列 $S(q)$ を考え，

$$\tilde{p}=\begin{pmatrix}\tilde{p}^1\\ \tilde{p}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S(q)^{\mathrm{T}}\\ A(q)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}p$$

で座標変換する．すると次のような系が得られる．

$$\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{\tilde{p}}^1\\ \dot{\tilde{p}}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & S(q) & *\\ -S(q)^{\mathrm{T}} & (-p^{\mathrm{T}}[S_i,S_j](q))_{i,j} & *\\ * & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}^1}\\ \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ A(q)^{\mathrm{T}}A(q)\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\ B^1(q)\\ B^2(q)\end{pmatrix}u$$

ただし

$$A(q)^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial p}^{\mathrm{T}}=A(q)^{\mathrm{T}}(S(q),A(q))\frac{\partial H}{\partial \tilde{p}}^{\mathrm{T}}=A(q)^{\mathrm{T}}A(q)\frac{\partial H}{\partial \tilde{p}^2}^{\mathrm{T}}=0$$

すなわち，

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{p}^2}=0$$

運動エネルギーの正定性より $\tilde{p}^2=0$ もいえる．したがって，低次元化された (拘束なしの) ポート・ハミルトン系が得られる．

$$\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{\tilde{p}}^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & S(q)\\ -S(q)^{\mathrm{T}} & (-p^{\mathrm{T}}[S_i,S_j](q))_{i,j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}^1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ B^1(q)\end{pmatrix}u$$

ただし $[\cdot,\cdot]$ はリー括弧積と呼ばれ，次で定義される．

$$[S_i,S_j](q):=\frac{\partial S_j(q)}{\partial q}S_i(q)-\frac{\partial S_i(q)}{\partial q}S_j(q)$$

- コインの例

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \lambda_1\\ \ddot{y} &= \lambda_2\\ \ddot{\theta} &= -\lambda_1\cos\varphi-\lambda_2\sin\varphi+u_1\\ \ddot{\varphi} &= u_2\end{aligned}$$

拘束は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\theta}\cos\varphi\\ \dot{y} &= \dot{\theta}\sin\varphi\end{aligned}$$

ハミルトン関数は，

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2+p_\theta^2+p_\varphi^2\right)$$

拘束の別の表現

$$
\begin{aligned}
p_x &= p_\theta \cos\varphi \\
p_y &= p_\theta \sin\varphi
\end{aligned}
$$

新座標

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_\varphi \\
p_2 &= p_\theta + p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi \\
p_3 &= p_x - p_\theta \cos\varphi \\
p_4 &= p_y - p_\theta \sin\varphi
\end{aligned}
$$

すると，$p_3 = p_4 = 0$ となり，次のハミルトン系が得られる．

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-\cos\varphi & -\sin\varphi & -1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}
$$

なお，新しい座標系でのハミルトン関数は次のようである．

$$
H = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{4} p_2^2
$$

第5章　最適制御

前章では，非線形系の安定性の解析方法を述べた．ここでは

$$\dot{x} = f(x, u)$$

という制御対象を漸近安定化する問題を扱う．この系を安定化フィードバック

$$u = k(x)$$

と安定性を示すためのリアプノフ関数 $V(x)$ を同時に求める問題になる．すなわち，

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, k(x)) \prec 0 \tag{5.1}$$

となる．これは変数 k や V に関して非線形な偏微分方程式であり，一般に解くのは難しい．また制御対象が入力にアファインな形

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5.2}$$

の場合は，

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)\ k(x)) \prec 0$$

となり，パラメータ $V(x)$, $K(x)$ に関する双線形の形となる．この章の後半では，これを簡単にするいくつかの方法について述べる．

なお線形制御では，制御対象は

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

であり，補償器は

$$u = Kx$$

である．リアプノフ関数を

$$V(x) := \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} P\ x$$

とすると

$$\dot{V}(x) = x^{\mathrm{T}} P(A + BK)x \prec 0$$

すなわち，

$$P\ (A + BK) + (A + BK)^{\mathrm{T}} P \preceq -Q$$

となり，P, K, Q に関する双線形の不等式になる．さらに $\bar{P} := P^{-1}$, $\bar{K} := KP^{-1}$ とすると，

$$A\bar{P} + B\bar{K} + (A\bar{P} + B\bar{K})^{\mathrm{T}} + Q \preceq 0$$

となり，パラメータ $\bar{P}$, Q, $\bar{K}$ に関する線形行列不等式となり，比較的簡単に解くことができる．

5.1 最適制御

ここでは簡単のために入力にアファインな系を考えよう．

$$\dot{x} \quad = \quad f(x) + g(x)\ u$$

最適制御とは，この系に対して評価関数を設定し，それを最小化 (最大化) するような入力 $u(t)$ を求めることである．制御したい時間区間 $t \in [0, T]$ が有限の場合は

$$J_T := p(x(T)) + \int_0^T q(x(t), u(t))\mathrm{d}t$$

この問題を解くのはそれほど容易ではないが，時間区間が無限大 $t \in [0, \infty)$ の問題は比較的簡単な構造の解を持つことが知られている．次のような評価関数を考えよう．

$$J := \int_0^\infty \underbrace{\left(q(x(t)) + \frac{1}{2}u(t)^{\mathrm{T}}R(x(t))\ u(t)\right)}_{=:L(x,u)}\ \mathrm{d}t \tag{5.3}$$

この評価関数の実際の最小値を $V(x(0))$ で表す．すなわち

$$V(x^0) := \min_{\substack{u \\ x(0)=x^0}} J(x^0, u)$$

最適軌道が時刻 $t^1 < t^2$ において $x(t^1) = x^1$ および $x(t^2) = x^2$ を通過するとすると，最適性より

$$V(x(t^1)) - V(x(t^2)) = \min_u \int_{t^1}^{t^2} L(x(t), u(t))\mathrm{d}t$$

これを微分して

$$-\dot{V}(x) = L(x, u^\star)\ (\leq L(x, u))$$

ただし $u = u^\star$ は最適な入力．ここで

$$H(x, u) := \dot{V}(x, u) + L(x, u)$$

とおくと，

$$H(x, u) \geq H(x, u^\star) = 0$$

したがって $u^\star$ の必要条件は，

$$0 = \frac{\partial H(x, u)}{\partial u} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) + u^{\mathrm{T}}R(x)$$

よって

$$u^\star = -R(x)^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}$$

これを H に代入して Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を得る．

$$\begin{aligned} H(x, u^\star) \quad &= \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(f(x) - g(x)R(x)^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right) + q(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)R(x)^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ &= \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)R(x)^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + q(x) = 0 \end{aligned}$$

この方程式は $u = u^\star(x)$ をフィードバックゲインとして選んだリアプノフ方程式 (5.1) であることに注意しておく．またこの式は $V(x)$ に関する 2 次の 1 階偏微分方程式である．

実際，上式が成立するときは，

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(f(x) + g(x)u\right) \\ &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)u + \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)R(x)^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} - q(x) \\ &= -u^{\mathrm{T}}R(x)u^\star(x) + \frac{1}{2}\|u^\star(x)\|^2_{R(x)} - q(x) \\ &= \frac{1}{2}\|u - u^\star\|^2_{R(x)} - \underbrace{\frac{1}{2}\|u\|^2_{R(x)} - q(x)}_{L_(x,u)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} J(x^0, u) &= \int_0^\infty L(x(t), u(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\|u - u^\star\|^2_{R(x)} - \dot{V}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \|u - u^\star\|^2_{R(x)}\mathrm{d}t + V(x^0) \\ &\geq V(x^0) \end{aligned}$$

であり，等号が成立するのは $u = u^\star$ のとき．このように最適性が確認できる．

5.2 L_2 ゲイン最適制御

L_2 ゲインをある値 γ 以下にする最適制御問題を考える．L_2 ゲインは線形系では伝達関数の H_∞ ノルムと等価であり，この手法は線形システムに対しては H_∞ 制御として知られ，非線形系に対する本手法も「非線形 H_∞ 制御」とも呼ばれる．次のような制御系を考えよう．

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + g_d(x)d \\ z &= \begin{pmatrix} h(x) \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

この系の $d \mapsto z$ の L_2 ゲインを γ 以下にする入力 u を求める問題を取り扱う．

考え方は容易で，前節の評価関数として次のように供給率を負にしたものを考えればよい．

$$L(z, d) = \frac{1}{2}\left(\|z\|^2 - \gamma^2\|d\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|h(x)\|^2 - \gamma^2\|d\|^2\right)$$

これに対しても前節の (5.3) と同様の評価関数 $J(x^0, u, d)$ を導入する．

$$J(x(0), z, d) := \int_0^\infty L(z(t), d(t))\mathrm{d}t$$

さらにその最小値を表す値関数 $V(x^0) = J(x^0, u^\star, d^\star)$，およびハミルトン関数 $H(x,u)$ を導入する．

$$V(x^0) \quad := \quad \min_u \max_{\substack{d \\ x(0)=x^0}} J(x^0, u^\star, d^\star)$$

ただし $d^\star$ は，評価関数を最大にする外部入力 d を表し，$u^\star$ は $d = d^\star$ としたときに評価関数を最小にする最適制御入力 u を表す．この場合もやはりハミルトン関数 $H(x,u,d)$ を導入する．

$$H(x,u,d) := \dot{V}(x) + L(z,d)$$

このとき次が成立することに注意しておく

$$H(x,u,d^\star) \geq H(x,u^\star,d^\star) \geq H(x,u^\star,d)$$

よって H は $(u,d) = (u^\star, d^\star)$ で鞍点となる．このことから $u^\star$, $d^\star$ はそれぞれ次を解けば良いことがわかる．

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H(x,u,d)}{\partial u} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) + u^{\mathrm{T}} \\ 0 &= \frac{\partial H(x,u,d)}{\partial d} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g_d(x) - \gamma^2 d^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

これらを解いて次を得る．

$$\begin{aligned} u^\star &= -g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ d^\star &= \frac{1}{\gamma^2} g_d(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

さらにこの解を H に代入することで Hamilton-Jacobi-Issacs 方程式を得る．

$$\begin{aligned} H(x,u^\star,d^\star) &= \frac{\partial V}{\partial x}\left(f(x) - g(x)g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma^2} g_d(x) g_d(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\|g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\|^2 + \|h(x)\|^2 - \frac{1}{\gamma^2} \|g_d(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\|^2 \right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_d(x) g_d(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} h(x)^{\mathrm{T}} h(x) = 0 \end{aligned}$$

実際，この方程式が成立するときは次のように L_2 ゲインが γ 以下になることが確認できる．

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{u=u^\star} &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left(f(x) + g(x)u^\star(x) + g_d(x)d \right) \\ &= \gamma^2 d^{\mathrm{T}} d^\star(x) - \frac{1}{2}\left(\|u^\star(x)\|^2 + \|h(x)\|^2 + \gamma^2 \|d^\star(x)\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\|u^\star(x)\|^2 + \|h(x)\|^2 - \gamma^2\|d\|^2 \right) - \frac{\gamma^2}{2}\|d - d^\star\|^2 \\ &\leq \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\|u^\star(x)\|^2 + \|h(x)\|^2 - \gamma^2\|d\|^2 \right)}_{L(z,d)|_{u=u^\star}} \end{aligned}$$

問　入力にアファインな非線形系の入出力の L_2 ゲインが γ 以下であることを確認するための Hamilton-Jacobi 方程式を導け．

Hamilton-Jacobi 方程式の解法: テイラー展開，ガラーキン近似など．

5.3　制御リアプノフ関数と逆最適性

この章の前半で述べた最適制御を用いるには，Hamilton-Jacobi 方程式と呼ばれる偏微分方程式を解かねばならない．しかしこれらの解法は容易ではない．以下では「最適性」をあまり考慮しない設計法について述べる．

(5.2) 式の入力にアファインな非線形系が与えられたとする．この系に対して，何らかの方法でリアプノフ関数の候補 $V(x)$ が与えられたとする．この $V(x)$ がリアプノフ関数になるような制御則 $u(x)$ が存在する，すなわち次式を満たすとき，$V(x)$ を**制御リアプノフ関数**と呼ぶ．

$$\inf_u \frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x)+g(x)u) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

リアプノフ関数の候補が与えられた場合，勾配法の考え方から次のような補償器の構成が示唆される．ただし $\Gamma(x) \succ 0$．

$$u = -\Gamma(x)g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}$$

なぜなら，この入力を加えた場合の $V(x)$ の挙動は，

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(f(x) - g(x)\Gamma(x)g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) - \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\Gamma(x)g(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

となり，$\Gamma(x)$ を大きくすれば，$(\partial V(x)/\partial x)f(x)$ の部分を打ち消して $\dot{V}$ を負にできそうである．このような補償器を $\mathrm{L}_g V$ 補償器という[1]．最適制御の補償器もこの形になっている点に注意．このアイデアを精密化した制御則のひとつは，次で与えられる．

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{L}_f V(x) + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4}}{\|\mathrm{L}_g V(x)\|^2}\,\mathrm{L}_g V(x)^{\mathrm{T}} & (\|\mathrm{L}_g V(x)\| \neq 0) \\ 0 & (\|\mathrm{L}_g V(x)\| = 0) \end{cases}$$

ただし

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_f V(x) &:= \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) \\ \mathrm{L}_g V(x) &:= \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\end{aligned}$$

実際に $V(x)$ の時間微分を計算してみると，$\mathrm{L}_g V(x) = 0$ のときには，制御リアプノフ関数の定義より

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) < 0$$

であり，また $\mathrm{L}_g V(x) \neq 0$ のときには，

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(f(x) + g(x)u(x)\right)$$

[1]詳しくは後述するが，$\mathrm{L}_g V := (\partial V(x)/\partial x)g(x)$ であることに由来．

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{L}_f V(x) + \mathrm{L}_g V(x)\ u(x) \\
&= \mathrm{L}_f V(x) - \mathrm{L}_g V(x) \frac{\mathrm{L}_f V(x) + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4}}{\|\mathrm{L}_g V(x)\|^2}\ \mathrm{L}_g V(x)^{\mathrm{T}} \\
&= -\sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4} \\
&< 0
\end{aligned}
$$

このように，漸近安定化補償器となっていることが確認できる．

さらに，ある条件の元でこの制御則はある種の最適制御問題の解になっている．この性質を**逆最適性**という．すなわち Hamilton-Jacobi 方程式を解くことなく，「意味のある」補償器を設計できる．評価関数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \left(q(x(t)) + \frac{1}{2}\ r(x(t)) \|u(t)\|^2 \right)\ \mathrm{d}t \\
q(x) &:= \|\mathrm{L}_g V(x)\|^2 + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4} \\
r(x) &:= \frac{\|\mathrm{L}_g V(x)\|^2}{(\mathrm{L}_f V(x) + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^2 + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4})}
\end{aligned}
$$

この評価関数に関する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2r(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + q(x) \\
&= \mathrm{L}_f V(x) - \frac{(\mathrm{L}_f V(x) + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^2 + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4})}{\|\mathrm{L}_g V(x)\|^2} \mathrm{L}_g V(x) \mathrm{L}_g V(x)^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \left(\|\mathrm{L}_g V(x)\|^2 + \sqrt{\mathrm{L}_f V(x)^2 + \|\mathrm{L}_g V(x)\|^4} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ようになり，制御リアプノフ関数 $V(x)$ が解となることが分かる．

例　正定なハミルトン関数を持つハミルトン系の場合には，ハミルトン関数を制御リアプノフ関数と考えればよい．

第6章　受動性に基づく制御

6.1　受動性と安定化

ここではまずハミルトン系の制御を考えよう．制御対象は，

$$\begin{cases} \dot{x} &=& (J(x)-R(x))\dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g(x)u \\ y &=& g(x)^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{6.1}$$

である．4 章で見たように，この系は

$$\dot{H}(x) \le u^{\mathrm{T}} y$$

を満たす．これを時間積分して

$$\int_0^t u(\tau)^{\mathrm{T}} y(\tau)\ \mathrm{d}\tau \ge H(x(t)) - H(x(0)) \ge \inf_{x\in\mathbb{R}^n} H(x) - H(x(0))$$

となることから，$H(x)$ が下界を持つとき $H(x)$ を蓄積関数として受動的になることがわかる．

したがってその場合には，受動定理より任意の L_2 有限ゲイン安定で強受動的な系を補償器にすることで，L_2 有限ゲイン安定なフィードバック系を構成できる．(図) フィードバック系が L_2 安定となるので，

$$u(t) \to 0, \quad y(t) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty \tag{6.2}$$

が成立する．例えば，任意の正定な行列 $C(x) \ge \epsilon I > 0$ を用いて，

$$u = -C(x)y \tag{6.3}$$

が安定化補償器となる．

ただし，この補償器では (6.2) 式のように入出力信号が零に収束することはいえるが，内部状態も含めた漸近安定性についてはなにも保証されない．漸近安定性を達成するには，次の条件が必要となる．証明はラサールの不変性原理より明らか．

定理 14 $H(x)$ が正定で，かつ *(6.1)* 式の系が零状態可検出，すなわち

$$u(t) \equiv y(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \to 0 \ \ \text{as} \ \ t \to \infty$$

を満たすとき，*(6.3)* 式のフィードバックは系を漸近安定にする．

したがって，零状態可検出性はともかくとしてそもそもハミルトン関数 $H(x)$ が正定でなければ，受動定理を用いた漸近安定化は行えないことになる．

(例) 質点系とマスばねダンパ系 (1) ハミルトン関数の正定・半正定性と (2) 受動出力 y の意味．

上の例では，マスにダンパのみが付いた系は漸近安定ではないが，バネが加わった系は漸近安定になることを見た．したがってバネのない系であっても，仮想的にバネ力を加えてやれば安定化できることになる．バネ力は，質点の位置 (配位座標) に比例する力であり，

$$u = -kq$$

という力を加えれば，仮想的に原点が釣り合い点であるようなバネ係数 k のバネ力が実現できる．これに対応する力学的エネルギーは，

$$\frac{k}{2}q^2$$

であるので，仮想的なハミルトン関数を

$$\bar{H}(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$$

と定めれば，このフィードバック系は (仮想的に) ハミルトン系になる．このようにバネ力にあたるポテンシャル関数を人工的に加えて制御する方法を**人工ポテンシャル法**とよぶ．バネ力でない人工的なポテンシャルの例としては，... がある．

6.2　一般化正準変換と漸近安定化

前節では，フィードバックによって仮想的にハミルトン関数を正定関数に変換して制御する方法を紹介したが，ここではこの変換をもっと一般のハミルトン系に拡張した方法について述べる．まず (6.1) 式の系をフィードバックとハミルトン関数の変換

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= H(x) + H_{\mathrm{a}}(x) \\ u &= \alpha(x) + \beta(x)\ \bar{u} \\ \bar{y} &= \gamma(x) + \delta(x)\ y \end{aligned}$$

によって別のハミルトン系

$$\bar{\Sigma} : \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \left(\bar{J}(x) - \bar{R}(x)\right) \frac{\partial \bar{H}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \bar{g}(x)\ \bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{g}(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \bar{H}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \right.$$

に移すことを考える．このとき，次が成立するはずである．

$$\begin{aligned} &(J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g(x)\ (\alpha(x) + \beta(x)\ \bar{u}) = \left(\bar{J}(x) - \bar{R}(x)\right) \frac{\partial (H(x) + H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \bar{g}(x)\ \bar{u} \\ &\bar{g}(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial (H(x) + H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} = \gamma(x) + \delta(x) g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

第 1 式の $\bar{u}$ の項を比べることで，次を得る．

$$
\begin{aligned}
&g(x)\beta(x) = \bar{g}(x) \\
&g(x)\alpha(x) = (J(x) - R(x))\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + (J_{\mathrm{a}}(x) - R_{\mathrm{a}}(x))\frac{\partial (H(x) + H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\
&\delta(x) = \beta(x)^{\mathrm{T}} \\
&\gamma(x) = \beta(x)^{\mathrm{T}} g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\bar{J}(x) &= J(x) + J_{\mathrm{a}}(x) \\
\bar{R}(x) &= R(x) + R_{\mathrm{a}}(x)
\end{aligned}
$$

結局，解くべき式は

$$
(J(x) - R(x))\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + (J_{\mathrm{a}}(x) - R_{\mathrm{a}}(x))\frac{\partial (H(x) + H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g(x)\alpha(x) = 0
$$

ここで未知変数としては，$\alpha(x)$, H_{a} J_{a}, R_{a} があるが，これらに関しては非線形 (2 次) の方程式となっている．とくに

$$
J_{\mathrm{a}}(x) = R_{\mathrm{a}}(x) = 0
$$

のときには，

$$
(J(x) - R(x))\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g(x)\alpha(x) = 0
$$

のように変数 $\alpha(x)$, $H_{\mathrm{a}}(x)$ に関して線形な方程式となり，比較的容易に解くことができる．

変換をまとめると以下のようになる．このようなハミルトン系の構造を保つ変換を**一般化正準変換**という．

補題 3 変換の組

$$
\begin{aligned}
\bar{H}(x) &= H(x) + H_{\mathrm{a}}(x) \\
u &= \alpha(x) + \beta(x)\ \bar{u} \\
\bar{y} &= \gamma(x) + \delta(x)\ y
\end{aligned}
$$

が一般化正準変換となる必要十分条件は，次が成り立つことである．

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) &= \beta(x)^{\mathrm{T}} g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\
\delta(x) &= \beta(x)^{\mathrm{T}} \\
0 &= (J(x) - R(x))\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + (J_{\mathrm{a}}(x) - R_{\mathrm{a}}(x))\frac{\partial (H(x) + H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g(x)\alpha(x)
\end{aligned}
$$

ただし $J_a^{\mathrm{T}} = -J_a$, $R_a^{\mathrm{T}} = R_a$, $R + R_a \geq 0$.

(例) ロボットの PD 制御

4 章で扱ったように，ロボットマニピュレータの運動方程式は次のようなポート・ハミルトン系で表される．

$$\left\{\begin{array}{lcl}\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}}\\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ I\end{pmatrix}u\\ y & = & \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}}=\dot q\end{array}\right. \tag{6.4}$$

ただしハミルトン関数は次のようである．

$$H(q,p)=\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}M(q)^{-1}\ p+V(q)$$

ここで，$M(q)\in\mathbb{R}^m$ は慣性行列，$V(q)$ はポテンシャル関数である．

この系に対して，変換後のハミルトン関数が

$$\bar H(q,p)=\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}M(q)^{-1}\ p+\frac{1}{2}q^{\mathrm{T}}K\ q$$

となるように補題 3 の条件を解けば良い．最終的な安定化フィードバックは以下のように求まる．

$$u=\bar u+\frac{\partial V(q)}{\partial q}^{\mathrm{T}}-Kq-C\dot q$$

これは，制御系がもともと持っているポテンシャル関数 $V(q)$ をキャンセルして，かつ PD フィードバックを加えたものになっている．

(例) 磁気浮上系の例

$$\begin{array}{rcl}H(x) & = & \dfrac{\varphi^2}{2\ell(q)}+\dfrac{p^2}{2m}-mgq\\ \bar H(x) & = & \dfrac{(\varphi-\varphi^d(q,p))^2}{2\ell(q)}+\dfrac{p^2}{2m}+P^d(q)\end{array}$$

(例) コインの例 (条件チェック!)

6.2.1　Casimir 関数を用いる方法

6.3　動的な補償器の構成法

ハミルトン系に対する動的な補償器は，制御対象

$$\dot x=(J(x)-R(x))\,\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}+g(x)\ u$$

に対して，状態 x_c を持つ付加的なダイナミクス

$$\dot x_c=u_c$$

を付け加えることによって構成することができる．この付加的なダイナミクスは，$J_c = R_c = 0$, $H_c = 0$ のハミルトン系と見なせるので，拡大状態 $x_e := (x, x_c)$ を状態とするハミルトン系

$$\dot{x}_e = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(x) - R(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_c \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

さらにこの状態では，$\partial H(x)/\partial x_c = 0$ であるので，構造 (散逸) 行列の $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ 要素はすべて自由に選ぶことができる．そのように構造 (散逸) 行列を指定しておいて，漸近安定化問題を考えれば，状態 x_c を持つ動的な補償器を構成できる．

6.3.1 部分状態フィードバック制御 (出力フィードバック制御)

ここまでで扱った制御手法は本質的に，定理 1 の一般化された速度をフィードバックしてダンピングを付加する方法を利用している．しかし実際の機械システムでは速度は観測できず位置を表す配位座標 q の差分などから計算されることが多い．本節では状態 x の一部のみが観測可能である場合の動的な補償器を用いたダンピング付加の手法を紹介する．

ハミルトニアンシステムへの動的補償器の設計問題は 2 つのハミルトニアンシステムの結合として取り扱われる．具体的には (6.1) 式のシステムに対して，x のうち観測可能な状態を引数とするハミルトニアン $U(x, x_c)$ を持つ次の補償器を付加する．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_c & = & J_c(x, x_c) \frac{\partial U}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} + g_c(x, x_c) u_c \\ y_c & = & g_c^{\mathrm{T}}(x, x_c) \frac{\partial U}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{array} \right. \tag{6.6}$$

J_c, g_c も U と同様に観測可能な x を含んでも構わない．ただし制御対象に適当なフィードバック $u = -\beta(x, x_c)$ を加えると全体がまた (6.1) 式のハミルトニアンシステムの形式で表されるものとする．すなわち結合後のシステムは，ハミルトニアンを $\bar{H}(x, x_c) := H(x) + U(x, x_c)$ として

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \bar{J}(x, x_c) & 0 \\ 0 & J_c(x, x_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_c \end{pmatrix} u_c \\ y_c & = & g_c^{\mathrm{T}}(x, x_c) \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$$

となる．制御対象 (6.1) 式と補償器 (6.6) 式を入出力 (u, y) および (u_c, y_c) を用いてフィードバック結合するのではないことに注意してほしい．ここで $\beta(x, x_c)$ はやはり補題 3 の条件式を満たす関数として与えられる．最終的にこの結合システムのハミルトニアン $\bar{H}(x, x_c)$ が正定関数でかつ系全体が零状態可検出であれば定理 1 の手法で安定化できる．

(例) ロボットの制御先の例で，ロボットマニピュレータは，ハミルトニアン $H(q, p) = (1/2)\, p^{\mathrm{T}} M^{-1}(q) p + V(q)$ を持つ (6.4) 式のハミルトニアンシステムで表されることを述べた．いま (位置を表す) 配位座標 q は観測可能であるが，(運動量を表す) 位相座標 p は観測できないものとし，また簡単のため $V(q)$ が正定関数であるとする．このシステムに対して，観測可能な状態量 q を引数とする正定関数 $U = U(q - q_c)$ をハミルトニアンとする補償器

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_c & = & u_c \\ y_c & = & \frac{\partial U}{\partial q_c}^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$$

を考える．補題 3 の条件式を $J_a = 0$ として解いてフィードバック

$$u = -\beta(q, q_c) = -\frac{\partial U}{\partial q}^{\mathrm{T}}(q - q_c)$$

を施すと，全体のシステムは

$$\left\{\begin{array}{ccl} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{q}_c \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} u_c \\ y_c & = & \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_c}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial U}{\partial q_c}^{\mathrm{T}} \end{array}\right.$$

のようになる．このシステムのハミルトニアンは次式のような正定関数であり，

$$\bar{H}(q, p, q_c) = \frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} M^{-1}(q) p + V(q) + U(q - q_c)$$

さらに系が零状態可検出であることが確かめられる．よって定理 1 よりこの系をダンピング $u_c = -C_c y_c, C_c > 0$ で閉じれば系全体が漸近安定化できる．最終的な補償器は次のようになり，制御対象のパラメータを全く利用せずに構成できる．

$$\left\{\begin{array}{ccl} \dot{q}_c & = & -C_c \frac{\partial U}{\partial q_c}^{\mathrm{T}} \\ u & = & -\frac{\partial U}{\partial q}^{\mathrm{T}} \end{array}\right.$$

ここでは制御対象よりも次元の低い補償器を設計したが，制御対象とほぼ同じ構造の補償器を導入することで Euler-Lagrange 形式で良く用いられる状態観測器を導くこともできる．この設計例では q_c は q の推定値であるので，通常の p ではなく q を用いたダンピングを行なっていることに注意してほしい．

とくに，この補償器を

$$\begin{array}{rcl} U(q - q_c) & = & \frac{k}{2\epsilon} \|q - q_c\|^2 \\ C_c & = & \frac{1}{k} \end{array}$$

のようにスカラダイナミクスで構成した場合，$q \mapsto u_c$ の伝達関数は以下のようになる．

$$-k \; \frac{s}{\epsilon s + 1}$$

となり，$\epsilon \to 0$ で微分器になることから，疑似微分の一種になっていることがわかる．

6.3.2 積分補償

積分補償とは補償器に積分要素を持たせることで，モデル化誤差やバイアス外乱に対する定常偏差を零にするものである．いま，定常偏差を零にしたい信号が $l(x)(\partial H(x)/x)^{\mathrm{T}}$ で表されるものとする．この時，

$$\dot{x}_c = l(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}$$

となるような x_c を補償器の状態にできれば，$x_c(t) \to \mathrm{const.}$ のとき $l(x(t)) \to 0$ を達成できる (Barbalat の補題)．この目的のためには，(6.5) 式の制御対象を次のように構成すれば良い．

$$\dot{x}_e = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(x) - R(x) & -l(x) \\ l(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_c \end{pmatrix}$$

一般化正準変換を用いてこの制御対象を安定化できれば，$l(x)(\partial H(x)/\partial x)^{\mathrm{T}}$ を抑える補償器が構成できると考えられる．

(例) ロボットマニピュレータ:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial H}{\partial p}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} u \\ H(q,p) &= \frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} M(q)^{-1} p \end{aligned}$$

ここでまず正定なポテンシャル関数 $H_{\mathrm{a}}(q)$ を加えよう．話を簡単にするため，摩擦 D を打ち消すフィードバックを加えておく．

$$\begin{aligned} \bar{H}(q,p) &= H(q,p) + H_{\mathrm{a}}(q) \\ u &= \bar{u} - \frac{\partial H_{\mathrm{a}}(q)}{\partial q}^{\mathrm{T}} + D \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

すると，フィードバック系は次のようになる．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{H}(q,p) &= \frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} M(q)^{-1} p + H_{\mathrm{a}}(q) \end{aligned}$$

ここで，

$$l(x) = (l_q(q), 0)$$

とおいて，

$$\dot{x}_c = l(x) \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + u_c = l_q(q) \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} + u_c$$

なる状態を付け加えよう．例えば，

$$H_{\mathrm{a}}(q) = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K_q q, \quad l_q(q) = K_q^{-1}$$

ならば，

$$\dot{x}_c = q + K_q^{-1} \frac{\partial H(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} + u_c$$

となり，x_c は q に高次の項を付加した量の時間積分となる．この時の制御系は，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I & -l_q(q) \\ -I & 0 & 0 \\ l_q(q) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial p}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial \bar{H}(q,p)}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u_c \end{pmatrix} \\ \bar{H}(q,p) &= \frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} M(q)^{-1} p + H_{\mathrm{a}}(q) \end{aligned}$$

である．ここで，ハミルトン関数を新しい状態

$$\bar{x} = (q, p, x_c)$$

に関して正定にするために，補題3の偏微分方程式すなわち

$$J(q)\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} - \bar{g}\ \alpha(\bar{x}) = 0$$

を解く．第1行目より，

$$\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial p}^{\mathrm{T}} - l_q(q)\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial x_c}^{\mathrm{T}} = 0$$

でなくてはならないので，

$$\bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x}) = \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p)$$

とする．ただし第2引数に関して正定な関数とする．このポテンシャル関数を加える変換は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(\bar{x}) &= \bar{H}(q,p) + \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p) \\
\bar{u} &= \tilde{u} - \frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\
u_c &= \tilde{u}_c + l_q(q)\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p)}{\partial q}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

最終的に，

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\ \tilde{y} \\ -C_c\ \tilde{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\ \frac{\tilde{H}(\bar{x})}{\partial p} \\ -C_c\ \frac{\tilde{H}(\bar{x})}{\partial x_c} \end{pmatrix}$$

を加えると，最終的な補償器は次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{x}_c &=& l_q(q)\frac{\partial \bar{H}(x)}{\partial q}^{\mathrm{T}} + l_q(q)\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} - C_c\ \frac{\tilde{H}(\bar{x})}{\partial x_c} \\
u &=& -\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(q)}{\partial q}^{\mathrm{T}} - \frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{a}}(q, x_c + l_q(q)\ p)}{\partial q}^{\mathrm{T}} - C\ \frac{\tilde{H}(\bar{x})}{\partial p} + D\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}^{\mathrm{T}}
\end{array}\right.$$

ここで $C > 0, C_c \geq 0$ のとき漸近安定となることが示せる．このままではわかりにくいが，

$$\begin{aligned}
l_q(x) &= K_q^{-1} \\
H_{\mathrm{a}}(q) &= \frac{1}{2}q^{\mathrm{T}}K_q q \\
\bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x}) &= \frac{1}{2}k_{x_c}(p + K_q x_c)^{\mathrm{T}}C(q)^{-1}(p + K_q x_c) \\
C_c &= 0
\end{aligned}$$

とおくと，補償器は次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{x}_c &=& q + K_q^{-1}\frac{\partial (H(x) + \bar{H}_{\mathrm{a}}(\bar{x}))}{\partial q}^{\mathrm{T}} \\
u &=& -K_q\ q - \underbrace{(k_{x_c}M(q) + C(q) - D)}_{=:K_{\dot{q}}(q)}\ \dot{q} - k_{x_c}K_q\ x_c - \frac{\partial \bar{H}_a(\bar{x})}{\partial q}^{\mathrm{T}}
\end{array}\right.$$

ただし安定化のための条件は，

$$\begin{aligned} K_q &> 0 \\ K_{\dot q}(q) &\geq k_{x_c} M(q) - D \geq \epsilon I > 0 \\ k_{x_c} &> 0 \end{aligned}$$

となる．質点系の場合を考えると，安定性 (ラウスの方法等でチェック) の必要十分条件となる．また，補償器の $\partial(H+\bar{H}_a)/\partial q$ および $\partial \bar{H}_a/\partial q$ の部分は，状態に関する高次 (2 次以上) の項になることにも注意.

(例) 質点系:

$$\begin{aligned} l(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} &= q \quad (l(x) = (1/k_q, 0)) \\ \dot{x}_c &= q + u_c \end{aligned}$$

としてハミルトン関数を正定にするように一般化正準変換を解くと，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{a}}(x) &= \frac{k_q}{2}q^2 + \frac{k_c}{2}(p + k_q x_c)^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ u_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -k_q q + \bar{u} \\ \bar{u}_c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{p}{m} + k_c(p + k_q x_c) \\ k_c(p + k_q x_c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．(この段階ではフィードバックは全く加わっていないことに注意．) 受動定理により，次の補償器で安定化する．($c > 0$, $c_c \geq 0$)

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\ \bar{y} \\ -c_c\ \bar{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\ (\frac{p}{m} + k_c(p + k_q x_c)) \\ -c_c k_c (p + k_q x_c) \end{pmatrix}$$

したがって，最終的な補償器は次のようになる．

$$\begin{cases} \dot{x}_c = q - c_c k_c (p + k_q x_c) \\ u = -k_q q - c\ (\frac{p}{m} + k_c(p + k_q x_c)) \end{cases}$$

とくに $c_c = 0$, $k_c = k_{x_c}/c$ と選ぶと，

$$\begin{cases} \dot{x}_c = q \\ u = -k_q q - (c + k_{x_c} m)\dot{q} - k_{x_c} k_q x_c \end{cases}$$

のような (特殊なゲインパラメータの) PID 補償器になることがわかる．(ラウスの方法で安定性チェック!)

6.4　時変一般化正準変換と軌道追従制御

ここはやらない．

定理 15 変換の組

$$
\begin{aligned}
\bar{H}(\Phi(x,t),t) &= H(x,t) + H_{\mathrm{a}}(x,t) \\
u &= \alpha(x,t) + \beta(x,t)\ \bar{u} \\
\bar{y} &= \gamma(x,t) + \delta(x,t)\ y \\
\bar{x} &= \Phi(x,t)
\end{aligned}
$$

が一般化正準変換となる必要十分条件は，次が成り立つことである．

$$
\begin{aligned}
\gamma(x,t) &= \beta(x,t)^{\mathrm{T}} g(x,t)^{\mathrm{T}} \frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x,t)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\
\delta(x,t) &= \beta(x,t)^{\mathrm{T}} \\
0 &= \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial(x,t)} \begin{pmatrix} (J(x,t) - R(x,t))\,\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + (J_{\mathrm{a}}(x) - R_{\mathrm{a}}(x))\,\frac{\partial (H(x)+H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g(x)\alpha(x) \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし $J_a^{\mathrm{T}} = -J_a,\ R_a^{\mathrm{T}} = R_a,\ R + R_a \geq 0$. さらに変換後の系が $\bar{H}(\bar{x},t)$ を蓄積関数として受動的となる必要十分条件は，

$$
\frac{\partial (H(x,t) + H_{\mathrm{a}}(x,t))}{\partial(x,t)} \begin{pmatrix} (J(x,t) - R(x,t))\,\frac{\partial H_{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} - R_{\mathrm{a}}(x)\frac{\partial (H(x)+H_{\mathrm{a}}(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g(x)\alpha(x) \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0
$$

(例) ロボット
(例) 磁気浮上系
(例) コイン

第7章　フィードバック線形化

まずはじめにフィードバック線形化問題を考えよう．フィードバック安定化とは，一般の入力にアファインな非線形の制御対象

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x)+g(x)u \\ y & = & h(x) \end{array}\right. \tag{7.1}$$

に対してフィードバックと座標変換

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & \Phi(x) \\ u & = & \alpha(x)+\beta(x)\bar{u} \end{array}$$

を施して，新たな入力 $\bar{u}$ および状態 $\bar{x}$ が (可制御な) 線形系

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

となるようにする手法である．線形系に変換できれば，あとは線形の制御則

$$\bar{u} = K\bar{x}$$

を用いて安定化できる．フィードバック系を図示すれば，?? のようになる．

(例) ロボットマニピュレータの運動方程式は，次のようなかたちをしていた．

$$M(q)\ \ddot{q} + l(q,\dot{q}) = u$$

ここで状態 $x=(q,\dot{q})$ を観測できるものとして，これらの情報を使ってフィードバック

$$u = M(q)\ v + l(q,\dot{q})$$

を施せば，$M(q)$ が正則なとき

$$\ddot{q} = v$$

が成り立つ．状態 x に関する状態方程式を書くと，

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} v =: A\ x + B\ v$$

のようになり，この系は座標変換なしで線形化できることがわかる．これは可制御な線形系であるので，例えば

$$v = K\ x$$

のような線形の補償器を加えて，$A+BK$ が安定になるようにすれば良い．

7.1 入出力線形化

さて，一般の非線形系 (7.1) を線形化する問題を考えよう．簡単のため，1 入力系とする．ただし，この系の状態 x は観測できるとしておく．変換後系の (新しい) 入力から出力 y までの挙動が，ある線形系と一致するための条件をここでは考えよう．y が出力であるとすれば，その時間微分は状態 (もしくはその微分値) の関数となるはずである．

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial h(x)}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x}g(x)\ u \\ &=: \mathrm{L}_f h(x) + \mathrm{L}_g h(x)\ u\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{L}_f(\cdot)$ を**リー微分**という．ここで $\mathrm{L}_g h = 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \mathrm{L}_f\mathrm{L}_f h(x) + \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f h(x)\ u \\ &=: \mathrm{L}_f^2 h(x) + \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f h(x)\ u\end{aligned}$$

となる．この順をすすめるため，

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_g h(x) &= 0 \\ \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f h(x) &= 0 \\ &\cdots \\ \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f^{\rho-2} h(x) &= 0 \\ \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0\end{aligned} \tag{7.2}$$

を仮定すれば，

$$y^{(\rho)} = \mathrm{L}_f^{\rho} h(x) + \mathrm{L}_g\mathrm{L}_f^{\rho-1} h(x)\ u$$

と表され，フィードバック

$$u = \frac{-\mathrm{L}_f^{\rho} h(x) + v}{\mathrm{L}_g\mathrm{L}_f^{\rho-1} h(x)} =: \alpha(x) + \beta(x)\ v \tag{7.3}$$

によって

$$y^{(\rho)} = v$$

が達成され，$v \mapsto y$ の新しい入出力の挙動が積分器の ρ 個の直列結合，すなわち可制御な線形系となる．この時の ρ を**相対次数**といい，線形系の伝達関数の相対次数を一般化した概念になっている．

(例) 線形の伝達関数

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

を考える．入力を u, 出力を y とし，中間状態 ξ を次のように定義する．

$$\hat{\xi}(s) = \frac{1}{d(s)}\ \hat{u}(s)$$

ただし $\hat{\xi}(s)$ は，$\xi(t)$ のラプラス変換を表す．すると明らかに次が成立する．

$$\begin{array}{rcl}\hat{u}(s) & = & d(s)\cdot\hat{\xi}(s)\\ \hat{y}(s) & = & n(s)\cdot\hat{\xi}(s)\end{array}$$

これを逆ラプラス変換すると，

$$\begin{array}{rcl}u(t) & = & \xi^{(n)}+a_{n-1}\xi^{(n-1)}+\cdots+a_0\xi\\ y(t) & = & b_m\xi^{(m)}+b_{m-1}\xi^{(m-1)}+\cdots+b_0\xi\end{array}$$

この ξ を用いて，状態ベクトルを

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\left(\xi,\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(n-1)}\right)$$

と定義すると，状態方程式は次のように**可制御正準形**になる．

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u\\ y & = & (b_0,\cdots,b_m,0\cdots,0)\,x\end{array}\right.$$

この系に対しては，

$$\mathrm{L}_g\mathrm{L}_f^k y=cA^kbx=\left\{\begin{array}{ll}0 & (k\le n-m-2)\\ b_m & (k=n-m-1)\end{array}\right.$$

となり，$\rho=k+1$ はまさに” 相対次数” $n-m$ と一致していることがわかる．

入出力線形化によって，系の入出力の挙動は線形になるので，ここで，新たな状態の ρ 次の部分を

$$\bar{x}^1:=\begin{pmatrix}y\\ \dot{y}\\ \vdots\\ y^{(\rho)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h(x)\\ \mathrm{L}_fh(x)\\ \vdots\\ \mathrm{L}_f^{\rho}h(x)\end{pmatrix}$$

で定義し，残りの座標 $\bar{x}^2$ を，全体の座標変換が正則になるように適当に定義することで，

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{x}^1\\ \bar{x}^2\end{pmatrix}=\Phi(x)$$

のような新しい座標 $\bar{x}$ を得る．この座標で系を表すと，次のようになる．

$$\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}^1\\ \dot{\bar{x}}^2\end{pmatrix} & = & \dot{\bar{x}}=\left.\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\left(f(x)+g(x)(\alpha(x)+\beta(x)v)\right)\right|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}\\ & =: & \begin{pmatrix}A\;\bar{x}^1+b\;v\\ \bar{f}(\bar{x}^1,\bar{x}^2)+\bar{g}(\bar{x}^1,\bar{x}^2)\;v\end{pmatrix}\end{array}$$

この表現を**標準形** (normal form) という．ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

ここで，積分器を安定化するようなフィードバック

$$v = k\,\bar{x}^1 \tag{7.5}$$

を施せば，入出力および状態の一部分である $\bar{x}^1$ を安定化できる．このとき入出力から見えなくなる状態の残りの部分，すなわち入出力がずっと零になる系の挙動，を**零ダイナミクス**といい，次式で表される．

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= 0 \\ \dot{\bar{x}}^2 &= \bar{f}(0, \bar{x}^2) \end{aligned}$$

基本的にこの系が指数安定 (or ISS) であれば，(7.3) 式のフィードバックで系全体を安定化できることになる．(図を示す!)

(例) 零ダイナミクスは，線形系では零点の挙動に対応する．

7.2　フィードバック線形化

前節で扱った入出力線形化を用いた制御法では，零ダイナミクスという厳密には制御できない部分が残り，高精度な制御の妨げになるばかりか，安定性すらもこちらが指定してやることができないなどの不便があった．

前節で扱った方法では，状態全てを観測できるという仮定の元で制御を行うため，出力 y は一般に設計者が選択できる量である．したがって，出力 y をうまく選んで，ρ をできるだけ大きく，可能であれば系の次数 n に一致させられれば，零ダイナミクスの問題がなくなり制御がさらに簡単に行えることになる．このような $\rho = n$ の場合の線形化を**厳密な線形化**あるいは単に**フィードバック線形化**と呼ぶ．また厳密に線形化できるときの出力 y を**線形化出力**と呼ぶ．したがって，ここでの制御対象は，次のような出力関数を指定しない非線形系である．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{7.6}$$

$\rho = n$ であれば，前節で導いた制御則 (7.3) および (7.5) をそのまま使えば，零ダイナミクスのことを気にせずにそのまま安定化できる．したがって，ここでは $\rho = n$ となるための出力 $y = h(x)$ の満たすべき条件について考察する．解くべき条件は，(7.2) である．この式は，$h(x)$ に関して線

形であるが，高階の偏微分方程式となっている．これを 1 階の偏微分方程式に変換する．そのためにリー括弧積を導入しよう．

$$\begin{aligned}[f,g] &= \frac{\partial g(x)}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}g(x) \\ \mathrm{ad}_f^k g(x) &= [f, \mathrm{ad}_f^{k-1} g(x)] \\ \mathrm{ad}_f^0 g(x) &= g(x)\end{aligned}$$

このリー括弧積の性質

$$\mathrm{L}_f \mathrm{L}_g h(x) - \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f h(x) = \mathrm{L}_{[f,g]} h(x)$$

を用いて，(7.2) 式の条件を書き換えてみよう．

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^0 h(x) &= \mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^0 g} h(x) \\ \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^1 h(x) &= \mathrm{L}_f \mathrm{L}_g h(x) - \mathrm{L}_{[f,g]} h(x) \\ &= \mathrm{L}_f \mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^0 g} h(x) - \mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^1 g} h(x)\end{aligned}$$

となり，一般に

$$\mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^k h(x) = \mathrm{L}_f \mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^{k-1} g} h(x) - \mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^k g} h(x)$$

の関係がある．すなわち，(7.2) 式の条件は以下のように書き換えられる．

$$\mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^k g} h(x) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2 \tag{7.7}$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{ad}_f^{n-1} g} h(x) \neq 0 \tag{7.8}$$

この式は $h(x)$ に関する 1 階かつ 1 次の偏微分方程式であり，比較的容易に解くことができる．またフロベニウスの定理を用いると，この方程式の可解条件が次のように求まる．

定理 16 *(7.6) 式の非線形系が局所的に，(厳密に) フィードバック線形化可能である必要十分条件は次の 2 つの条件を満たすことである．*

(i) rank $\Omega_{n-1} = n$.

(ii) Ω_{n-2} が対合的 *(involutive)* でランクが一定.

ここで Ω_k は以下のように定義される．

$$\Omega_k := \mathrm{span}\{\ \mathrm{ad}_f^l g_j(x) \mid 0 \leq l \leq k,\ 1 \leq j \leq m\ \}$$

ただし，分布 $\Omega := \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ が対合的であるとは，以下が成り立つときをいう．

$$[f_i, f_j] \in \Omega$$

また定理の条件 (ii) は，$n = 1, 2$ のときは常に成り立つことに注意しておく．

定理の条件が成り立つとき，線形の偏微分方程式 (7.7) および (7.8) を解くことで線形化出力が求まる．これを用いて，フィードバック

$$u = \frac{-\mathrm{L}_f^n h(x) + \bar{u}}{\mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^{n-1} h(x)} =: \alpha(x) + \beta(x)\ \bar{u} \tag{7.9}$$

および座標変換

$$\bar{x} = \Phi(x) := \begin{pmatrix} h(x) \\ \mathrm{L}_f h(x) \\ \vdots \\ \mathrm{L}_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

を用いると，制御系は見かけ上，(可制御な) 線形系

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + b\bar{u} \tag{7.11}$$

に変換される．ただし A, b は，(7.4) で定義したものである．この制御系に対して，線形の補償器

$$\bar{u} = k\bar{x}$$

を設計し，

$$A + bk$$

が安定になるようにしてやれば，系を漸近安定化できる．

ただし，(7.11) 式の線形系は元の非線形系がどんな形であっても同じ積分器の n 個の直列結合になるため，このままでは元の制御系の特徴を活かした制御則は設計しにくい．そこで通常は，変換後の線形系が元の非線形系の**ヤコビ行列を用いた線形近似系**に一致するようにフィードバックを変形してやることが多い．具体的には，フィードバック (7.9) および座標変換 (7.10) の (ヤコビ行列による) 線形近似を考える．

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \left.\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}\right|_{x=0} \\ \beta_0 &:= \beta(0) \\ \Phi_0 &:= \left.\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right|_{x=0} \end{aligned}$$

これらを用いて，フィードバックと座標変換を以下のように定義し直してやる．

$$\begin{aligned} u &= \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x)\tilde{u} \\ &:= \big(\alpha(x) - \beta(x)\beta_0^{-1}\alpha_0\Phi_0^{-1}\Phi(x)\big) + \beta(x)\beta_0^{-1}\tilde{u} \\ \tilde{x} &= \tilde{\Phi}(x) \\ &:= \Phi_0^{-1}\Phi(x) \end{aligned}$$

これらを用いると，変換後の線形系は，元の非線形系のヤコビ行列を用いた線形近似系に一致する．

(例) トレーラー (別紙参照)