最終講義「モデル理論から見た普通の数学」の概要

多元数理科学研究科　塩田昌弘

数学基礎論は数学の中で特殊な分野で他の普通の数学とあまり交流がない。その中でモデル理論は比較的普通の数学に近い。例えば選択公理は仮定している。私の専門は普通の数学であるが、２０年ほど前からモデル理論に興味を持ち、最近その立場で普通の数学を見ることを提唱している。簡単にいえば、できるだけ仮定（公理）を少なくして、論理だけで理論を組み立てることである。ここで許される組み立て方は指定しておき、有限回の組み立てしか認めない。だから関数やベクトル場の積分をとるということはできない。よって、例えば微分幾何や関数論は扱いにくく、代数は扱いやすい。しかし関数論はある程度扱えると知られてきた。また代数幾何や整数論でいくつかの未解決問題がこの方法で解かれている。モデル理論の考え方の一つの長所は、例えば代数幾何で代数的閉体を固定しないことである。私も特異点理論のある未解決問題を実数体を Puiseux 級数体で置き換えることによって解いたことがある。０と１を決めれば直線は実数全体だと普通思っている。しかし私には Puiseux 級数全体に見える。

他の分野を考えてみよう。有限単体的複体と単体的写像のカテゴリーは、それを知っている人はすぐ気がつくことだが、上のモデル理論の方法で扱うことができる。だから体は実数体でなくても任意の順序体で良い。位相幾何の中の PL トポロジーはこのカテゴリーを扱うのに近い。しかし差があり、例えば、単体近似定理は一般の順序体では成り立たない。言えることは

定理 1. PL トポロジーの言葉のみで述べられた問題はある順序数で正しければ、どんな順序数でも正しい。又たとえ最初の証明がどのような方法によるものであれ、上のモデル理論の方法で証明できる。

次に微分位相幾何を考える。それは上の定理ほど単純ではない。そこで条件をつける。R を順序体とし、R^n の部分集合の集まり S_n がつぎの条件を満たすとする。

1　$X, Y \in S_n \Rightarrow X \cap Y, X \cup Y, R^n - X \in S_n$。
2　R^n の代数的集合は S_n の元である。
3　$p : R^n \to R^{n-1}$ を $p(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1})$ で定義する。すると $X \in S_n \Rightarrow p(X) \in S_{n-1}$。
4　$X \in S_1 \Rightarrow X$ は R の有限個の区間と点の和集合。

以下考える R^n の部分集合はいつも S_n の元で、S_m の元から S_n の元への写像はいつもそのグラフが S_{m+n} の元であるとする。R には実数と同じように開区間を使って位相を入れる。すると C^r 多様体と C^r 多様体間の写像の微分が定義できる (r は自然数)。条件１と２は自然である。４だけだと強い条件ではないが、３と合わせると強い条件になる。これに因って野性的な (wild) 現象がなくなる。そして次のことがいえる。

定理 2. X と Y を R^n の中の有界な閉多面体とし、同相とする。すると X と Y は PL 同相である。

この定理は C^0 多様体と PL 多様体の差がないことを言っている。元に戻って微分位相幾何についてであるが、次のことがいえる。

定理 3. 一部を除いて、微分位相幾何の定理と理論は R 上で成り立つ。又、証明はモデル理論の方法で行える。一部とは写像の集合について述べられている定理と理論のことである。例えば、力学系。

例えば、微分 4 次元 Poincare 予想は $\mathbf{R}$ で証明することと R で証明することは同じことである。R で証明する方がいいかもしれない。

我々は実多様体を考えるとき実数というのが重要な点だと思いがちであるが、実はそれほど重要ではない。それが私の言いたいことである。