

オートマトン・形式言語特論

項と木

- ランク付関数記号の集合 \mathcal{F} :
関数記号の引数の数 arity : $\mathcal{F} \rightarrow N$
 $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$
- 変数の集合 \mathcal{X} 特に $\mathcal{X}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$
- 項の集合 $\mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$: 以下を満たす最小の集合
 $x \in \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \dots x \in \mathcal{X}$
 $a \in \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \dots a \in \mathcal{F}$ かつ $\text{arity}(a) = 0$
 $f(t_1, \dots, t_n) \dots f \in \mathcal{F}, \text{arity}(f) = n,$
各 $t_i \in \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
項の例: $f(g(a), a)$
- 基礎項の集合 $\mathsf{T}(\mathcal{F})$: $\mathsf{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$

- ラベル付木:

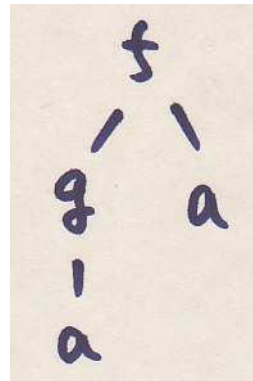
部分関数 $t : N^* \rightarrow \mathcal{F} \cup \mathcal{X}$

t の定義域を $\text{Pos}(t)$ で表す

- $f(g(a), a)$ を表す木 t

$$\text{Pos}(t) = \{\varepsilon, 1, 11, 2\}$$

p	ε	1	11	2
$t(p)$	f	g	a	a



- 木 t の高さ: $|t| = \max\{|p| \mid p \in \text{Pos}(t)\}$

- **代入**: 関数 $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
 - 代入 σ の **定義域**: $\text{Dom}(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$
 - 記法: $\text{Dom}(\sigma) = \{x_1, \dots, x_n\}$ 、 $\sigma(x_i) = t_i$ のとき、 σ を $\{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ と書く
 - 通常項上に拡張したものを考える

$$\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) \quad (n \geq 0)$$
- **文脈**: 線形項 $C \in \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ (変数に重複がない)
 - 文脈が n 個の変数を持つとき、以下では、変数は左から順に x_1, \dots, x_n であるものとする。

$$C = f(g(x_1), x_2) \text{ のとき、 } C[a, g(b)] = f(g(a), g(b))$$
 - n 変数の文脈 C について、 $C[t_1, \dots, t_n]$ は、 $C\{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ を表す。

有限木オートマトン

- (ボトムアップ) 非決定性有限木オートマトン (NFTA)

$$A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$$

- Q : 状態の有限集合
- \mathcal{F} : 関数記号の集合
- $Q^f (\subseteq Q)$: 最終状態の集合
- Δ : 遷移規則の集合

遷移規則は以下の形式

$$f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$$

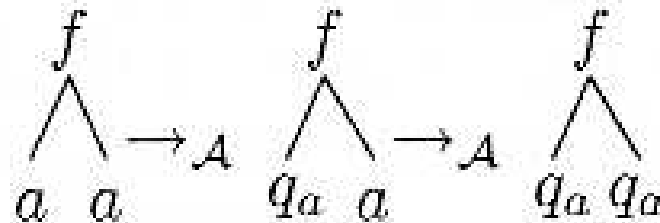
ここで、 $f \in \mathcal{F}$, $\text{arity}(f) = n$, $q, q_i \in Q$

- 例 : $A = (\{q_a, q_g, q_f\}, \{a, g(), f(,)\}, \Delta, \{q_f\})$

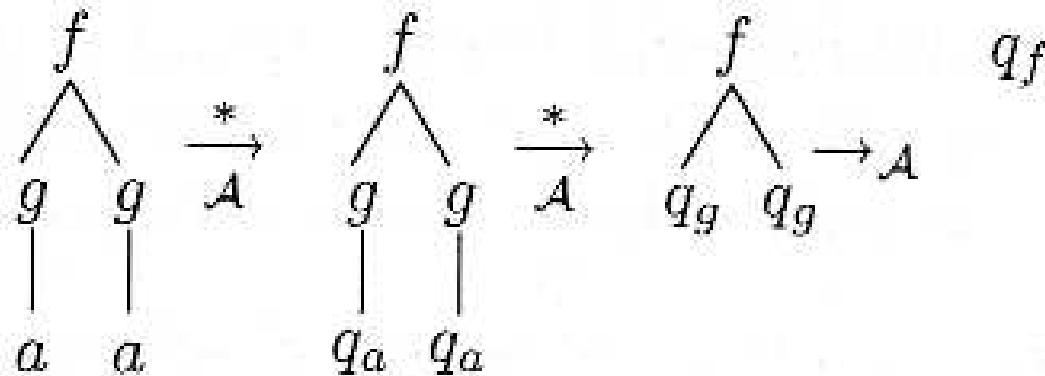
ここで Δ は以下の要素からなる

$$a \rightarrow q_a, g(q_a) \rightarrow q_g, g(q_g) \rightarrow q_g, f(q_g, q_g) \rightarrow q_f$$

- $f(a, a)$ に対する動作



- $f(g(a), g(a))$ に対する動作



- 遷移関係 \rightarrow_A : 以下を満たす最小の集合
 - $\Delta \subseteq \rightarrow_A$
 - $s \rightarrow_A t$ ならば、 $f(\dots s \dots) \rightarrow_A f(\dots t \dots)$
- \rightarrow_A^* : \rightarrow_A の反射、推移閉包
- A が t を受理 :

$$t \rightarrow_A^* q \in F$$
- A が認識する言語 :

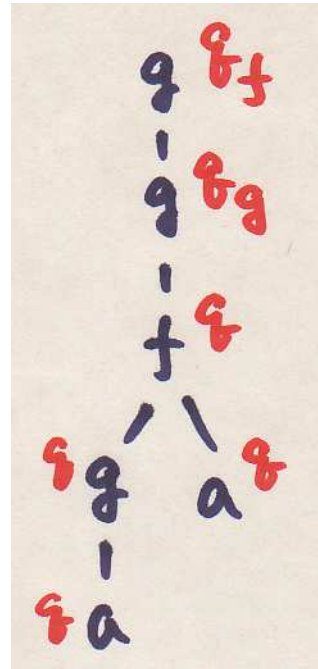
$$L(A) = \{t \mid t \rightarrow_A^* q \in F\}$$
- 正規木言語 : **NFTA** で認識できる言語

- 例 : $A = (\{q, q_g, q_f\}, \{a, g(), f(,)\}, \Delta, \{q_f\})$
 $a \rightarrow q, g(q) \rightarrow q, g(q) \rightarrow q_g,$
 $g(q_g) \rightarrow q_f, f(q, q) \rightarrow q$
 - $g(g(f(g(a), a)))$ に対する動作
 $g(g(f(g(a), a))) \rightarrow_A^* g(g(f(q_g, q)))$
 $g(g(f(g(a), a))) \rightarrow_A^* g(g(q)) \rightarrow_A^* q$
 $g(g(f(g(a), a))) \rightarrow_A^* g(g(q)) \rightarrow_A^* q_f$
 - $L(A) = \{g(g(t)) \mid t \in \mathsf{T}(\mathcal{F})\}$

- 例(続き) :

- 動作の別表現

$$\Delta : a \rightarrow q, g(q) \rightarrow q, g(q) \rightarrow q_g, \\ g(q_g) \rightarrow q_f, f(q, q) \rightarrow q$$



- 問1: $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$ について、 $L_1 = \{f(f(a, s), g(t)) \mid s, t \in \top(\mathcal{F})\}$ を認識する **NFTA** を示せ
- 問2: $\mathcal{F} = \{f(,), a, b\}$ について、以下で定義される言語 L_2 を認識する **NFTA** を示せ
 - $f(a, b) \in L_2$
 - $t \in L_2$ ならば $f(a, f(t, b)) \in L_2$

- ε 付-非決定性有限木オートマトン (ε -NFTA):

以下の形式の ε 規則も許される NFTA

$$q \rightarrow q'$$

- 決定性有限木オートマトン (DFTA):

左辺が同じ規則を持たない NFTA

(ε 規則もない)

- 完全な NFTA:

任意の変数を持たない項 t について、 $\exists q. t \rightarrow_A^* q$

- 完全な **DFTA** の例 :

$A = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1, \text{not}(), \text{and}(), \text{or}(), \Delta, \{q_1\}\})$

$0 \rightarrow q_0, 1 \rightarrow q_1, \text{not}(q_0) \rightarrow q_1, \text{not}(q_1) \rightarrow q_0,$

$\text{and}(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \text{and}(q_0, q_1) \rightarrow q_0,$

$\text{and}(q_1, q_0) \rightarrow q_0, \text{and}(q_1, q_1) \rightarrow q_1,$

$\text{or}(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \text{or}(q_0, q_1) \rightarrow q_1,$

$\text{or}(q_1, q_0) \rightarrow q_1, \text{or}(q_1, q_1) \rightarrow q_1$

- $\text{and}(\text{not}(\text{or}(0, 1)), \text{or}(1, \text{not}(0)))$ に対する動作

