

# 制約付き NFTA

- **制約付き NFTA**: 遷移規則に適用の際の制約が付けられた NFTA
- **等値制約**:  $\pi = \pi'$ ,  $\pi \neq \pi'$  ここで  $\pi, \pi' \in N^*$ 
  - ラベル付き木  $t$  に対して、
$$t \models \pi = \pi' \stackrel{\text{def}}{\iff} \pi, \pi' \in \text{Pos}(t) \wedge t|_{\pi} = t|_{\pi'}$$
- **AWEDC** (Automata with equality and disequality constraints):
  - 次の形式の遷移規則を持つ NFTA
$$f(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{c} q$$
ここで、 $c$ は、等値制約、 $\wedge$ 、 $\vee$ で構成される式

- **AWEDC**  $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$  の遷移関係  $\rightarrow_A$  :  
 $f(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{c} q \in \Delta, C[t] \rightarrow_A^* C[f(q_1, \dots, q_n)],$   
 $t \models c$  のとき,  
 $C[t] \rightarrow_A^* C[q]$
- 例 :
  - $A = (\{q\}, \{f(, ), a\}, \{q\}, \Delta)$   
 $\Delta = \{a \rightarrow q, f(q, q) \xrightarrow{1 \equiv 2} q\}$
  - $f(f(a, a), f(a, a))$  は受理されるが、 $f(a, f(a, a))$  は受理されない

● 例：自然数の和を検証する木を受理する **AWEDC**

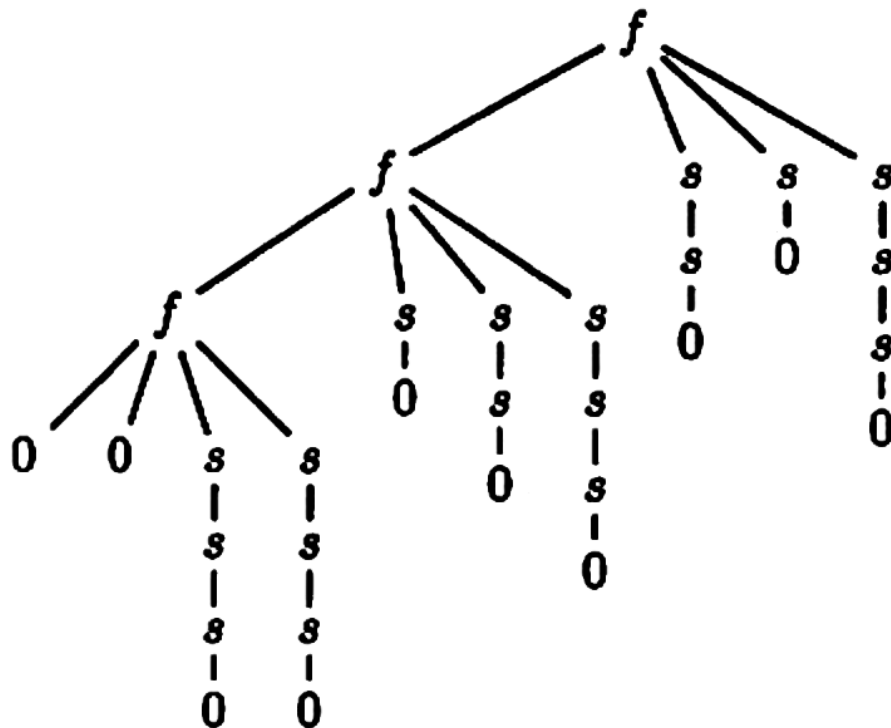
-  $A = (\{q_0, q_n, q_f\}, \{0, s(), f(, )\}, \{q_f\}, \Delta)$

$$0 \rightarrow q_0, s(q_0) \rightarrow q_n, s(q_n) \rightarrow q_n,$$

$$f(q_0, q_0, q_0, q_0) \rightarrow q_f$$

$$f(q_0, q_0, q_n, q_n) \xrightarrow{3=4} q_f \quad f(q_0, q_n, q_0, q_n) \xrightarrow{2=4} q_f$$

$$f(q_f, q_n, q_n, q_n) \xrightarrow{14=4 \wedge 21=12 \wedge 131=3} q_f$$



# AWEDCの性質

- 完全化：

- 例： $a \rightarrow q, f(q, q) \xrightarrow{1 \equiv 2} q$ に対しては、

$$f(q, q) \xrightarrow{1 \neq 2} q_{\perp}$$

$$f(q_{\perp}, q) \rightarrow q_{\perp} \quad f(q, q_{\perp}) \rightarrow q_{\perp} \quad f(q_{\perp}, q_{\perp}) \rightarrow q_{\perp}$$

を追加すればよい

- 決定化：完全性を保ったまま可能

- アイデア

$$a \xrightarrow{c_1} q_1 \quad a \xrightarrow{c_2} q_2$$

に対して、以下の規則を生成

$$a \xrightarrow{c_1 \wedge c_2} \{q_1, q_2\} \quad a \xrightarrow{c_1 \wedge \neg c_2} \{q_1\}$$

$$a \xrightarrow{\neg c_1 \wedge c_2} \{q_2\} \quad a \xrightarrow{\neg c_1 \wedge \neg c_2} \{\}$$

- 決定可能な問題

- 所属問題:  $w \in L(A)$  であるか？

- 決定不能な問題

- 空問題:  $L(A) = \emptyset$  であるか？

決定不能として知られている **Post** の対応問題を帰着して証明する

- **Postの対応問題 (PCP, Post Correspondence Problem)**

- 入力 :  $P \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$
- $P$  の解 :  $w_1 \cdots w_k = w'_1 \cdots w'_k$   
 ここで、 $k > 0$ ,  $(w_i, w'_i) \in P$
- **PCP**: 入力の  $P$  に解が存在するか?

- 例 :  $P = \left\{ \begin{pmatrix} abb \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix} \right\}$

$P$  の解は  $abbbb$ bb ここで、  $\begin{pmatrix} abb \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix}$

- 空問題の決定不能性の証明

- $w(t)$  :  $w = a_1 \cdots a_n$  のとき、 $a_1(\cdots a_n(t) \cdots)$  を表す
- $\mathcal{F} = \{a(), b(), 0, h(, , )\}$  とする
- 各  $(w, w') \in P$  に対して、

$$w(q_0) \rightarrow^* q_w, w'(q_0) \rightarrow^* q_{w'}$$

となるような **NFTA** をつくる。ただし、 $q_0$  に関する規則は以下のみ許される

$$a(q_0) \rightarrow q_a, b(q_0) \rightarrow q_b$$

例については以下の規則：

$$a(q_0) \rightarrow q_a, b(q_0) \rightarrow q_b,$$

$$a(q_b) \rightarrow q_{ab}, b(q_b) \rightarrow q_{bb}, a(q_{bb}) \rightarrow q_{abb}$$

- 空問題の決定不能性の証明 (続き)

- 状態  $q, q_f$  を加え、以下のように規則をつくる

$$0 \rightarrow q_0, h(q_0, q_0, q_0) \rightarrow q$$

それぞれの  $(w, w') \in P$  に対して

$$a(q_w) \rightarrow q_a, b(q_w) \rightarrow q_b, a(q_{w'}) \rightarrow q_a, b(q_{w'}) \rightarrow q_b,$$

$$h(q_w, q, q_{w'}) \xrightarrow{11^{|w|=21} \wedge 31^{|w'|=23}} q$$

$$h(q_w, q, q_{w'}) \xrightarrow{11^{|w|=21} \wedge 31^{|w'|=23} \wedge 1=3} q_f$$

$(b, bb) \in P$  については以下の規則：

$$a(q_b) \rightarrow q_a, b(q_b) \rightarrow q_b, a(q_{bb}) \rightarrow q_a, b(q_{bb}) \rightarrow q_b,$$

$$h(q_b, q, q_{bb}) \xrightarrow{11=21 \wedge 311=23} q$$

$$h(q_b, q, q_{bb}) \xrightarrow{11=21 \wedge 311=23 \wedge 1=3} q_f$$



- 空問題の決定不能性の証明 (続き)

