

AWCBB

- **AWCBB** (Automata with constraints Between Brothers):
 - **AWEDC**のうち、どの等値制約も $i = j, i \neq j$ ($i, j \in N$) の形式のもの
- 例 :
 - $A = (\{q\}, \mathcal{F}, \{q\}, \Delta)$
 $\mathcal{F} = \{f(,), a\}$
 $\Delta = \{a \rightarrow q, f(q, q) \stackrel{1=2}{\rightarrow} q\}$
 - $L(A) = \{f(t, t) \mid t \in \mathsf{T}(\mathcal{F})\}$
- **AWCBB** は、和、積、補演算に閉じている

- **AWCBB** では空問題が決定可能
- 証明のポイント：
 - 決定的な **AWCBB** について考える。 $q_1 \neq q_2$ のとき次の規則は使用不可能

$$f(q_1, q_2) \xrightarrow{1=2} q$$
 - ある状態へ複数個の項から到達できるかを判別する必要がある

$$a \rightarrow q, b \rightarrow q, f(q, q) \xrightarrow{1 \neq 2} q'$$
- M_a : \mathcal{F} の記号の引数の数の最大
- $L(q) \stackrel{\text{def}}{\iff} \{t \mid t \rightarrow_A^* q\}$

- 補題：決定的な **AWCBB** の規則 $f(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{c} q$ について、

$$|L(q_1)| \geq 1, \dots, |L(q_n)| \geq 1,$$

$$\exists q_i. |L(q_i)| \geq M_a, \text{ かつ}$$

$$\exists t_1 \in L(q_1), \dots, t_n \in L(q_n). f(t_1, \dots, t_n) \models c$$

ならば、 $|L(q)| \geq M_a$

- 略証： c は **NNF**。 $t = f(t_1, \dots, t_n)$ とする
 - t が満たす c の制約 $i = j$ について、 $q_i = q_j$ であるから、 t_i を $|L(q_i)|$ 中の他の項に置き換えても満たされる
 - t が満たす c の制約 $i \neq j$ について、
 $q_i \neq q_j$ 、 $q_i = q_j$ のいずれの場合も、 t_i を $|L(q_i)|$ 中の他の項に置き換えても満たされる

- 定理： **AWCBB** の空問題は決定可能
- 略証： 決定的な **AWCBB** を用意する。規則の集合を Δ とする
 - 各状態 p に対して、変数 L_p を空集合に初期化し、各 L_p が変化しなくなるまで以下を繰り返す。
 - 以下を満たす t について、 $t \notin L_q$ かつ、 $|L_q| \leq M_a$ のとき $L_q := L_q \cup \{t\}$

$$f(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{c} q \in \Delta$$

$$t_1 \in L_{q_1}, \dots, t_n \in L_{q_n}$$

$$t = f(t_1, \dots, t_n), t \models c$$
 - すべての受理状態 q について $L_q = \emptyset$ ならば受理集合は空と判定される

リダクションオートマトン

- **AWEDC**のうち以下の条件を満たすもの

- $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$

- $f(q_{k_1}, \dots, q_{k_n}) \xrightarrow{c} q_\ell$ について、

- c が等号を含むとき、 $\forall i. k_i > \ell$

- そうでないとき、 $\forall i. k_i \geq \ell$

- 例： $g(g(t, s), t)$ (s, t は任意) を含む項を受理

$$a \rightarrow q_\top, g(q_\top, q_\top) \rightarrow q_g, g(q_\top, q_g) \rightarrow q_g,$$

$$g(q_g, q_\top) \xrightarrow{11=2} q_f, g(q_g, q_\top) \xrightarrow{11 \neq 2} q_g,$$

$$g(q_g, q_g) \xrightarrow{11=2} q_f, g(q_g, q_g) \xrightarrow{11 \neq 2} q_g,$$

$$g(q, q_f) \rightarrow q_f, g(q_f, q) \rightarrow q_f \quad \text{ここで、} q \in \{q_\top, q_g, q_f\}$$

リダクションオートマトンの性質

- 和、積演算に閉じている
補演算については不明 (**open problem**)
- 空問題
 - 決定的で完全ならば、決定可能
 - 非決定的ならば、決定不能
- 有限問題 ($L(A)$ は有限集合か?) は、決定可能