木オートマトンの性質

- 閉包性

  L_1,L_2 を正規木言語とするとき以下の言語は正規木言語

  - 和集合: $L_1 \cup L_2$
  - 補集合: $\overline{L_1}$

    完全な **DFTA** にしてから最終状態の補集合をとる
  - 積集合: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
  - 線形な木準同型写像の像
  - 木準同型写像の逆像

- 和集合に関する証明：
  L_iを認識する**NFTA** $A_i = (Q_i, \mathcal{F}, Q_i^f, \Delta_i)$から、$L_1 \cup L_2$を認識する**NFTA** $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$を構成 **(**$Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$としてよい**)**
  - $Q = Q_1 \cup Q_2$
  - $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$
  - $Q^f = Q_1^f \cup Q_2^f$

- 木準同型写像:

  - $h_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathsf{T}(\mathcal{F}', \mathcal{X})$で定まる $h : \mathsf{T}(\mathcal{F}) \to \mathsf{T}(\mathcal{F}')$

    ここで、$arity(f) = n$のとき$h_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{T}(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$

    $$h(a) = h_{\mathcal{F}}(a)$$

    $$h(f(t_1, \ldots, t_n)) = (h_{\mathcal{F}}(f))\{x_1 \leftarrow h(t_1), \ldots, x_n \leftarrow h(t_n)\}$$

- $h_{\mathcal{F}}(g) = f(x_1, f(x_2, x_1))$, $h_{\mathcal{F}}(a) = a$, $h_{\mathcal{F}}(b) = b$のとき、$h(g(a, g(b, b))) = f(a, f(f(b, f(b, b)), a))$

- 木準同型写像hが線形: どの$f \in \mathcal{F}$についても$h_{\mathcal{F}}(f)$が線形項

- 木言語Lの木準同型写像hによる像$h(L)$、逆像$h^{-1}(L)$：
  $h(L) = \{h(t) \mid t \in L\}$
  $h^{-1}(L) = \{t \mid h(t) \in L\}$
- 正規木言語の非線形な木準同型写像の像が非正規木言語になる例：
  $\mathcal{F} = \{f(), g(), a\}$, $\mathcal{F}' = \{f'(,), g(), a\}$
  $h_{\mathcal{F}}(f) = f'(x_1, x_1)$, $h_{\mathcal{F}}(g) = g(x_1)$, $h_{\mathcal{F}}(a) = a$
  $L = \{f(g^m(a)) \mid m \geq 0\}$のとき、
  $h(L) = \{f'(g^m(a), g^m(a)) \mid m \geq 0\}$

- 線形な木準同型写像の像に関する証明：
  $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$が$L$を認識する**NFTA**のとき、$h(L)$を認識する**NFTA** $A' = (Q', \mathcal{F}, Q^f, \Delta')$を構成
  - 各$r = f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta$に対して、

    $Q_r = \{q_p^r \mid p \in \mathrm{Pos}(h(f))\}$

    Δ_rは以下の規則の集合とする($p \in \mathrm{Pos}(h(f))$)

    - $(h(f))(p) = g$について、$g(q_{p1}^r, \ldots, q_{pk}^r) \to q_p^r$
      (ここでarity$(g) = k$)
    - $(h(f))(p) = x_i$について、$q_i \to q_p^r$
    - $q_\varepsilon^r \to q$
  - $Q' = Q \cup \bigcup_{r \in \Delta} Q_r$
  - $\Delta' = \bigcup_{r \in \Delta} \Delta_r$

- 線形な木準同型写像の逆像に関する証明：
  $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$が$L$を認識する**DFTA**のとき、$h^{-1}(L)$を認識する**NFTA** $A' = (Q \cup \{s\}, \mathcal{F}, Q^f, \Delta')$を構成
  - Δ'は以下の規則の集合
    - $a \in \mathcal{F}$、$a \rightarrow_A^* q$なるqについて、$a \rightarrow q$
    - $f \in \mathcal{F}$ (arity$(f) = n > 0$)、$p_1, \ldots, q_n \in Q$、$(h(f))\{x_1 \leftarrow p_1, \ldots, x_n \leftarrow p_n\} \rightarrow_A^* q$なる$q$について、$f(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow q$
      ここで、x_iが$h(f)$に現れるiについて$q_i = p_i$、それ以外のiについて$q_i = s$
    - $a \in \mathcal{F}$について、$a \rightarrow s$
    - $f \in \mathcal{F}$ (arity$(f) = n > 0$)について、$f(s, \ldots, s) \rightarrow s$