状態最小化

- 集合S上の関係$\equiv$が以下を満たすとき、$\equiv$は**同値関係**であるという
  - 反射性：$\forall t \in S,\ t \equiv t$
  - 対称性：$\forall t, s \in S,\ t \equiv s \Rightarrow s \equiv t$
  - 推移性：$\forall t, s, u \in S,$
    $$(t \equiv s \wedge s \equiv u) \Rightarrow t \equiv u$$
- 同値関係$\equiv$は、Sを同値類に分割。分割数を**指数**という
  - tを含む**同値類**：$[t]_\equiv = \{s \mid t \equiv s\}$
  - $S = \bigcup_{t \in S} [t]_\equiv$

- $\mathrm{T}(\mathcal{F})$ 上の同値関係 $\equiv$ は、以下を満たすとき合同関係という

  $t_1 \equiv s_1, \ldots, t_n \equiv s_n$ ならば $\forall f \in \mathcal{F}, f(t_1, \ldots, t_n) \equiv f(s_1, \ldots, s_n)$

- 言語 L から定まる $\mathrm{T}(\mathcal{F})$ 上の合同関係 $\equiv_L$ は以下で定義される。

  $t \equiv_L s$ **iff**

  任意の文脈 C について $C[t] \in L \iff C[s] \in L$

- 完全な **DFTA** $A = (Q, \mathcal{F}, A^f, \Delta)$ から定まる $\mathrm{T}(\mathcal{F})$ 上の合同関係 $\equiv_A$ は以下で定義される。

  $t \equiv_A s$ **iff** $t \rightarrow_A^* q$ かつ $s \rightarrow_A^* q$

- 定理 **(Myhill-Nerode)**
  次の３つは、等価な条件である
  1 L は正規木言語
  2 L は、有限の指数を持つ合同関係のいくつかの同値類の和に等しい
  3 $\equiv_L$ の指数は有限

- 証明**(1 $\Rightarrow$ 2):**Lを認識する完全な**DFTA**を$A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, $
  とする。このとき、
  - 合同関係$\equiv_A$は有限の指数を持つ
    (指数がAの状態数より多くなることはないため**)**
  - $L = \bigcup_{t \in L} [t]_{\equiv_A}$である
- 証明**(2 $\Rightarrow$ 3) : 2**の合同関係を$\sim$として次を示す
  $\forall t \in \mathsf{T}(\mathcal{F}),\ [t]_\sim \subseteq [t]_{\equiv_L}$
    (ゆえに$\sim$の指数は$\equiv_L$の指数以上**)**
  - $s \in [t]_\sim$とすると、$s \sim t$。$\sim$の合同性より、任意の文脈Cについて、$C[s] \sim C[t]$。$C[s]$と$C[t]$が$\sim$の同じ同値類に含まれることから、$C[s] \in L \iff C[t] \in L$。よって、$s \equiv_L t$、すなわち、$s \in [t]_{\equiv_L}$

- 証明**(3 $\Rightarrow$ 1)**： $\equiv_L$からFTA $A_{\mathsf{min}} = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$ を定義する。
  - $Q = \{[t]_{\equiv_L} \mid t \in \mathsf{T}(\mathcal{F})\}$
  - $f([t_1]_{\equiv_L}, \ldots, [t_n]_{\equiv_L}) \to [f(t_1, \ldots, t_n)]_{\equiv_L} \in \Delta$
    (**$\equiv_L$の合同性からDFTAになる**)
  - $Q^f = \{[t]_{\equiv_L} \mid t \in L\}$
- $t \to^*_{A_{\mathsf{min}}} [t]_{\equiv_L}$ であることとQ^fの決め方から、A_{min}はLを認識する

- 系:正規木言語Lを認識する状態数最小の完全な**DFTA**は**(Myhill-Nerode** の定理の証明中の**)**A_{min}であり、**(**状態の名前換えの上で**)**唯一
- 証明 : $L = L(A)$なる**DFTA** Aを考えると、**Myhill-Nerode**の定理の証明より、任意の項tについて$[t]_{\equiv_A} \subseteq [t]_{\equiv_L}$
  - Aの状態数はA_{min}の状態数以上。よってA_{min}は状態数最小
  - $[t]_A \subseteq [t]_L$より唯一性も明らか
- $\equiv_L$の同一の同値類に含まれない二つの$\equiv_A$の同値類**(**Aの状態と同一視できる**)**を区別可能という

- **DFA** Aの最小化：$\equiv_A$の同値類(状態)で区別可能なものを調べあげ、区別不能なものを併合する
- 区別可能な同値類を調べる原理
  - $q \in Q^f$かつ$q' \in Q \setminus Q^f$ならば、qとq'は区別可能
  - qとq'が区別可能で、

    $f(\cdots p \cdots) \to q$, $f(\cdots p' \cdots) \to q' \in \Delta$

    ならば、pとp'は区別可能

- 例：$A = (\{q_a, q_b, q_{ab}, q_{ba}\}, \{a, b, f(,)\}, \Delta, \{q_{ab}, q_{ba}\})$

  $a \to q_a$, $b \to q_b$,

  f:

	q_a	q_b	q_{ab}	q_{ba}
q_a	q_a	q_{ab}	q_{ab}	q_{ab}
q_b	q_{ba}	q_b	q_{ba}	q_{ba}
q_{ab}	q_{ab}	q_{ab}	q_{ab}	q_{ab}
q_{ba}	q_{ba}	q_{ba}	q_{ba}	q_{ba}

- 区別可能な状態を調べる
  - 最終状態とそれ以外の状態とは区別可能
  - $f(q_a, q_a) \to q_a$ かつ $f(q_b, q_a) \to q_{ba}$ より q_a と q_b は区別可能

	q_a	q_b	q_{ab}	q_{ba}
q_b	×	—	—	—
q_{ab}	×	×	—	—
q_{ba}	×	×		—

×: 区別可能　空欄: 区別不能

  - q_{ab} と q_{ba} は区別不要なので、状態を併合できる

- 決定可能な問題
  - 空問題: $L(A) = \emptyset$であるか？
  - 有限性: $L(A)$が有限集合であるか？
    ループ$C[q] \to_A^* q$が存在するか？
  - 単一要素性：$L(A)$が単一要素か？
  - 等価性: $L(A) = L(A')$であるか？