

木文法

- **正規木文法** : $G = (N, \mathcal{F}, R, S)$
 - N : 非終端記号の集合
 - \mathcal{F} : 終端記号 (関数記号) の集合
 - R : 生成規則の集合

各生成規則は以下の形式

$$A \rightarrow \alpha \quad (A \in N, \alpha \in \mathsf{T}(\mathcal{F} \cup N))$$

- $S (\in N)$: 開始記号

- 例 : $G = (\{List, Nat\}, \{0, nil, s(), cons(,)\}, R, List)$

ここで、 R は以下の要素からなる

$List \rightarrow nil, List \rightarrow cons(Nat, List),$

$Nat \rightarrow 0, Nat \rightarrow s(Nat)$

- $cons(s(0), nil)$ の生成

$List$

$\rightarrow_G cons(Nat, List)$

$\rightarrow_G cons(s(Nat), List)$

$\rightarrow_G cons(s(0), List)$

$\rightarrow_G cons(s(0), nil)$

- 導出関係 \rightarrow_G ($\subseteq \mathsf{T}(\mathcal{F} \cup N) \times \mathsf{T}(\mathcal{F} \cup N)$): 以下を満たす最小の集合
 - $R \subseteq \rightarrow_G$
 - $\alpha \rightarrow_G \beta$ ならば $f(\cdots \alpha \cdots) \rightarrow_G f(\cdots \beta \cdots)$
- G が生成する言語 :

$$L(G) = \{s \mid S \rightarrow_G^* s \in \mathsf{T}(\mathcal{F})\}$$
- 問5-1 : $\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$ とする。開始記号を X とする
以下の正規木言語と等価な **NFTA** を示せ

$$X \rightarrow f(g(A), A)$$

$$A \rightarrow g(g(A))$$

$$A \rightarrow a$$

- 定理：正規木文法が生成する言語のクラスは、正規木言語
- 証明 (\supseteq) : **NFTA** $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$ から正規木文法 $G = (Q \cup \{S\}, \mathcal{F}, R, S)$ を作る。ここで R は以下の規則。
 - 各 $q \in Q^f$ について、 $S \rightarrow q$
 - 各 $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$ について、 $q \rightarrow f(q_1, \dots, q_n)$
- 略証 (\subseteq) : 正規木文法 $G = (N, \mathcal{F}, R, S)$ から **NFTA** $A = (N \cup Q, \mathcal{F}, \{S\}, \Delta)$ を作る
 - $List \rightarrow cons(s(Nat), List) \in R$ に対して、新たな状態 q を導入し、以下のように Δ 規則を作る
 - $s(Nat) \rightarrow q$
 - $cons(q, List) \rightarrow List$

正規木表現

- 例： $f(\square, \square)^*, \square . \square a$ は、言語 $\mathsf{T}(\{f(,), a\})$ を表す正規木表現
- 例： $s(\square)^*, \square . \square 0$ は、言語 $\{s^n(0) \mid n \geq 0\}$ を表す正規木表現
- 例： $\mathit{cons}((s(\square_1)^*, \square_1 . \square_1 0), \square_2)^*, \square_2 . \square_2 \mathit{nil})$ は、**List** を表す正規木表現

- 置き換えを表す変数の集合 $\mathcal{K} = \{\square_1, \dots\}$
- **木代入**: (スライド1の代入とは異なるので注意)

$t \in \mathsf{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{K})$ 、各 L_i を木言語とする

$$\begin{aligned}
 & t\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} \\
 = & \begin{cases} L_i & \dots \textbf{if } t = \square_i \\ \{a\} & \dots \textbf{if } t = a \in \mathcal{F} \\ \{f(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in s_i\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}\} & \dots \textbf{if } t = f(s_1, \dots, s_n) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & L\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} \\
 = & \bigcup_{t \in L} t\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}
 \end{aligned}$$

- 例: $f(\square, \square)\{\square \leftarrow \{a, b\}\}$
 $= \{f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\}$

● 言語上の演算

- 接続: $L \cdot \square_i M = L\{\square_i \rightarrow M\}$
- ベキ: $L^{0, \square_i} = \{\square_i\}, L^{k+1, \square_i} = L^{k, \square_i} \cup L \cdot \square_i L^{k, \square_i}$
- 閉包: $L^{*, \square_i} = \bigcup_{k \geq 0} L^{k, \square_i}$

● 例 :

$$\begin{aligned} \{a, f(\square, \square)\}^{*, \square} = & \\ & \{\square\} \cup \\ & \{a, f(\square, \square)\} \cup \\ & \{f(\square, a), f(\square, f(\square, \square)), \\ & f(a, \square), f(a, a), f(a, f(\square, \square)), \\ & f(f(\square, \square), \square), f(f(\square, \square), a), f(f(\square, \square), f(\square, \square))\} \cup \\ & \vdots \end{aligned}$$

- **正規木表現** E とそれが表す木言語 $\llbracket E \rrbracket$:

基底:

- \emptyset は正規木表現で、 $\llbracket \emptyset \rrbracket = \{\}$
- $a \in \mathcal{F} \cup \mathcal{K}$ は正規木表現で、 $\llbracket a \rrbracket = \{a\}$

帰納: E, E_i が正規木表現のとき、

- $f \in \mathcal{F}$ のとき、 $f(E_1, \dots, E_n)$ は正規木表現で、

$$\llbracket f(E_1, \dots, E_n) \rrbracket = \{f(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \llbracket E_i \rrbracket\}$$
- $E_1 + E_2$ は正規木表現で、 $\llbracket E_1 + E_2 \rrbracket = \llbracket E_1 \rrbracket \cup \llbracket E_2 \rrbracket$
- $E_1 \cdot \Box_i E_2$ は正規木表現で、

$$\llbracket E_1 \cdot \Box_i E_2 \rrbracket = \llbracket E_1 \rrbracket \cdot \Box_i \llbracket E_2 \rrbracket$$
- E^{*, \Box_i} は正規木表現で、 $\llbracket E^{*, \Box_i} \rrbracket = \llbracket E \rrbracket^{*, \Box_i}$

- 問5-2: $\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$ 上の言語を考える

$$L_1 = \{g^k(a) \mid k \geq 0\}$$

$$L_2 = \{f(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in L_1\}$$

このとき、 $L_1 \cup L_2$ を表す正規木表現を書け