

論理・オートマトン・関係

- 1変数 x の論理式 ϕ は集合を表せる
 $w \in L$ **iff** $w \models \phi$
- 例： $P(x)$ を x が整数かつ偶数のとき真となる論理式とする
 $2 \models P(x)$
 $P(x)$ は偶数の集合を表すとみなせる
- n 変数 x_1, \dots, x_n では n 項関係を表す
 $(w_1, \dots, w_n) \in R$ **iff** $w_1, \dots, w_n \models \phi$

- (木)オートマトンは文字列(木)の関係を表せる

- 文字列の組 $(aba, \varepsilon, bbba)$ の文字列表現：

$$[aba, \varepsilon, bbba] = \begin{array}{cc} a & b & a & \perp \\ \perp & \perp & \perp & \perp \\ b & b & b & a \end{array}$$

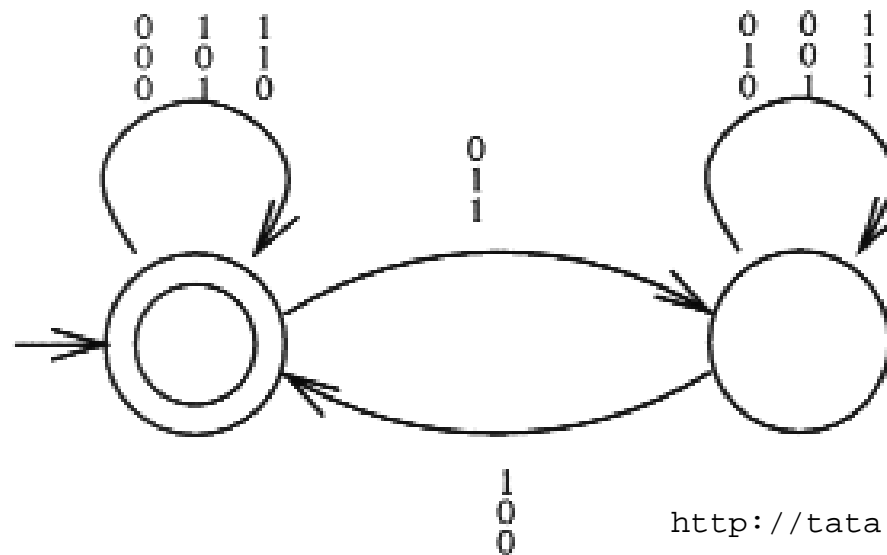
- 例：2進数表現での加算の関係 R_+ を表すオートマトン

- R_+ の定義

$$(x^R, y^R, z^R) \in R_+ \text{ iff } x = y + z$$

- $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$ をアルファベットする文字列を入力し
関係 R_+ を認識するオートマトン

- 例の続き：



<http://tata.gforge.inria.fr/>

- 2進数で $1100 = 0101 + 0111$ 、したがって、
 $[0011, 1010, 1110] = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ は受理される

木オートマトンによる木上の2項関係のクラス

- クラス Rec_\times : 正規木言語 L_1, L_2 から定まる関係 $L_1 \times L_2$
 - $\Delta = \{(t, t) \mid t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}$ は Rec_\times に属さない
- クラス Rec : 正規木言語 L から定まる関係 $\{(t, u) \mid [t, u] \in L\}$

- 木の組の木表現

$$\begin{aligned} & [f_1(t_1, \dots, t_n), f_2(u_1, \dots, u_m)] \\ &= f_1 f_2([t_1, u_1], \dots, [t_m, u_m], \\ & \quad [t_{m+1}, \perp], \dots, [t_n, \perp]) \quad (n \geq m \text{ のとき}) \end{aligned}$$

- 例 : $[f(g(a), g(a)), f(f(a, a), a)]$
 $= f f(g f(a a, \perp a), g a(a \perp))$

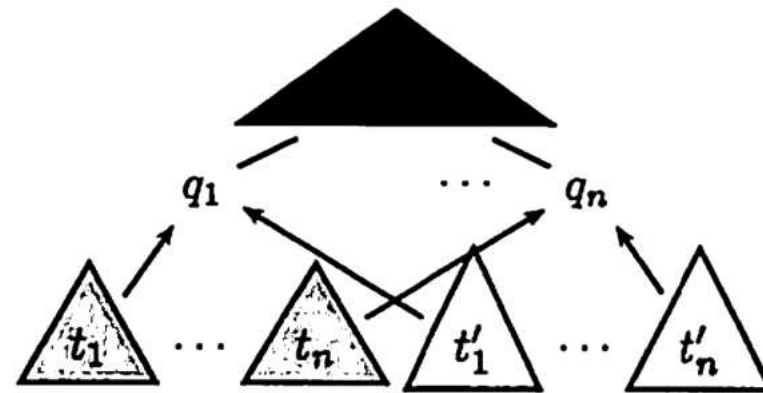
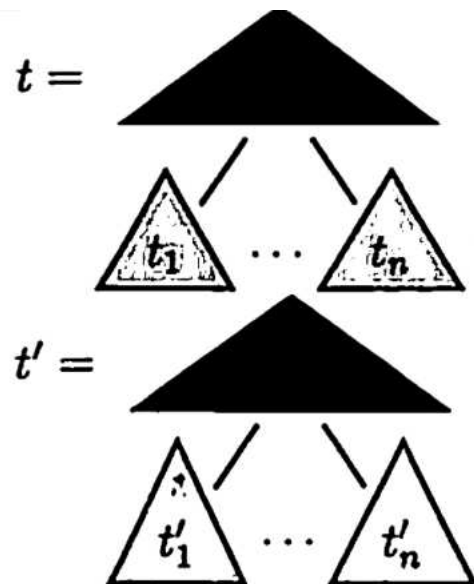
- クラス **GTT** : **NFTA** A_1, A_2 から以下のように定まる関係 R

$A_i = (Q_i, \mathcal{F}, \emptyset, \Delta_i)$ とする

$$C[t_1, \dots, t_n] R C[u_1, \dots, u_n] \iff$$

ある文脈 C と各 $q_j \in Q_1 \cap Q_2$ が存在して

$$t_j \rightarrow_{A_1}^* q_j \text{ かつ } u_j \rightarrow_{A_2}^* q_j$$



<http://tata.gforge.inria.fr/>

- Recが属する関係の例 $R : \mathcal{F} = \{a, \Omega, g(), f(,)\}$

$$tRu \stackrel{\text{def}}{\iff} u \in (\{t\} \cdot_{\Omega} \top(\mathcal{F}))$$

$[t, u]$ を受理する $Q^f = \{q'\}$ をもつ **NFTA** A

$$\begin{aligned} &aa \rightarrow q', \quad gg(q') \rightarrow q', \quad ff(q', q') \rightarrow q', \\ &\Omega a \rightarrow q', \quad \Omega g(q) \rightarrow q', \quad \Omega f(q, q) \rightarrow q', \quad \Omega \Omega \rightarrow q' \\ &\perp a \rightarrow q, \quad \perp g(q) \rightarrow q, \quad \perp f(q, q) \rightarrow q, \quad \perp \Omega \rightarrow q \end{aligned}$$

受理例 : $t = f(g(\Omega), g(\Omega))$, $u = f(g(g(a)), g(\Omega))$ のとき、

$$\begin{aligned} [tu] &= ff(gg(\Omega g(\perp a)), gg(\Omega \Omega)) \\ &\rightarrow_A^* ff(gg(\Omega g(q)), gg(q')) \\ &\rightarrow_A^* ff(gg(q'), q') \\ &\rightarrow_A ff(q', q') \\ &\rightarrow_A q' \end{aligned}$$

- GTTが属する関係の例 $R^* : \mathcal{F} = \{\times, +, 0, 1\}$

$$tRu \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C, t' \ t = C[0 \times t'] \wedge u = C[0]$$

R^* を定義する GTT(**NFTA**の組) A_1, A_2

$$A_1: \begin{array}{lll} 0 \rightarrow q & 0 \rightarrow q_0 & 1 \rightarrow q \\ q + q \rightarrow q & q \times q \rightarrow q & q_0 \times q \rightarrow q_0 \end{array}$$

$$A_2: 0 \rightarrow q_0$$

受理例 : $t = 1 + ((0 \times 1) \times 1, u = 1 + 0$ のとき、

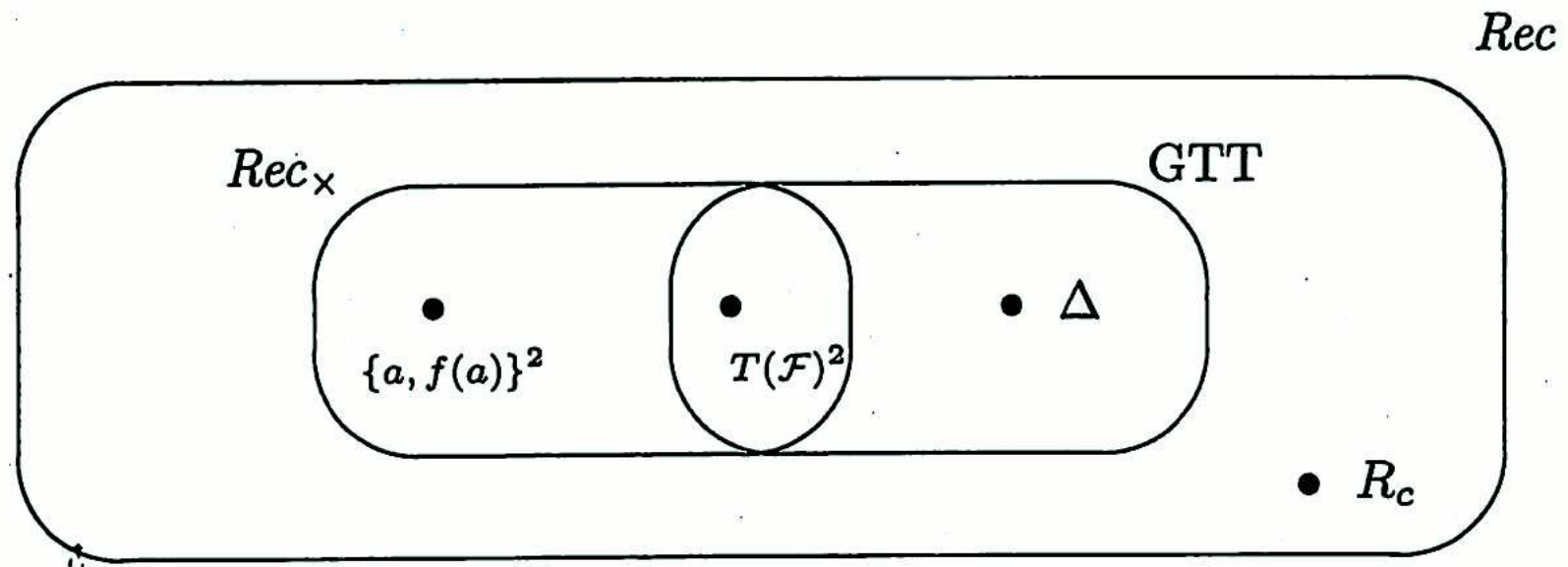
$$t \rightarrow_{A_1}^* 1 + ((q_0 \times q) \times q)$$

$$\rightarrow_{A_1} 1 + (q_0 \times q)$$

$$\rightarrow_{A_1} 1 + q_0$$

$$u \rightarrow_{A_2} 1 + q_0$$

- クラス間の関係



<http://tata.gforge.inria.fr/>

Recの閉包性

- **NFTA**の閉包性を受け継ぐ(和、積、など)

- 関係の射影 : $R \subseteq R^n$ の i 番目の射影 $R_i \subseteq T^{n-1}$

$$R_i(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists t \ R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

- 例 : $R = \{(a, a, a), (a, a, c), (a, b, c)\}$

$$R_2 = \{(a, a), (a, c)\}$$

- 関係の円柱化 : $R \subseteq R^n$ の i 番目の円柱化 $R_i \subseteq T^{n+1}$ 、

$$R^i(t_1, \dots, t_{n+1}) \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists t \ R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_{n+1})$$

- 例 : $R = \{(a, a), (a, c)\} \subseteq \{a, b, c\}^2$

$$R^2 = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, c, a), (a, a, c), (a, b, c), (a, c, c)\}$$

- Recのクラスは、射影と円柱化ともに閉じている
- 証明：射影 R_i は、 R から線形な木準同型写像 h で与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{arity}(f_1 \cdots f_n) = k \geq k' = \text{arity}(f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n) \\ & h_{\mathcal{F}}(f_1 \cdots f_n(x_1, \dots, x_k)) \\ & = f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n(x_1, \dots, x_{k'}) \end{aligned}$$
円柱化 R^i は h の逆像で与えられる

GTTの閉包性

- GTTのクラスは、推移閉包に閉じている
- 略証：(ε -規則の追加)

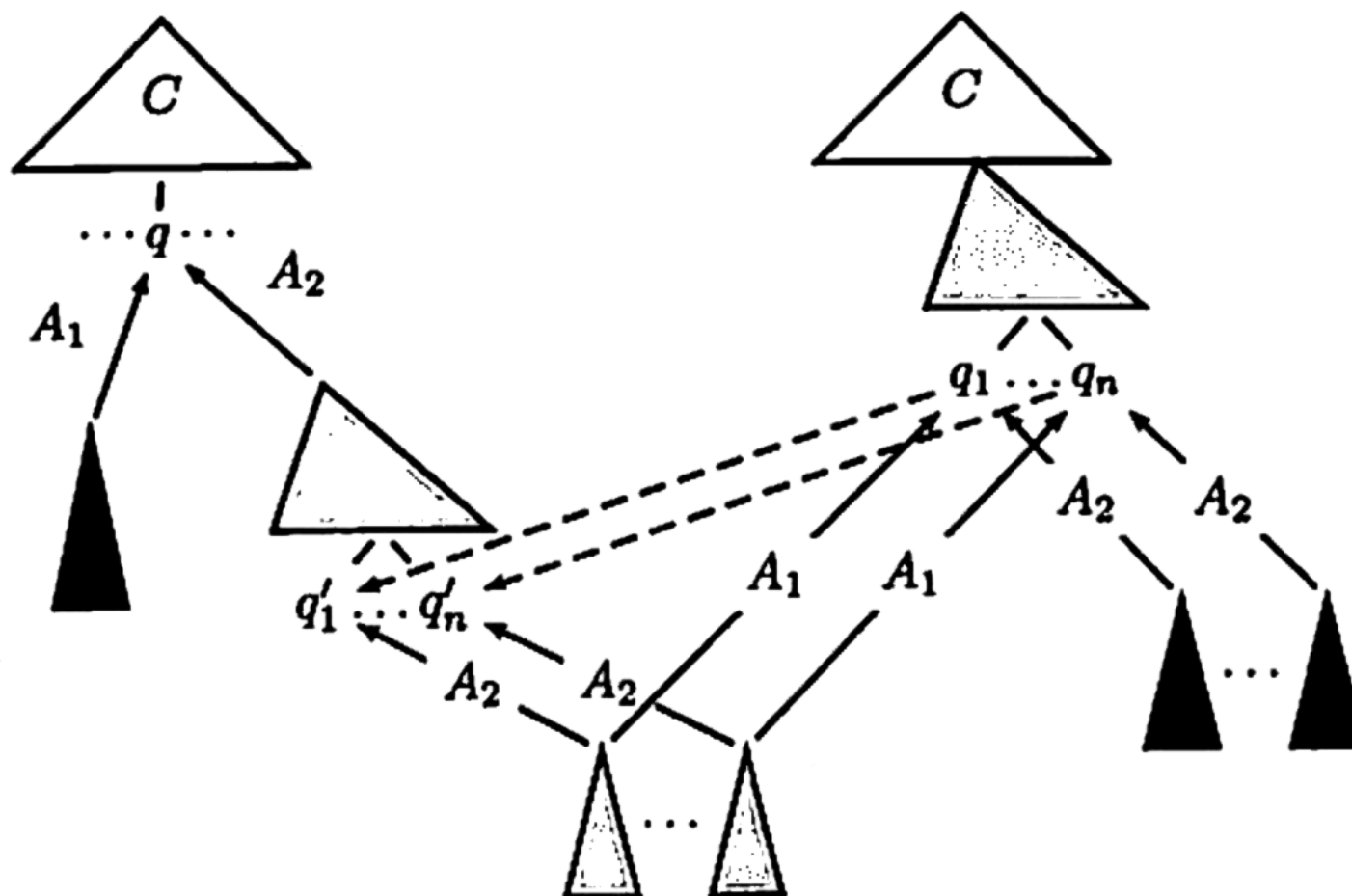
A_1, A_2 に共通な状態 q, q' で

$\exists t \ t \xrightarrow{*}_{A_1} q \wedge t \xrightarrow{*}_{A_2} q'$ を満たすものについて

$q \not\xrightarrow{*}_{A_2} q'$ ならば $q \rightarrow q'$ を A_2 の規則に追加

$q' \not\xrightarrow{*}_{A_1} q$ ならば $q' \rightarrow q$ を A_1 の規則に追加

- 略証 (続き)



<http://tata.gforge.inria.fr/>