

## Lect 10 Exercise

今日のテーマ: 1. 同形写像, 2.  $\text{Im } f$  と  $\text{Ker } f$

10-1.  $V, W$  をベクトル空間とする.

- (1) 写像  $f: V \rightarrow W$  が同形写像であることの定義を述べよ.
- (2)  $V$  と  $W$  が同形であることの定義を述べよ.

10-2.  $V$  をベクトル空間,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  を  $V$  の基底とする. このとき, この基底により定まる同形写像  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  とはどのようなものか?

(注: Lect 10, Theorem 1 の証明で用いた同形写像のことである. 同形写像であることの証明は不要.)

10-3. 線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対して, 以下を示せ. ただし,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$  とする.

- (1)  $f$  が単射, かつ  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  が一次独立ならば,  $f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)$  は一次独立.
  - (2)  $f$  が全射, かつ  $V = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$  ならば,  $W = \langle f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n) \rangle$ .
- (注: Lect 10, Prop. 2 の証明がそのままあてはまる.)

10-4. 線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対して,  $\text{Im } f, \text{Ker } f$  の定義をそれぞれ述べよ.

10-5. 線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対して, 以下を示せ.

- (1)  $\text{Im } f$  は  $W$  の部分空間である.
- (2)  $\text{Ker } f$  は  $V$  の部分空間である.

Lect 9 の講義ノートの訂正

Prop 4 の証明の途中 (下線部追加)

任意の  $\vec{v} \in V$  は

$$\vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n$$

と 一意的に 表すことができる. よって, (Prop 3 より)

$$f(\vec{v}) = c_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c_n f(\vec{a}_n).$$

(以下略)

解説: 一意性は  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  の一次独立性よりわかる. (Lect 8 Prop 1)  
もし一意性がないと

$$\begin{aligned} \vec{v} &= c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n \\ &= c'_1 \vec{a}_1 + \dots + c'_n \vec{a}_n \end{aligned}$$

と 2 通りで表したとき,

$$c_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c_n f(\vec{a}_n) = c'_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c'_n f(\vec{a}_n)$$

となるとは限らないので,  $\vec{v}$  の像  $f(\vec{v})$  がうまく定まらない.