Lect 6 Exercise

今日のテーマ: 1. ベクトル空間, 2. ベクトルの性質

6-1. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における和 $\vec{u}+\vec{v}$ とスカラー倍 $c\vec{u}$ の定義を与えよ. ただし, $\vec{u}=(u_i), \vec{v}=(v_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とする.

6-2. 以下のベクトル空間の公理を写せ. (慣れるまで毎週 1 回写すと良い)

(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$

(3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ となる $\vec{0}$ が存在する.

(4) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$

(5) $1\vec{u}=\vec{u}$

(6) $0\vec{u}=\vec{0}$

(7) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

(8) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

6-3. ベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ となるベクトル $\vec{w}$ を $\vec{v}$ の逆ベクトルいい, $-\vec{v}$ と表す. このとき, ベクトル空間の公理 (6-2 参照) を用いて以下のことを示せ.

(1) ベクトル $\vec{v}$ の逆ベクトル $-\vec{v}$ は存在するなら一意的である.

(2) $-\vec{v}=(-1)\vec{v}$

(3) $-3\vec{v}=(-1)(3\vec{v})=(-3)\vec{v}=3(-\vec{v})$

6-4. V をベクトル空間とする.

(1) ベクトル $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ に対して差 $\vec{v}-\vec{w}$ の定義を書け.

(2) $\vec{v}+\vec{u}=\vec{w} \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$ (すなわち移項ができること) を示せ.

(3) (1) の定義にもとづいて, 「加法」だけを用いて以下のベクトルを簡単にせよ.

$$-3(2\vec{u}-\vec{v})-2(2\vec{u}-3\vec{v})$$

(4) 中学で学んだ文字式の計算のように計算しても (2) と同じ結果になることを確かめよ.