Lect 13 実数とは何か？

1. 数の拡大

$\mathbb{N}$　$+, \times$

$\cap$　$0, \frac{1}{n}$　　$x+3=2$

$\mathbb{Z}$　$\pm, \times$　　$x=2+(-3)=2-3=-1$

$\cap$

$\mathbb{Q}$　$\pm, \times, \div$　　$3x=2$

$x=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

$\cap$　$\sqrt{2}, \pi$, 無理数

$\mathbb{R}$　$\pm, \times, \div$ $\longrightarrow$ 数直線は連続（すき間がない）

<u>復習</u>　$\mathbb{Q}$ の商集合による構成

商集合　$X/\sim = \{\bar{x} \mid x \in X\}$

$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$　　$\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'}$

(m, n)

$(m,n) \sim (m',n') \overset{def}{\Longleftrightarrow} mn' = m'n$

$\mathbb{Q} = X/\sim$

$\overline{(3,2)} = \overline{(6,4)}$

$\updownarrow$　　$\updownarrow$

$\frac{3}{2}$　　$\frac{6}{4}$

同様に $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ を用いて商集合として構成する

$0.999\cdots = 1.000\cdots$

同値類の等号

2. 連続性

いったん $\mathbb{R}$ を忘れる.

$\mathbb{Q}$ の(無限)数列

$(a_1, a_2, \cdots)$　$a_n \in \mathbb{Q}$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, (a_n) などと表す

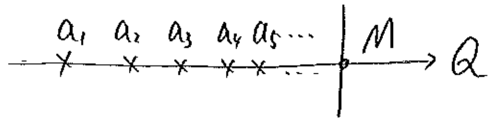
<u>Def</u>　(a_n) : $\mathbb{Q}$ の数列

(a_n) は有界増加列

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$　(増加)

(2) ある $M \in \mathbb{Q}$ が存在して

任意の n に対して $a_n < M$　(有界)



<u>例1</u>　以下はいずれも $\mathbb{Q}$ の有界増加列

(1) $(0.9, 0.99, 0.999, \cdots)$

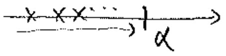
(2) $(1, 1, 1, \cdots)$

(3) $(3.1, 3.14, 3.141, \cdots)$

$a_n = \pi = 3.141592\cdots$　(非循環小数)

の小数第 n ケタまで

<u>Def</u>　$\mathbb{Q}$ の数列 (a_n) が $\alpha \in \mathbb{Q}$ に限りなく近づくとき,



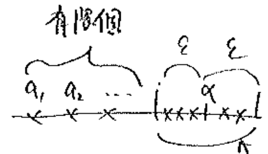
(a_n) は α に<u>収束する</u>といい

$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ と表す ($a_n \to \alpha$ とも表す)

<u>Remark:</u> 限りなく近づくの正確な意味 (ε 論法)

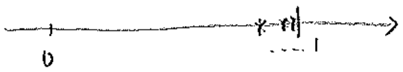
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある N が存在して

$n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$

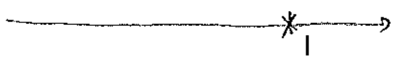


例1（つづき）

(1) $(0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \cdots)$ は $1\ (\in \mathbb{Q})$ に収束する。

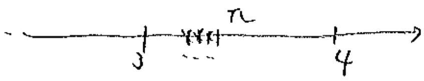


(2) $(1,\ 1,\ \cdots\cdots)$ は $1\ (\in \mathbb{Q})$ に収束する



(3) $(3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \cdots)$ は（π に収束する）

ℚの元に収束しない



「ℚの有界増加列で ℚの元に収束しないものがある」

このことを ℚは「連続ではない」という。

ポイント① 数列を用いて、数直線の連続性を（すき間がないこと）数学的に定式化した。

ℝは ℚを連続になるように拡大したもの

3. $\mathbb{R}$の構成法

考え方　$\mathbb{Q}$は連続ではない（すき間がある）

（＝有界増加列で収束しないものがある）

⇓

すき間を埋める（「完備化」）

$\mathbb{R} = X/\sim$

X：ある集合

アイデア①　すき間を埋める　$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$の各有界増加列に対して収束先をつけ加える.

Cantor (1872)　⟹　$X = \{$ すべての $\mathbb{Q}$ の有界増加列 $\}$

X：これを$\mathbb{R}$と思え

有界増加列 ↕ 同一視 収束先

問題点：異なる有界増加列で同じ値に収束するものがある

例　(1)　$(a_n) = (0.9, 0.99, \cdots)$ は 1 に収束

(2)　$(b_n) = (1, 1, \cdots)$ は 1 に収束

アイデア②　$\mathbb{Q}$の有界増加列の中で同じ値に収束すべきものは同値関係で同一視する

Def　Xについて

$$(a_n) \sim (b_n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

と定める.（Xの同値関係になる）

上の例：$(a_n - b_n) = (-0.1, -0.01, \cdots)$ は 0に収束.

よって $(a_n) \sim (b_n)$

そこで $\mathbb{R} = X/\sim$ と定める。

すなわち 実数 $= \overline{(a_n)}$, (a_n) : $\mathbb{Q}$の有界増加列

$\mathbb{R}$の和、積

$$\begin{cases} \overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} = \overline{(a_n + b_n)} \\ \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} = \overline{(a_n \cdot b_n)} \end{cases}$$ と定める。

$\mathbb{R}$は連続になる。（$\mathbb{R}$の有界増加列は$\mathbb{R}$のある元に収束）

（Landau 1930）

☆ 無限小数との関係

$M = \{$すべての無限小数$\}$

写像 $f: M \to \mathbb{R} = X/\sim$

$1.4592\cdots \longmapsto \overline{(a_n)}$

$(a_n) = (1.4, 1.45, 1.459, \cdots)$

Fact (1) fは全射である | $\mathbb{R}$の元は無限小数で表示できる。

(2) fは単射ではない | その表示は一意的ではない

例

$1 = 1.00\cdots \longmapsto \overline{(1.0, 1.00, \cdots)}$

$0.99\cdots \longmapsto \overline{(0.9, 0.99, \cdots)}$

等しい

これが $1 = 0.99\cdots$ の意味

無限小数の和・積

積 $\pi = 3.1415\cdots \longmapsto \overline{(3.1, 3.14, 3.141, \cdots)}$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots \longmapsto \times) \overline{(1.4, 1.41, 1.414, \cdots)}$

$\overline{(4.34, 4.4274, 4.441374, 4.4427093, \cdots)}$

小さな桁から順序確定

$\|$

$4.442\cdots \longmapsto \overline{(4.4, 4.44, 4.442, \cdots)}$

これが $\pi\sqrt{2}$ の無限小数表示。