Lect 9. 線形写像

1. 線形写像

一般に　X, Y：同じ構造をもつ集合

準同型写像　$f: X \to Y$　　構造を「保つ」(preserve)写像

homomorphism　　　具体的な意味は構造により異なる

同種　変形

線形構造の場合

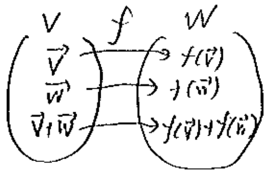
Def　V, W：ベクトル空間

写像 $f: V \to W$ が条件

$$
\text{線形性}\begin{cases} (1)\ f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v})+f(\vec{w}) & (\text{和を保つ}) \\ (2)\ f(c\vec{v}) = cf(\vec{v}) & (\text{スカラー倍を保つ}) \end{cases}
$$

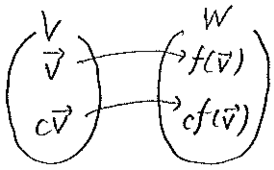
を満たすとき、fを準同型写像，線形写像（linear map）という。

(1)



「和とfは可換」ともいう

(2)



「スカラー倍とfは可換」ともいう。

例1　$f: V \to W$　　（0写像という）

$\vec{v} \mapsto \vec{0}$

は線形写像

$\because$　$f(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$,　$f(\vec{v})+f(\vec{w}) = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$

$f(c\vec{v}) = \vec{0}$,　$cf(\vec{v}) = c\cdot\vec{0} = \vec{0}$　□

例2　$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　　は線形写像でない

$a \mapsto a^2$

$\boxed{\text{反例}}$　$f(2) = 4$,　$f(1)+f(1) = 1+1 = 2$　□

例3（重要） 行列 A の定める線形写像 f_A

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 行 (1,2)成分 列 ： 2×3 行列 (行)(列)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して $A\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 + 4v_3 \\ v_1 + 3v_2 + 2v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

すなわち 写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が定まる.

$$\vec{v} \longmapsto A\vec{v}$$

このとき f_A は線形写像になる

$$
\begin{aligned}
\because\ f_A(\vec{v}+\vec{w}) &= A(\vec{v}+\vec{w}) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(v_1+w_1)+(v_2+w_2)+4(v_3+w_3) \\ (v_1+w_1)+3(v_2+w_2)+2(v_3+w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2v_1+v_2+4v_3 \\ v_1+3v_2+2v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w_1+w_2+4w_3 \\ w_1+3w_2+2w_3 \end{pmatrix} \\
&= A\vec{v} + A\vec{w} = f_A(\vec{v}) + f_A(\vec{w})
\end{aligned}
$$

Ex 9-3

$$
\begin{aligned}
f_A(c\vec{v}) &= A(c\vec{v}) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ cv_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2cv_1+cv_2+4cv_3 \\ cv_1+3cv_2+2cv_3 \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} 2v_1+cv_2+4v_3 \\ v_1+3v_2+2v_3 \end{pmatrix} \\
&= c(A\vec{v}) = cf_A(\vec{v})
\end{aligned}
$$

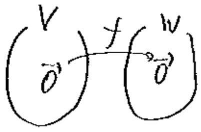
Prop 1 一般に $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ m行 n列 $m\times n$ 行列 i行 $\begin{pmatrix} - a_{ij} - \end{pmatrix}$ j列 (i,j)成分

は線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を定める（行列 A の定める線形写像 f_A）

$$\vec{v} \longmapsto A\vec{v}$$

2. 線形写像の性質

以下では $f: V \to W$, 線形写像とする



Prop 2 $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ($\vec{0}$を保つ)

Proof) $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) \underset{\text{線形性}}{=} 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ ∎

Prop 3
$$f(c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k}) = c_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + c_k f(\vec{v_k})$$
(1次結合を保つ)

Proof) 例えば $k=2$ のとき
$$f(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}) = f(c_1\vec{v_1}) + f(c_2\vec{v_2}) = c_1 f(\vec{v_1}) + c_2 f(\vec{v_2})$$
一般には k についての数学的帰納法による. ∎

Prop 4 $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$: Vの基底とする.

このとき fは $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ の像を与えることにより定まる

Proof) (復習: 基底 $\begin{cases} ① \ \vec{a_1}, \dots, \vec{a_n} \text{ は1次独立} \\ ② \ \langle \vec{a_1}, \dots, \vec{a_n} \rangle = V \end{cases}$)

任意の $\vec{v} \in V$ は
$$\vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}$$
と一意的に表わすことができる. よって Prop 3より
$$f(\vec{v}) = c_1 f(\vec{a_1}) + \cdots + c_n f(\vec{a_n})$$
よって $f(\vec{v})$ は $f(\vec{a_1}), \dots, f(\vec{a_n})$ により定まる.

また $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ は1次独立なので,

たとえば $f(\vec{a_1})$を $f(\vec{a_2}), \dots, f(\vec{a_n})$ から

線形性を用いて定めることはできない.

Ex　線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

このとき $f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ とおく.

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_2\end{pmatrix} \qquad c_2 = v_2, \quad c_1 = v_1 - v_2$$

よって $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = (v_1 - v_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

したがって
$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) &= (v_1 - v_2) f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + v_2 f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= (v_1 - v_2)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}v_1 - v_2 + v_2\\v_1 - v_2\\v_1 - v_2 + v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_1 - v_2\\v_1\end{pmatrix} \end{aligned}$$
//

3. 行列の正体

(Prop1) $m\times n$ 行列 A に対して

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{は線形写像}$$
$$\vec{v} \longmapsto A\cdot\vec{v}$$

逆に

Prop5 任意の線形写像：$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、

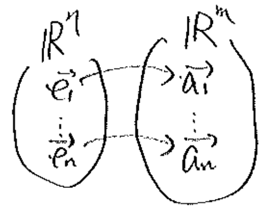
ある $m\times n$ 行列 A により $f = f_A$ と表される

また、その様な A は一意的に定まる。

準備：$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\underset{\vec{e_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\underset{\vec{e_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\underset{\vec{e_3}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Proof)（アイデア：上の事実と Prop4 を用いる）



$\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする。

$\vec{a_i} = f(\vec{e_i})$ とかく。

$m\times n$ 行列 A を以下で定める

$$A = m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{a_1} & \cdots & \vec{a_n} \end{pmatrix}}_{n}\right.$$

すると上の準備より $f_A = A\vec{e_i} = \vec{a_i}$

f と f_A はともに線形写像で、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ の像が

一致するので $f = f_A$.

A の一意性は、A の作り方よりわかる。

まとめ（ポイント①）

(1) 行列の正体は、線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ である。

(2) 行列とは、線形写像 f による 標準基底の像 を

左から順に並べたものである $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e_1}), \cdots, f(\vec{e_n}) \end{pmatrix}$