平成22年度 工V系(社会環境工学科) 第3回 電磁気学Ｉ

天野 浩

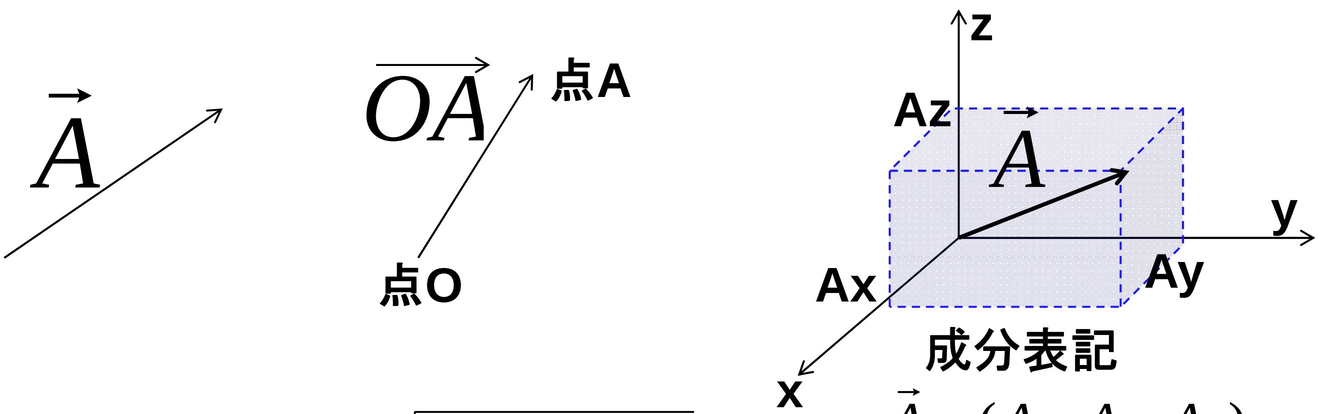
項目

電磁気学を理解するために必要な数学 その2 ベクトル演算

ベクトル演算は、電磁気学でもっともよく使う数学です。これが使いこなせるようになると、様々な物理量の立体的な捉え方ができるようになります。

ベクトル表記について

$\vec{A}$:物理量を表す記号の上に矢印をつける。



成分表記

$$\vec{A} = (Ax, Ay, Az)$$

ベクトルの大きさ $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$

単位ベクトル:大きさが1のベクトル

基本ベクトル:x、y、z方向で大きさが1のベクトル

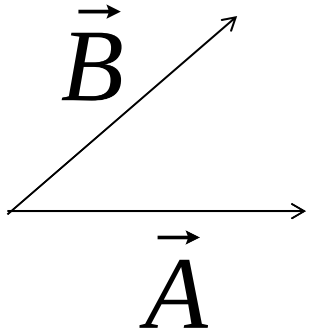
$$\vec{i} = (1,0,0) = \vec{x}$$

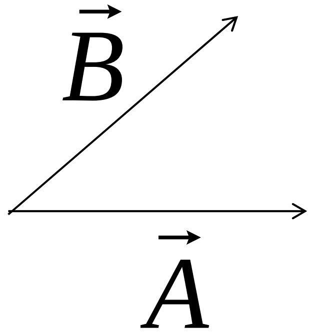
$$\vec{j} = (0,1,0) = \vec{y}$$

$$\vec{k} = (0,0,1) = \vec{z}$$

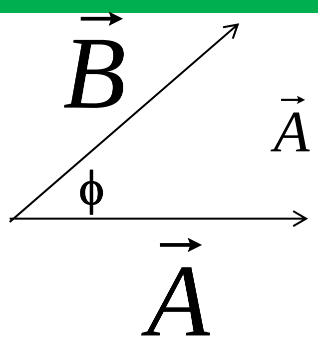
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

ベクトルの和、差
Q3-1　下記の二つのベクトルの和、および差ベクトルを書きなさい。





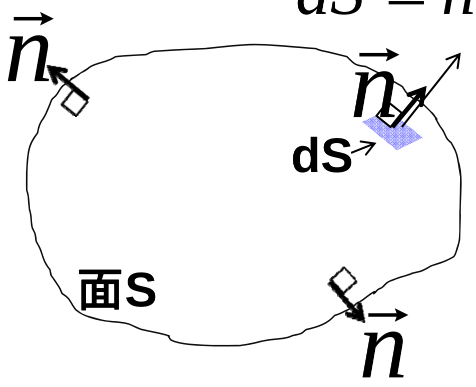
ベクトルの内積



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\phi=A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y+A_z\cdot B_z$$

法線ベクトル、面素ベクトル

$$d\vec{S}=\vec{n}dS$$



ある面Sが存在するとき、その面に垂直な単位ベクトルを単位法線ベクトルといい、左図のように$\vec{n}$ で表す。

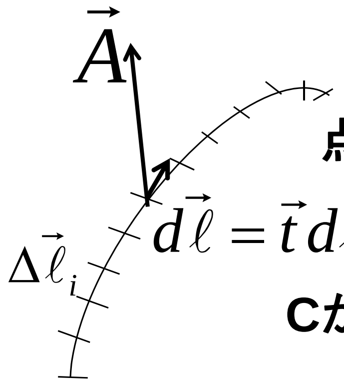
閉曲面の場合、出ていく方向を正にする。

dS:無限小の面積

$d\vec{S}=\vec{n}dS$ **面素ベクトル**

線素ベクトル

ベクトル関数の線積分



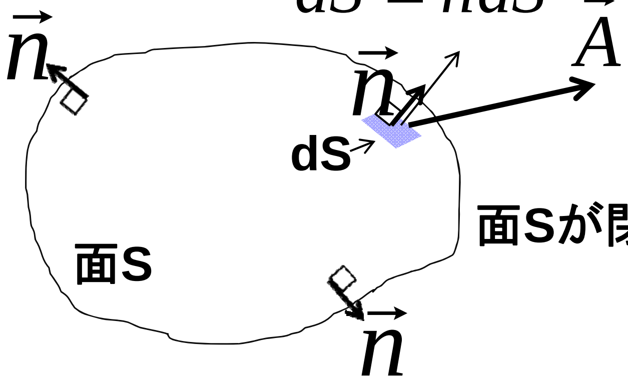
ベクトル $\vec{A}$ の線積分

$$\int_P^R \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \lim_{\Delta\ell_i \to 0,\, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}\cdot\Delta\vec{\ell}_i$$

Cが閉曲線で、1周に渡って積分する場合 $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$

電位の計算やアンペールの周回積分の際、用います。

ベクトル関数の面積分



ベクトル $\vec{A}$ の面積分

$$\iint \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

面Sが閉曲面で、全面に渡って積分する場合

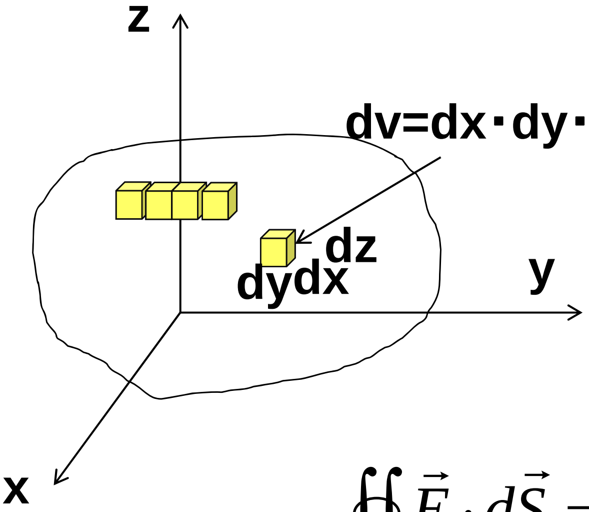
$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

ガウスの法則や電流の計算で用います。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_k Q_k ,\quad \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_k Q_k$$

ε:誘電率、 Q:電荷、 $\vec{\mathbf{D}}$:電束密度ベクトル

スカラ関数の体積積分



この微少体積中の電荷をQ_kとする。

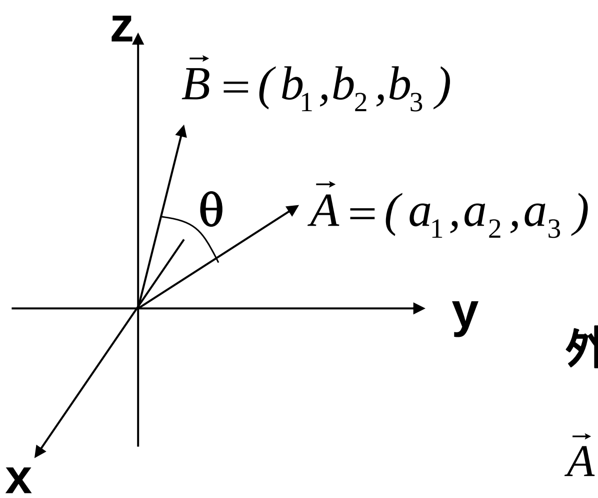
ρを電荷密度関数とすると、

$$Q=\sum_k Q_k=\sum_k \frac{Q_k}{dv_k}dv_k$$

$$=\sum_k \rho_k dv=\int \rho dv$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon}\int_v \rho dv,\ \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_v \rho dv$$

Q3-2　内積及び外積を，各成分で示しなさい。



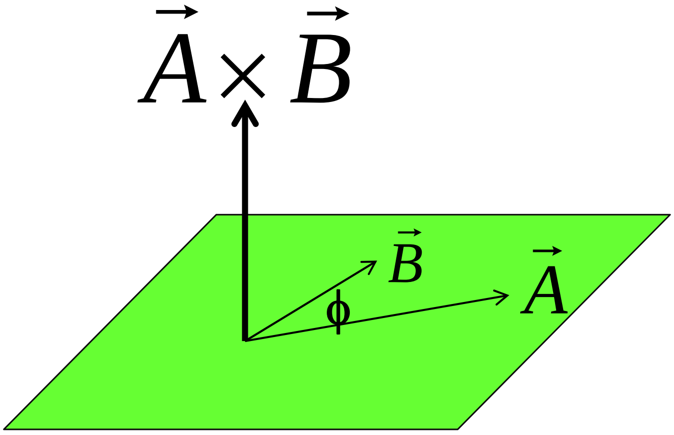
内積

$\vec{A}\cdot\vec{B}=$

外積

$\vec{A}\times\vec{B}$

外積の定義



$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\phi$$

Q3-3

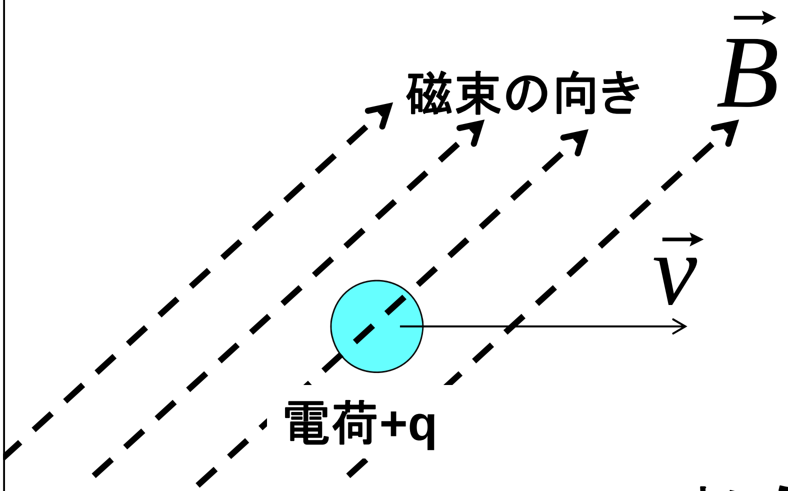
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|^2$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \boxed{\quad}$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = \boxed{\quad}$$

外積の応用例　・・・ローレンツ力



電荷+qの粒子が、速度vで磁界中を運動している場合

$$\vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

という力を受ける。

Q3-4 図中に力fのベクトルを書き込みなさい。

Q3-5　下記の計算を実行しなさい。

$$\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(4,5,6),\vec{c}=(2,4,8)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=$$

Q3-6　下記の計算を実行しなさい。

ベクトル恒等式

$$\vec{A}\times\vec{A}=$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=$$

ベクトル微分演算子

演算子　ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

スカラーの勾配 $\nabla \varphi = grad\varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$

ベクトルの発散 $\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$

ベクトルの回転

$$\nabla \times \vec{A} = rot\vec{A} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (a_1, a_2, a_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y})$$

勾配　grad

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz + yz^2$$ **のとき**

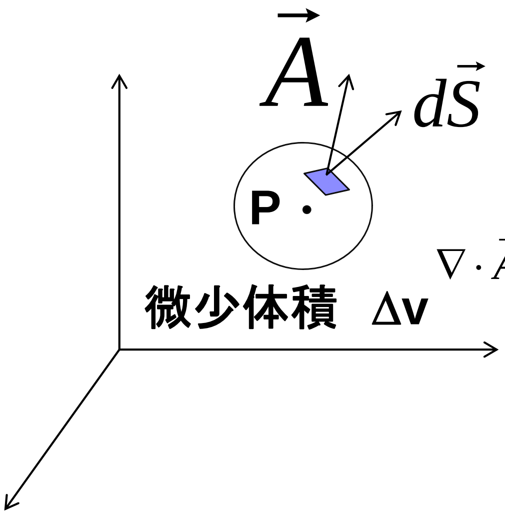
Q3-7

$\nabla f =$

応用例:　電位分布がわかっているときの電界分布の計算など

$$\vec{E} = -\nabla V$$

発散 div



$$\nabla\cdot\vec{A} = div\vec{A} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta v} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Q3-8 $A=(2xyz, yz^2, xz^3)$ **のとき**

$$\nabla\cdot\vec{A} =$$

Q3-9　次の演算をしなさい。

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{r}=(x,y,z)$　**とする。**

$$\nabla(\log r) =$$

$$\nabla\cdot\vec{r} =$$

$$\nabla\times\vec{r} =$$

回転　rot

$$\nabla\times\vec{A}=rot\vec{A}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(a_1,a_2,a_3)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z},\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x},\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y})$$

Q3-10　$A=(x^2yz, xy+yz, xy^2)$　**の時**

$$\nabla\times\vec{A}=$$

ベクトル微分演算子の公式：レポート課題：提出は来週講義開始時

以下の公式を確認すること。

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

左辺

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla\times\begin{vmatrix}\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})\vec{x}+(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2})\vec{y}+(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2})\vec{z}$$

右辺

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

$$=\left(\frac{\partial(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})}{\partial x},\frac{\partial(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})}{\partial y},\frac{\partial(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})}{\partial z}\right)-(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2},\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2})$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2},\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right)$$

ラプラス演算子

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi$$

放射電磁界解析でよく用いる。

講義で用いる数学の重要な定理

ガウスの定理

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

ある空間にベクトル場 $\vec{A}$ とその発散場 $\nabla\cdot\vec{A}$ がある場合，任意の領域V内で発散 $\nabla\cdot\vec{A}$ を加え合わせたものは，Vの全表面Sにおいてベクトル場 $\vec{A}$ の流束 $\vec{A}\cdot d\vec{S}$ を加え合わせたものに等しい。

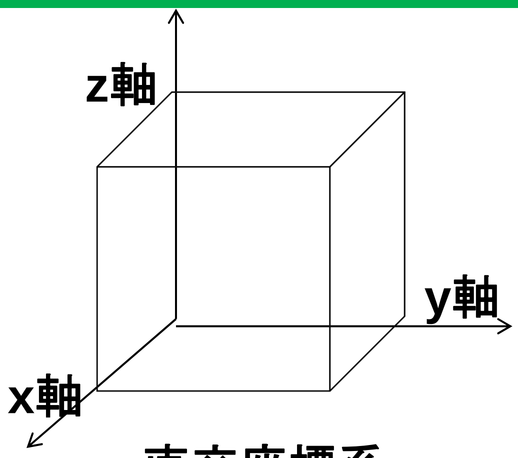
講義で用いる数学の重要な定理

ストークスの定理

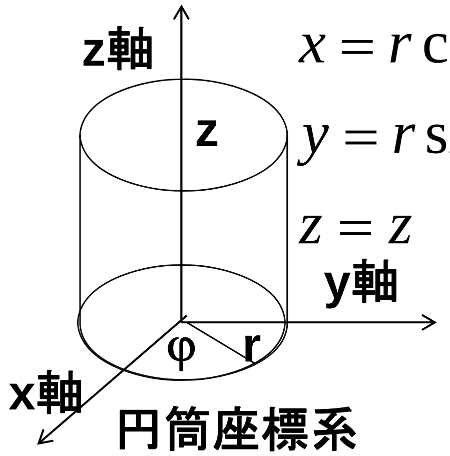
$$\iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

ある空間にベクトル場 $\vec{A}$ とその回転場 $\nabla\times\vec{A}$ がある場合，任意の局面Sを貫く $\nabla\times\vec{A}$ の流束 $\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$ を加え合わせたものは，Sの外周C上でベクトル場 $\vec{A}$ について，$\vec{A}\cdot d\vec{r}$ を加え合わせたものに等しい。

よく用いる3つの座標系



直交座標系

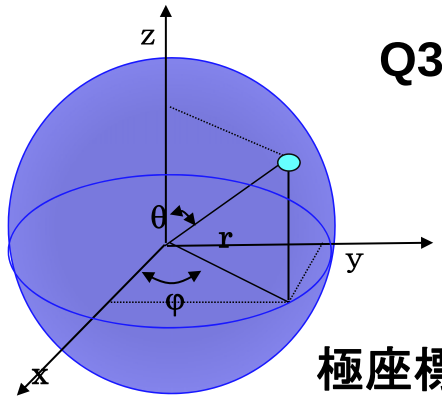


$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

円筒座標系



極座標系

Q3-11

$x =$

$y =$

$z =$

三つの座標系でのベクトル微分演算子:レポート課題　来週まで

	直交座標	円筒座標	極座標
$\nabla\phi$	$\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$	$\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}_z$	$\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi$
$\nabla\cdot\vec{A}$	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\nabla\times\vec{A}$	$\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$	$\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{i}_r+\left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{i}_\varphi+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{i}_z$	$\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{i}_r+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{i}_\theta+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{i}_z$

本講義のまとめ

＊ベクトルの線積分、面積分について、自分なりにまとめなさい。

＊ベクトル微分演算子について、自分なりにまとめなさい。

＊理解できないことがあれば、必ず質問すること。