力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

教科書：　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」
参考文献：　バークレー物理学コース「波動（上）」
－－

5　運動座標系

5．1　慣性力

教科書を読むこと。
加速度が存在しない系＝等速直線運動をする系である。 互いに等速直線運動する系は運動方程式が同じ形を持ち、区別できない。 運動の相対性である。

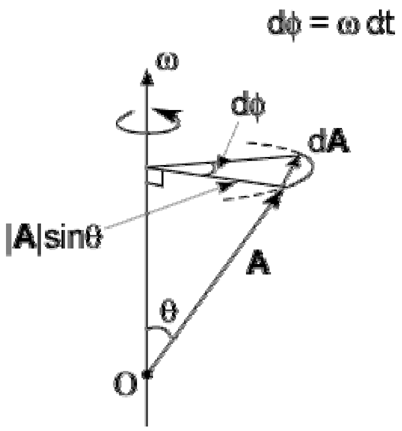
5．2　回転座標系

一定の角速度ωで回転する座標系を考える。 等速直線運動する系でない。非加速度系である。
コリオリの力と遠心力という見かけの力が、教科書では慣性力と呼ぶが、回転座標系の観測者に働くことが教科書では丁寧に導かれている。
Page 81 の脚注に、3次元での運動方程式が導出されている。 こちらの方が一般的でよい。 これをマスターせよ。

理解を助けるため、図を添えておく。

1．　慣性系 (x,y,z) に対して、回転系をとる。この場合、一般的に回転軸と慣性系のz軸を同じにとる必要はない。複雑にしないため、慣性系のx、y、z軸は図に描かない。角速度ベクトルω軸（つまり、回転軸）のみを描く。慣性系の原点と回転系の原点が一致していると云うことは、このω軸上に慣性系の原点があるわけだ。

いま、教科書では任意のベクトルを A と書く。このベクトルが回転する物体の位置座標である



と考えるとイメージしやすい。くどいが、物体位置は回転系から見ると不動であるが、慣性系からみると時間と共に変化している。つまり、Aは慣性系からみると時間と共に変化しているのはわかる。A は角速度ωで回転軸を中心として回っているわけだ。

物体の回転軸からの距離は、｜A｜sinθである。｜A｜はベクトルの大きさを意味する。微小時間dtの間に物体は回転軸を中心として微小変位　dA　する。この変位は回転軸に垂直な面上であり、その大きさは｜dA｜＝｜A｜sinθ×dΦ、dΦ＝微小時間dt内での回転角度＝ω×dtである。つまり、　｜dA｜＝｜A｜sinθ×ωdt。変位の方向を考えてみよ。右ネジをωの方向からAの方向へ回したときに進む方向であることがわかる。したがって、変位のベクトルを外積の形で表現すると、dA＝ω×Adt　である。　A×ωdtでない。両辺 dt で割ると、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{1}$$

を得る。

これは、回転系に固定された任意のベクトルAを慣性系からみると、時間変化しているわけであるがその変化速度は（1）式の関係をもつことを意味する。

2．　次に、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x{}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x{}' \tag{2}$$

であるが、Aの代わりに回転系の単位ベクトル（$\mathbf{e}_x$’，$\mathbf{e}_y$’，$\mathbf{e}_z$’）を持ってきた。$\mathbf{e}_x$’，$\mathbf{e}_y$’，$\mathbf{e}_z$’は回転系では不変な量であるが、慣性系では回転して見える。Aと同じである。それが（2）式だ。

3．　　　　r　＝　r’　＝　x’$\mathbf{e}_x$’＋y’$\mathbf{e}_y$’＋z’$\mathbf{e}_z$’　　　　（3）

これは慣性系でみた物体の位置を回転系の座標表示であらわしたもの。物体の位置は慣性系では r、回転系座標表示を用いるとr’、それを単位ベクトルで成分展開すれば　x’$\mathbf{e}_x$’＋y’$\mathbf{e}_y$’＋z’$\mathbf{e}_z$’である。

時間微分をすれば、

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{4}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{5}$$

を得る。両辺に質量mをかけると、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\ddot{\boldsymbol{r}}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{6}$$

（6）式は物体に働く外力F（外力の慣性系表示がF、回転系表示はF’である）に等しい。左辺は慣性系表示であり、右辺は回転系表示である。一つの現象を慣性系でみれば、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{7}$$

と表示でき、一方回転系でみれば

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{8}$$

となるわけだ。

混乱すると云う学生さんが多かったので、蛇足かもしれないが教科書説明の追加をした。

ここでは、角速度が一定でなく時間とともに変化する項も含まれている。 この項を除外すると、

$$m\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{F}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'). \tag{9}$$

第二項がコリオリ力、第三項が遠心力である.

★　　北半球で台風は右巻きであり、南半球ではその逆である。 これはコリオリ力の所為である、とよく耳にすると思うが自分で上記のベクトル積の形から思考してみよう。 教科書page　８４の図5.5を参照せよ。

　台風を２次元平面で考え、高さ方向は考えないと簡単化する。緯度のせいで地球の回転軸ωは平面に垂直でない。垂直成分と平行成分をもつ。垂直成分（$\omega_\perp$）がいまの場合、対象となる。台風は低気圧、よって、気流のながれは外から内へ。コリオリ力＝ $-\omega_\perp \times v'$　で力の働く方向を考えよ。

　　このとき、マイナス符号を忘れるな！　あるいは、コリオリ力＝v’×ω　と覚えておいてもよい。

豆知識

風速 17.2 m/s 以上の弱い熱帯性低気圧を台風と呼ぶ。

★　　赤道での遠心力による加速度は　　０．０３４　m/s^2。これが重力加速度g＝９．８　m/s^{2}のほぼ１/３００倍と計算。コリオリ力も同程度になるとあるが、速度を与えないと数値計算できない。また、赤道上ではコリオリ力は生じない。

　いま、日本の北緯３７度、台風の風速を　５０　m/sとしよう。 ２$\omega_\perp$（＝4.4×10^{-5} /s）×r’（＝50 m/s）＝ ０．００４　m/s^2。遠心力もsin37°=0.60を考慮する必要あり。遠心力＝$\omega_\perp{}^2 r'$はsin37°の３乗の影響を受ける（この場合、r’は日本から地球の回転軸までの垂直距離）。その結果、０．０３４×０．６０^3　＝　０．００７４　m/s^{2}である。 コリオリ力は遠心力のほぼ半分で、教科書通り同程度だ。

★　　回転系に物体を止めて置くことを教科書で議論してある。つまり、$\dot{r}' = 0$。
コリオリ力は働かない。だが、遠心力はある。

$$m\alpha' = F' - m\omega \times (\omega \times r') = 0 \tag{10}$$

物体を静止させて置くためには、F’＝－（遠心力）でなければならないと。遠心力と反対方向、つまり、中心に向かう方向に遠心力と同じ大きさの力が要る。向心力だ、とある。

★　　それでは、反対を考えよう。
慣性系に静止した物体を置く。回転系からはどのような運動をしているようにみえるか。答えは、すでに明らかである。回転系の角速度で、回転系の回転方向と逆方向に回る円運動であることは直感的に分かる。

　　今回も外力はない。運動方程式は

$$m\alpha' = -2m\omega \times v' - m\omega \times (\omega \times r') \tag{11}$$

教科書の式（１．２４）を使って、運動方程式を解けばよい。両辺で共通な質量mは落とそう。ωをz軸にとる。右辺第一項は

$$\begin{aligned} -2\omega \times v' &= -2\omega\, e_z{}' \times (\dot{r}\, e_{r'}{}' + r'\dot{\theta}'\, e_{\theta'}{}') \\ &= -2(\omega\dot{r}'\, e_{\theta'}{}' - \omega r'\dot{\theta}'\, e_{r'}{}') \end{aligned} \tag{12}$$

第二項は

$$\begin{aligned} -\omega\, e_z{}' \times (\omega\, e_z{}' \times r'\, e_{r'}{}') &= -\omega\, \dot{e}_z{}' \times \omega r'\, \dot{e}_{\theta'}{}' \\ &= \omega^2 r'\, e_{r'}{}' \end{aligned} \tag{13}$$

左辺は

$$\alpha' = (\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2)\, e_{r'}{}' + (2\dot{r}'\dot{\theta}' + r'\ddot{\theta}')\, e_{\theta'}{}' \tag{14}$$

両辺から　e$_{r'}$’、e$_{\theta'}$’成分ごとにまとめると、

$$\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2 = 2\omega r'\dot{\theta}' + \omega^2 r' \tag{15}$$

$$2\dot{r}'\dot{\theta}' + r'\ddot{\theta}' = -2\omega\dot{r}' \tag{16}$$

となる。

慣性系は回転系に対して、各速度ωで反対方向に回転している。慣性系に静止した物体は、したがって、回転系に対して角速度$\dot{\theta}' = -\omega$で運動している。したがって、(16)式は

$$\begin{aligned} -2\omega\dot{r}' + r'\ddot{\theta}' &= -2\omega\dot{r}' \\ r'\ddot{\theta}' &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

を得る。つまり、$\dot{\theta}'$＝一定。回転系の角速度ωは一定としたことを表している。同様に、(15)式は

$$\begin{aligned} \ddot{r}' - r'\,\dot{\theta}'^2 &= 2\omega r'\dot{\theta}' + \omega^2 r' \\ \ddot{r}' &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

つまり、r'方向にも物体は動かないということ。これで回転系からみると、円運動、$\dot{\theta}' = -\omega$でr'＝一定、することが分かった。当たり前か。

しかし、ここで回転系で静止していた場合と慣性系で静止していた場合で比べてみよう。
前者ではコリオリ力は無かった。しかし、円運動をさせるためには遠心力に対して向心力という外力を働らかせる必要があった。　ところが、後者の場合は外力は不要であり、コリオリ力がその代わりをしたわけである。

式(11)の右辺のv'は、$v' = r'\dot{\theta}'\,\dot{e}_{\theta'}{}' = -r'\omega\,\dot{e}_{\theta'}{}'$なので、第一項は　$-2mr'\omega^2\,\dot{e}_{r'}{}'$。第二項は$mr'\omega^2\,\dot{e}_{r'}{}'$。よって、

$$\begin{aligned} m\alpha' &= \left(-2mr'\omega^2(\text{コリオリ力}) + mr'\omega^2(\text{遠心力})\right)\dot{e}_{r'}{}' \\ &= -mr'\omega^2\,\dot{e}_{r'}{}' \end{aligned} \tag{19}$$

まさに、向心力が得られたわけであるが、この場合はコリオリ力の半分で遠心力を打ち消し、残りの半分で向心力としての役割を果している！

当たり前の現象にコリオリ力を見出すことができる。面白いではないか。

コリオリ力の現象はこれだけではない．私のホームページの Pseudo-Asimov 蘭

「慣性力」(2001.9.6.)

をたのしんで読んでみて．